



TEACHING MATERIALS
FOR COLLEGE STUDENTS

高等学校教材

结构优化设计基础

□ 侯密山 主编



中国石油大学出版社



TEACHING MATERIALS
FOR COLLEGE STUDENTS

高等学校教材

结构优化设计基础

侯密山 主编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构优化设计基础/侯密山主编. —东营:中国
石油大学出版社, 2012. 5

ISBN 978-7-5636-3694-5

I. ①结… II. ①侯… III. ①结构设计—最优设计
IV. ①TU318

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 059317 号

中国石油大学(华东)规划教材

书 名: 结构优化设计基础

主 编: 侯密山

责任编辑: 秦晓霞 (电话 0532—86981532)

封面设计: 赵志勇

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)

网 址: <http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

印 刷 者: 沂南县汇丰印刷有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0532—86981532, 0546—8392563)

开 本: 180 mm×235 mm 印张: 12.00 字数: 237 千字

版 次: 2012 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 20.00 元

内容提要

本书主要介绍结构优化的基本概念、理论、常用优化设计方法和简单结构的优化设计实例。主要内容有:结构优化设计概述与基本概念;结构优化设计准则法的满应力设计,基于结构优化设计准则法的库-塔克条件及其应用;结构优化设计的数学规划解法,包括解线性规划的单纯形法与对偶线性规划,无约束优化的直接搜索法与梯度算法,约束非线性规划的直接算法与可行方向法等。

本书可作为理工科院校工程力学、土木建筑等专业高年级本科生、研究生的教材,也可供有关专业的教师和工程技术人员学习与参考。

本书是作者在从事结构优化设计教学实践的基础上,根据工程力学专业及相近专业的培养计划和教学大纲编写而成的。全书共分为六章:第一章介绍了结构设计与优化设计的关系;第二章介绍了结构优化的基本概念;第三、第四、第五章分别介绍了结构优化设计准则法、库-塔克条件及其应用,线性规划在结构优化设计中的应用,无约束优化的直接搜索法与梯度算法、约束非线性规划的直接算法与可行方向法等;第六章介绍了简单结构的优化设计实例,有助于初学者和工程技术人员的学习与应用。作者在内容编排上力求通俗易懂、由浅入深、理论联系实际,着重强调优化设计方法的基本思想与几何解释,便于读者掌握和应用。

结构优化设计课程通常是工程力学专业设置的,在工程力学专业课程设置和专业培养中都占有重要地位。作为理工科院校工程力学专业高年级本科生使用的专业技术课教材,为弥补学生在建筑结构设计概念、方法、过程和现代结构形态、发展趋势等方面知识的不足,本书在第一章绪论中概念性地介绍了建筑设计的过程、理念,以及从建筑结构设计的角度理解力学概念与力学原理在结构设计与结构优化设计中的作用,使得学生在学习结构优化设计课程时能较好地与实际的结构设计联系起来。

全书由侯密山编写,在编写的过程中参考了许多文献资料,在此向有关作者一并表示感谢。

由于作者水平有限,书中缺点、疏漏在所难免,恳请读者不吝指教。

编 者

2011年10月

Contents

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 现代结构与优化设计	1
1.2 现代结构的特征	2
1.3 选择合理的结构方案	4
1.4 结构优化设计的相对性	7
1.5 结构性态和设计原则	9
1.5.1 结构性态和能量原理	9
1.5.2 结构的整体稳定和几何构成稳定	11
1.5.3 结构极限分析的上下限定理	12
1.5.4 结构的失稳与动力问题	14
1.5.5 结构设计的基本原则	15
1.6 小结	16
第二章 结构优化设计的基本概念	18
2.1 结构优化设计的两个简单例子	18
2.1.1 环形截面支柱(管柱)的优化设计	18
2.1.2 两杆桁架的优化设计	21
2.2 设计变量、约束条件和目标函数	24
2.2.1 设计变量	24
2.2.2 目标函数	25
2.2.3 约束条件	25
2.2.4 可行域	26
2.2.5 设计变量的进一步说明	27
2.2.6 显式约束条件与隐式约束条件	29
2.3 三杆平面桁架的优化设计	30
2.4 求解结构优化问题的途径	32

