高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版 • 吕林根、许子道主编

九章丛书

# 解析几何

（第四版）

## 同步辅导及习题全解

主 编 王曙东

- 同步学习指导 • 解题技巧剖析
- 考研真题精解 • 课后习题全解

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

新版

高校经典教材同步辅导丛书

# 解析几何（第四版）同步辅导及习题全解

主　编　王曙东

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

## 内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版，吕林根、许子道主编的《解析几何》（第四版）配套的同步辅导及习题全解辅导书。

本书共有六章，分别介绍向量与坐标、轨迹与方程、平面与空间直线、柱面/锥面/旋转曲面及二次曲面、二次曲线的一般理论、二次曲面的一般理论。全书结构按教材内容安排，各章涉及知识点归纳、典型例题解析、考研知识拓展、考研题目链接、教材习题解答五部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽、简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习“解析几何”课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课、命题时参考。

图书在版编目（CIP）数据

解析几何（第四版）同步辅导及习题全解 / 王曙东主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2012.9
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-0176-8

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①解析几何－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第221256号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：张玉玲　加工编辑：李　燕　封面设计：李　佳

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 高校经典教材同步辅导丛书<br>解析几何（第四版）同步辅导及习题全解 |
| 作　　者 | 主　编　王曙东 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038）<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：mchannel@263.net（万水）<br>sales@waterpub.com.cn<br>电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水） |
| 经　　售 | 北京科水图书销售中心（零售）<br>电话：（010）88383994、63202643、68545874<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 北京万水电子信息有限公司 |
| 印　　刷 | 北京市梦宇印务有限公司 |
| 规　　格 | 170mm×227mm　16 开本　13 印张　300 千字 |
| 版　　次 | 2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷 |
| 印　　数 | 0001—6000 册 |
| 定　　价 | 15.80 元 |

# 前 言

吕林根、许子道主编的《解析几何》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出等特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《解析几何(第四版)同步辅导及习题全解》。本书旨在帮助读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到“解析几何”这门课程的特点,我们在内容上做了以下安排:

**1. 知识点归纳。**对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确、有的放矢。

**2. 典型例题解析。**该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,意在抛砖引玉。

**3. 考研知识拓展。**整理历年考研常考知识点。

**4. 课后习题解答。**教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出了详细的解答。

由于时间仓促及编者水平有限,书中难免有疏漏之处,敬请各位同行和读者批评指正。

**编　者**

2012 年 8 月

# 目录

contents

# 目录

contents

# 第一章

# 向量与坐标

## 知识点归纳

### 1. 基本概念

向量：既有大小，又有方向的量，或称为矢量. 一般用有向线段表示向量.

向量的模：向量的大小，记作$|\boldsymbol{a}|$.

零向量：长度为 0 的向量，记作$\mathbf{0}$，方向不定.

单位向量：模等于 1 的向量，任何非零向量都可以变成单位向量，$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$就是$\boldsymbol{a}$的单位向量.

反向量：模相等而方向相反的向量，向量$\boldsymbol{a}$的反向量记作$-\boldsymbol{a}$.

共线向量：平行于同一直线的一组向量. 规定零向量与任何共线的向量组共线.

共面向量：平行于同一平面的一组向量. 规定零向量与任何共面的向量组共面.

### 2. 向量的运算

(1)向量的加法

对于向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作有向线段$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，将$\overrightarrow{AC}$表示的向量$\boldsymbol{c}$称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 1.1 所示)，即$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，求向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的运算叫做向量加法.

由此公式确定的向量加法法则称为三角形法则.

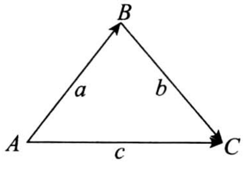


**图 1.1**

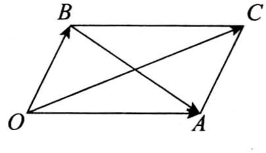


**图 1.2**

若以两个向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$为邻边组成一个平行四边形 $ABCD$，那么对角线向量$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，这种求两向量和的方法叫做平行四边形法则，如图 1.2 所示.