习题	34
第三章 结构优化设计的准则法	36
3.1 满应力设计	36
3.1.1 满应力设计的概念和特点	36
3.1.2 比例满应力法设计	38
3.1.3 比例满应力法设计的改进——齿行法	43
3.1.4 满应力设计迭代过程的收敛速度问题	47
3.2 受约束最优化问题的库-塔克必要条件	49
3.2.1 一元函数的无约束优化	49
3.2.2 多元函数的无约束优化、梯度与海森矩阵	50
3.2.3 受到等式约束的多元函数的优化,拉格朗日乘子法	52
3.2.4 受到不等式约束的多元函数的优化,库-塔克条件	55
3.2.5 结构优化中经常使用的库-塔克条件形式	58
3.3 受单个位移约束的优化准则	59
3.3.1 问题的提法	59
3.3.2 单个位移约束下的最优化准则	60
3.3.3 最优化准则的物理意义	61
3.4 基于最优准则的迭代法	62
3.4.1 静定桁架的优化设计	62
3.4.2 静不定(或超静定)桁架的优化设计	66
3.5 结构反应的灵敏度分析(梯度表达式)及其应用	70
3.6 多约束下的优化准则法	73
习题	75
第四章 线性规划在结构优化设计中的应用	78
4.1 线性规划简介	78
4.1.1 线性规划的数学模型	78
4.1.2 线性规划的基本概念与原理	82
4.1.3 线性规划的单纯形解法	83
4.2 对偶线性规划	88
4.3 刚架最小重量设计	91
4.3.1 极限设计的基本原理	91
4.3.2 刚架最小重量设计实例	94
习题	98
第五章 非线性规划在结构优化设计中的应用	99
5.1 数学规划问题简介及其解法	99

5.1.1 数学规划问题简介	99
5.1.2 数学规划问题的解法	100
5.2 凸规划与最优解	101
5.3 最优解的基本下降算法、收敛速度与收敛准则	106
5.3.1 最优解的基本下降算法	106
5.3.2 收敛速度与收敛准则	108
5.4 无约束优化的直接搜索法	109
5.4.1 模式搜索法	109
5.4.2 单纯形法	111
5.5 无约束优化的梯度算法	116
5.5.1 最速下降法	116
5.5.2 牛顿-芮弗逊算法	119
5.6 求解受约束非线性规划的直接算法	123
5.6.1 梯度投影法	123
5.6.2 梯度投影法在结构优化中的应用	134
5.6.3 可行方向法	137
5.6.4 直接处理约束的最速下降法	145
5.6.5 约束最优化问题的复形法	153
5.7 求解受约束非线性规划的线性近似与罚函数方法	159
5.7.1 用线性规划去逐步逼近非线性规划的方法	159
5.7.2 罚函数法	162
习题	168
第六章 简单结构的优化设计	170
6.1 中心受压组合 H 型钢柱优化设计	170
6.2 矩形截面钢筋混凝土简支梁的优化设计	172
6.3 中心受压矩形截面钢筋混凝土柱的优化设计	175
6.4 地下埋管结构优化设计	178
6.4.1 地下埋管结构优化设计	178
6.4.2 地下埋管结构优化实例	180

第一章 绪论

Chapter one

§ 1.1 现代结构与优化设计

高耸的电视塔、写字楼,新型空间结构的体育场馆、音乐厅,具备综合集散功能的现代运输枢纽、机场、码头,大跨度桥梁等现代建筑结构,是反映当今社会经济、文化和信息飞速发展的重要标志之一,也充分体现了现代结构设计的水平、特点和趋势。现代结构设计不仅要挑战特别高耸、特大跨度、特别新颖的结构形式,而且要在结构设计和施工中贯彻可持续发展的理念,更要综合考虑功能、美学与环境的社会要求。作为现代建筑结构的主流建设者——结构工程师和建筑师,必须针对 21 世纪的建设趋势与特点,正面应对挑战,圆满完成时代赋予的使命。

现代结构设计的过程与方法是“从整体着眼、从局部着手、逐步优化”,其实质也就是在满足功能、美学与环境等社会要求的前提下的一个结构优化设计过程。从广义上讲,结构优化设计的意义就在于它能从概念上完整包含当今社会对现代建筑结构的要求,成为结构工程师与建筑师应对挑战、完成时代使命的有力工具。

在工程建设过程中,实现符合美学、环境要求的建筑结构的函数与控制工程投资是工程建设的两大目标。而控制工程投资的关键就在于“结构的优化设计”。与广义的结构优化设计不同,它是一个力学概念下的结构优化设计,即通过结构分析,在一个明确的设计指标下(如满足安全条件下的最低造价)来完成的结构设计。本书所提到的结构优化设计问题均为这一概念下的问题。

其实,“设计”一词本身就包含了“优化”的概念,而结构优化设计是相对于传统结构设计而言的。传统的结构设计的步骤是:设计者根据设计要求和实践经验,参考类似的工程设计,通过判断去创造设计方案;再通过结构分析对设计方案进行强度、刚度和稳定性等各方面的校核计算,以证实设计方案的可行性。如果条件允许,设计者还可以对多个设计方案进行分析比较,从而对结构布局、材料选择、构件尺寸、构件外形等进行修改,以便得到更为合理的方案。由于时间和设计者经验的限制,所确定的最终方案往往不是理想的最佳方案,而仅仅是一个可行方案。进一步说,整个传统设计过程就是一个人工试凑和定性分析的比较过程,每次设计参数的修改都是凭经验

或直观判断给出的,而不是根据某种设计指标由分析计算给出的,力学分析只是起到一种校核的服务作用。这种传统结构设计并没有真正体现“设计”的含义,对于所给出的安全性和经济性没有衡量标准。

结构优化设计与传统结构设计依据的是相同的基本理论,使用的是相同的基本公式,遵守的是相同的设计规范,采用的是相同的设计过程。所不同的是:在结构优化设计中,力学分析的作用不止是安全校核,而是起到了一个积极主动的设计作用。在结构分析的基础上,通过对目标函数(通常以追求工程造价最低为目标)与约束函数(如以满足强度、刚度条件为约束)的综合,产生一个优化结构。事实上,在建筑工程的设计阶段,当满足建筑的诸多功能后,工程造价的控制是每个投资者最为关注的内容,也自然成为投资者评价设计质量优劣、衡量设计水平、选择设计单位的重要标准。为了在日益激烈的设计市场竞争中求得生存与发展,为业主提供优质的设计产品,每一个设计单位都将提高设计产品经济性作为其努力追求的目标。由于在建筑产品中结构造价所占的比重很大,对建筑结构的优化设计,不仅能够提高建筑物的安全度,而且能够有效降低工程造价,从而实现投资效益的最大化。在建筑结构设计过程中,当建筑方案产生后,从选型和布置开始就存在结构优化与否的问题,再加上后续工序的精心设计、准确计算、合理选用等全过程的优化设计才能产生优化的结构。

结构优化设计的全过程一般可概括为:建立优化设计的数学模型,选择合适的优化方法,通过计算机进行分析处理,并获得最优解。结构优化设计把力学概念和最优化技术进行了有机结合,在结构设计中起到了很大的积极作用,提高了结构设计的质量和水平,获得了显著的经济效益和社会效益。但结构优化设计在发展速度、应用广度、研究深度等方面远落后于结构分析的有限元法,还有大量的工作要做。

§ 1.2 现代结构的特征

现代结构的特点是满足人们对建筑功能更高的要求,这些建筑功能不仅是建筑高度的增加、桥梁跨度的增加和新型结构体系的增加,而且更多地体现在“绿色”的可持续发展方面。

现代结构工程的发展必须满足社会、人和自然的协调发展。现代的高层结构、桥梁结构、空间结构并不是一味地追求高、宽、大,而是更强调“功能需要”、“节约能源”与“环境友好”。为此,工程师需要在总体构思上考虑美学和可持续发展理念,同时应用力学概念和体系优化构建结构的框架,在这个结构的优化设计过程中,需要融汇结构的分解与集成,将复杂的整体结构化简为三维框架结构、二维平面子结构,甚至是一维线性或非线性构件,对它们的尺寸、形状乃至拓扑进行优化并集成为高耸、大跨度、空间等不同功能的现代结构。

现代结构的主要特征如下:

(1) 高耸。

由于城市用地的限制,高耸或高层建筑已成为今后的一个发展方向,如上海环球金融中心(101层、492 m)和上海金茂大厦(88层、420.5 m),如图 1-1 所示。在超高层结构的优化设计中,除了众所周知的地震响应以外,结构在与建筑高度成量级增加的风载荷作用下的安全性也是设计中的难点。

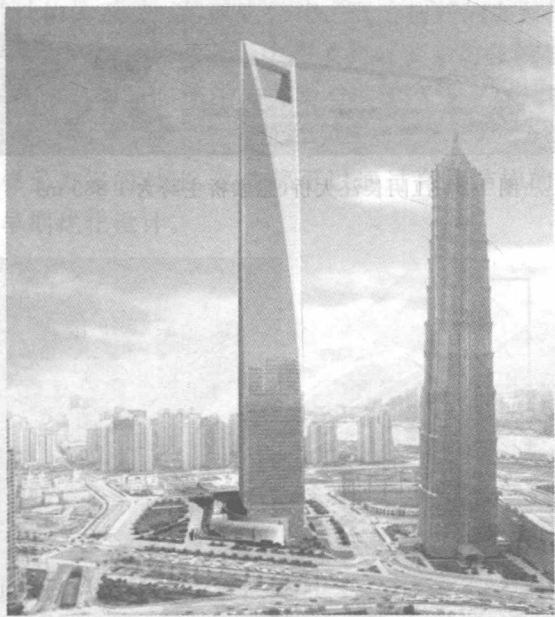


图 1-1 上海环球金融中心(左)和上海金茂大厦(右)

(2) 大跨度。

纵横的江河大川使我国成为大跨桥梁较为集中的地方。我国的大跨桥梁形式一般为斜拉桥、悬索桥和各类拱式桥。如已建成的江阴长江大桥,其悬索桥主跨为 1 385 m,如图 1-2 所示;上海卢浦大桥(见图 1-3)和重庆朝天门长江大桥,均为钢结构拱桥,跨度分别为 540 m 和 552 m,位列目前世界大跨度拱桥前列。随着桥梁跨度的增加,风振、地震以及结构体系的其他动力与稳定问题都将日益突出,成为结构优化设计和灾害防范要考虑的主要问题。

(3) 新颖。

随着 21 世纪的大规模建设,各类面向新世纪需求的新颖结构也层出不穷。新颖结构的特点是体态的奇特和受力的复杂,目前尚缺乏现成有效的力学分析计算方法和设计规范,结构的工作性态难于预测和控制,这也为结构的优化设计带来更多的困难。

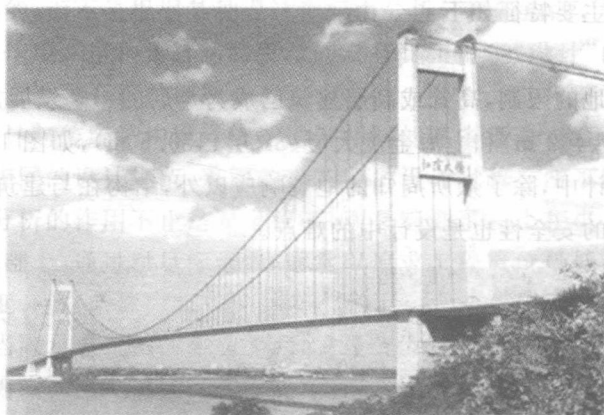


图 1-2 江阴长江大桥(悬索桥主跨为 1 385 m)

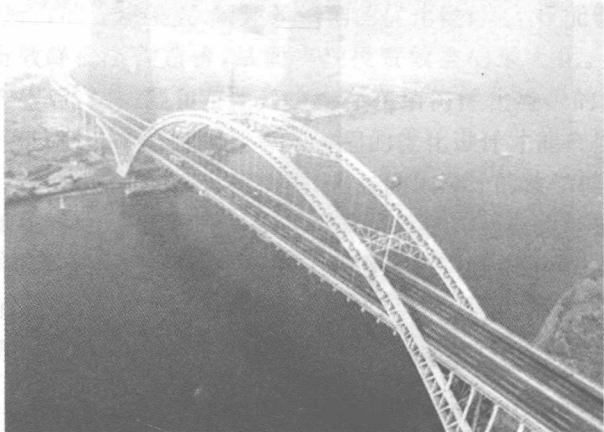


图 1-3 上海卢浦大桥(拱桥跨度 540 m)

(4) 绿色。

现代结构除了上述传统意义上的高、宽、大等特征外,更重要的是在建筑结构设计 and 施工中强调“绿色”的理念,即在建筑结构设计和施工中注重节能、节材、节水、节地和环保的设计理念。国家强制出台的建筑节能要求就是现代结构设计中必须考虑“绿色”设计理念的一项具体体现。

§ 1.3 选择合理的结构方案

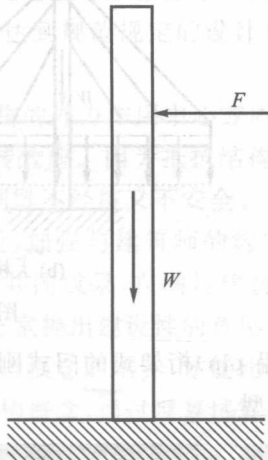
21 世纪出现了大量的超高层建筑、超大跨桥梁和各类新颖特殊结构,在结构的设计过程中,进行理性的结构优化设计,选择合理的结构方案,对节省造价与提高安

全性是十分必要的。而优化设计的前提是分析考虑它们在各种工况(如风载荷、地震载荷以及自重)下的工作性态,这对于大型复杂结构是极其复杂和具有挑战性的。但只要能抓住结构的基本力学特点,抓住主要问题,将复杂结构用合理的力学模型简化分析,就可以在结构的设计阶段通过简化计算方法定量分析并比较各种设计方案,提出相对最优的设计方案,达到事半功倍的效果。

对高耸结构,可以在结构的早期设计阶段将其整体简化为悬臂梁结构,进行各种受力分析,比较各种结构体系、外形,确定结构主受力构件的大致尺寸,估算不同结构体系的造价,图 1-4 所示为上海环球金融中心及其悬臂梁简化模型。例如,钢筋混凝土结构方案与钢结构方案的对比,筒结构方案与框架结构方案的对比,平面布置时体形简单的矩形方案与体形复杂的工字形方案的对比,立面布置时上下相同的长方体方案与上小下大的梯形方案的对比,这些都可以通过高耸结构的简化结构——悬臂梁进行结构整体的早期优化设计。



(a) 上海环球金融中心

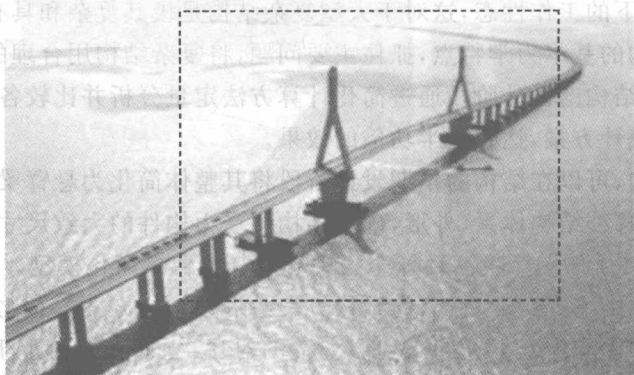


(b) 悬臂梁简化模型

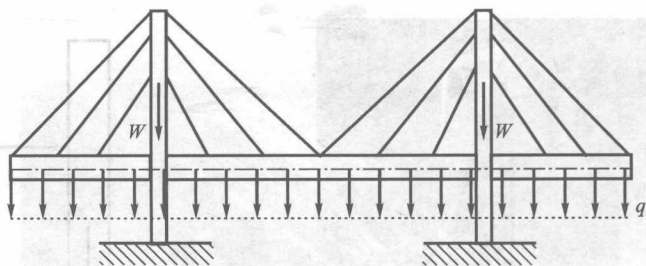
图 1-4 上海环球金融中心及其悬臂梁简化模型

对于大跨结构,特别是大跨桥梁,可以在结构的早期设计阶段将其整体看成简支梁或连续梁,进行各种受力分析,优化结构主受力构件的尺寸,估算不同结构体系的造价。如采用简支梁方案还是连续梁方案,采用钢筋混凝土结构还是钢结构,最终得到的建筑结构在造价和造型上都有很大差异。图 1-5 为上海东海大桥及其主航道斜拉桥的简化模型。

对一些新颖的空间结构,可以在结构的早期设计阶段将整体结构简化为多个子结构的组合结构,通过对子结构(或称为主构件)进行分析与优化设计,确定子结构的大致尺寸、材料,并估算其造价。图 1-6 为北京奥林匹克主场馆“鸟巢”的钢结构及其子结构简化模型(门式刚架)。从图 1-6(a)可见,“鸟巢”实际上是由 48 榀(屋架的一



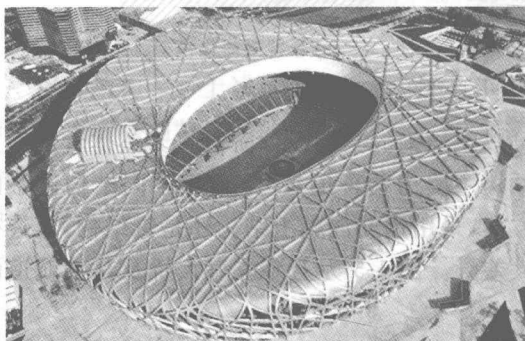
(a) 上海东海大桥外貌



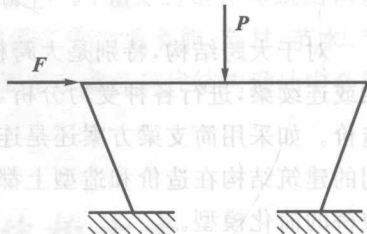
(b) 大桥主航道斜拉桥的简化模型

图 1-5 上海东海大桥

个叫一榀，榀 pǐn) 桁架式的门式刚架绕屋面椭圆开口旋转而成，图 1-6(b) 为门式刚架的简化模型。



(a) “鸟巢”主场馆



(b) 简化模型——门式刚架

图 1-6 北京“鸟巢”主场馆的钢结构及其子结构简化模型(门式刚架)

在整体简化分析与优化基础上，再对结构的子结构(或构件)进行更精细的优化

设计,逐步完成结构的完整优化设计。结构设计方案的优劣决定了结构设计的成败。对于同一个建筑设计方案,结构设计方案往往不是唯一的。不同的结构方案会使工程造价和工程质量产生很大的差别,所以选择合适的结构设计方案便显得尤为重要。在结构设计方案的选择上,应遵循以下基本原则,这些原则构成了结构优化设计的设计条件:

(1) 要用整体的概念在特定的建筑空间中完成结构总体方案的构思,处理好构件与结构、结构与结构的关系,充分利用和发挥整体结构和构件的最佳受力状态,使结构具备足够的承载力、刚度和良好的延性。

(2) 尽可能使结构的受力与传力途径简单、直接、明确。传力途径复杂会出现多次转换的结构构件,这样会导致造价的提高,也容易出现计算错误产生安全问题。采用最简单、最直接的传力途径,可以省去中间传递的结构构件,减少结构的安全风险,使结构受力更加明确,其造价也相对经济。

(3) 保持整个结构安全可靠度的协调一致性。应通盘考虑整体结构的每一个构件,使结构构件能够协调一致发挥其最大效能,确保达到规范规定的设计目标水准,实现结构既经济又安全的目标。

(4) 使结构平面布置的抗侧力刚度中心与建筑物的外力作用中心或质量重心尽量接近或重合,以避免或减小外力作用下的结构扭转效应。因为抵抗结构的扭转所需增加的材料用量很大,所以结构平面布置的不规则既不经济又不安全。

(5) 积极主动地参与建筑设计的方案设计阶段,加强与建筑师的沟通与协调。一个设计精品是建筑师和结构工程师创造性合作的共同成果,在满足建筑物的功能和建筑师创意的前提下,结构工程师有责任对建筑方案提出建设性的意见,与建筑师一起构思最佳的结构体系。结构工程师只有加强结构概念的培养,才能比较客观、真实地理解结构的工作性能。并综合运用其掌握的结构概念,通过反复试算、反馈和优化,选择效果最好、造价最低的结构方案。

§ 1.4 结构优化设计的相对性

结构优化设计方法和技术的应用具体体现在建筑工程总体结构的优化设计和建筑工程分部结构的优化设计两方面。以房屋工程结构为例,分部结构优化设计包括:基础结构方案的优化设计、屋盖系统方案的优化设计、围护结构方案的优化设计和结构细部方案的优化设计。对以上几个方面的优化设计还包含选型、布置、受力分析、造价分析等内容,并应在满足设计规范和使用要求的前提下,结合具体工程的实际情况,围绕其综合经济效益的目标进行结构优化设计。

在实际中,结构工程所使用材料的属性只能估算,无法准确得知;所计算的真实

结构只能近似分析,无法准确建模;所承受的载荷只能估算,无法准确确定;但是,所完成的结构设计必须满足公众对建筑安全使用的要求。因此,结构工程是技术(力学与优化设计)与艺术(美学)的结合,也就是说,建筑设计不但需要结构工程师通过技术的手段保证设计的经济与安全;同时也需要建筑师通过艺术的手段保证设计的美学创意和使用功能。

由此可见,结构设计没有唯一正确的设计方案,只有相对满意的设计方案。同时在结构设计过程中需要估算材料特性、估计可能发生的各种外部载荷、近似分析结构模型,保证结构的安全和满足使用功能的要求。这也说明了结构设计从头至尾都是一种“概念设计”,所谓的结构“概念设计”就是根据力学原理和实际功能需要抽象简化整体结构系统和子结构系统,并对其进行简单合理的受力分析,从而达到对结构的设计进行力学优化,如图 1-4~图 1-6 所示的简化模型。在现代结构设计中,要求设计师在结构设计的早期就能从优化设计角度提出好的结构体系和结构概念,好的结构概念和设计方案可以保证结构的整体设计方案的可行性,再通过进一步的结构优化设计,使建筑结构更加安全,建筑造价更为经济,从而达到力学与美学的完美结合。因此,作为一个结构优化设计的完成者必须具有这种“概念设计”的理念,理解结构设计概念和体系对学好用好结构优化设计技术很有必要。

随着一体化计算机结构设计程序的不断完善和全面应用,把结构工程师从繁重复杂的结构计算中解脱出来。工程师可以在概念、经验和估算的基础上借助计算机进行可靠的分析计算,经过多次计算比较和调整,使结构设计更加合理和经济。但在利用计算机设计程序进行结构优化设计时,要注意以下问题:

(1) 不能盲目依赖计算机。因计算软件的缺陷和设计人员不加分地盲从而导致设计错误的现象时有发生,所以对用于结构设计的计算程序的基本理论假定、应用范围和限制条件以及程序与规范的结合一定要搞清楚。

(2) 对于输入的几何图形、构件尺寸、载荷数据等应认真核对、力求准确无误,避免因数据输入错误造成计算分析结果的错误或较大的误差。比如,高层建筑标准层载荷数据的输入出现错误,其累加后对结构计算所产生的影响是不容忽视的,将导致计算结果要么不安全、要么不经济。

(3) 对计算参数的选取要正确、合理。选取不同的计算参数会得出完全不同的计算结果,要根据实际结构的具体情况和计算程序的功能要求合理选取。

(4) 注意实际结构与计算模型的差异。所有的计算理论和设计程序都是建立在一些假定和理想的计算模型之上的,而实际结构的受力状态又是千差万别的,一味地依赖计算机或计算手册的计算结果进行结构设计会给结构留下较多的隐患,所以任何构件的计算都应根据实际情况确定结构的约束关系,并利用结构概念、工程经验对计算结果进行分析,判断其是否合理,以确保最终结构设计的正确。

(5) 正确理解运用规范。规范是我们在设计中必须遵循的“最低”标准,是国家

的技术经济政策、科技水平和工程实践经验的总结。全面理解规范条文的概念、定义、前提条件和适用范围,是正确运用规范的前提和基础。作为一个结构工程师,一方面必须熟悉、理解和吃透规范条文的真实含义,另一方面必须客观理性地正确对待规范。对规范中的“强制性条文”要不折不扣地执行,而对规范中的“非强制性条文”,工程师可以运用自己的理论知识、结构概念和实践经验,在规范条文思想的指导下,针对具体的设计对象、环境和使用条件,以工程的安全性和经济性为目标,创造性地灵活选用规范中的数据。

§ 1.5 结构性态和设计原则

1.5.1 结构性态和能量原理

要保证结构物的使用功能就必须保证结构物在外界干扰下形态完整,也就是保证结构物在各种外部载荷作用下不失效。而结构的安定性可以通过结构在载荷作用下的性态(包括:应力、能量、稳定等方面)来评定。结构的各种工作性态反映了一种物质的运动形式,与蕴藏在结构内部的某种能量变化相关,结构的真实状态往往反映了某种能量的极值状态。也就是说,可以通过研究结构能量的变化来确定结构的受力性态。这在处理结构的强度、刚度、稳定与动力等复杂问题时,无疑是十分有用的。

1) 结构静力平衡与最小总势能原理

结构受到外载荷作用后,内部产生应力与应变,外部产生位移。应力、应变使结构内部产生应变能,而外载荷在结构外部位移上做功,则弹性结构相对未变形位置的总势能 Π 为:

$$\Pi = U - \sum P_i \delta_i \quad (1-1)$$

式中 U ——结构的应变能;

$\sum P_i \delta_i$ ——外力在位移上所做的功。

若将应变能表示成 $U = U(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, 则结构处于静力稳定平衡状态下的充分必要条件为:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} - P_i = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \delta_i^2} > 0 \quad (1-2)$$

式(1-2)即为结构的最小总势能原理表达式。

另一方面,对于一个处于平衡状态的弹性结构,其内力与外力对任意给定的虚位移所做的总虚功等于零,即