(2)向量的减法

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则将向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的运算叫做向量减法.

**向量加法的运算规律：**

①$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)；

②$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律)；

③$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

④$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

⑤$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|$.

(3)向量与数量的乘法

实数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记做 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda>0$ 时，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当$\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相反，这种运算为向量与数量的乘法，简称数乘.

**数乘运算的运算规律：**

①$1\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

②$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$(结合律)；

③$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(第一分配律)；

④$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(第二分配律)；

⑤$\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(4)向量与向量的数量积

两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们夹角的余弦的乘积叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称内积)，记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

**向量的数量积的运算规律：**

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)；

②$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$(结合律)；

③$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律)；

④$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{0}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$；

⑤$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\text{射影}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\text{射影}_b\boldsymbol{a}$；

⑥$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

⑦$\cos\angle(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$.

(5)两向量的向量积

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(也称外积)是一个向量，记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，并且按 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手标架$\{0;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$.

**两向量向量积的运算规律：**

①$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$(反交换律)；

②$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；

③$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$(分配律)

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量 $\lambda,\mu$ 为任意实数.

(6)三向量的混合积

给定空间的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，若先作前两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，再作所得的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 的数量积，最后得到的这个数叫做三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 或 $(\boldsymbol{abc})$.

**三向量混合积的运算规律：**

①$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})=-(\boldsymbol{bac})=-(\boldsymbol{cba})=-(\boldsymbol{acb})$；

②$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

(7)三向量的双重数量积

给定空间三向量，先作其中两个向量的向量积，再作所得向量与第三个向量的向量积，那么最后的结果仍然是一个向量，叫做所给三向量的双重向量积，记为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个任意向量.

双重向量积的运算性质

①$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$；

②$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}^1\times\boldsymbol{b}^1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^1\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^1\end{vmatrix}$(拉格朗日恒等式)，

特别地 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$；

③一般情况下，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

### 3. 向量的线性关系

(1)向量的线性组合.

由向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 与实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所组成的向量

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$$

叫做向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合，也称 $\boldsymbol{a}$ 可用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示，或者说，向量 $\boldsymbol{a}$ 可分解成 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合.

(2)向量的线性相关与线性无关.

对于 $n(n\geqslant1)$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，如果存在不全为零的 $n$ 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=0$，

那么 $n$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 叫做线性相关，否则叫线性无关，即向量 $\boldsymbol{a}_1.\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关，当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

(3)向量的共线

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关，即 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$($\lambda,\mu$ 不全为 0)

$\Leftrightarrow$其中一个向量可用另一个向量线性表示，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$.

(4)三向量共面的条件

三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关，即 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$($\lambda,\mu.\nu$ 不全为 0)

$\Leftrightarrow$其中一个向量可用另外两个向量线性表示.

即 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{a}$ 不平行于 $\boldsymbol{b}$).

**4. 向量的坐标**



标架:空间中和一个定点 0,连同三个不共面的有序向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的全体,叫做空间中的一个标架,记作$\{0;\boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$.

笛卡尔标架:如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_3$ 都是单位向量,那么$\{0;\boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$叫做笛卡尔标架.

笛卡尔直角标架:$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 两两相互垂直的笛卡尔标架叫笛卡尔直角标架,简称直角标架.一般情况下$\{0;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$叫做仿射标架.

向量的坐标:在空间中取定点 0,从 0 引出三个不共面的向量$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{OE_3}=\boldsymbol{e}_3$,则空间中任何向量 $\boldsymbol{r}$ 都可以分解成 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合.

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$

且这里的 $x,y,z$ 是唯一的一组有序实数,称 $x,y,z$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 关于标架$\{0;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的坐标,记作 $\boldsymbol{r}\{x,y,z\}$或$\{x,y,z\}$.

**5. 向量运算的坐标表示**

(1)向量的和差

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$

①$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$;

②$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3\}$.

(2)两向量的数量积

①设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

②$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

(3)两向量的向量积

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$

①$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right\}$;

②$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线$\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

(4)三向量的混合积

若 $\boldsymbol{a}=\{x_1.y_1.z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2.y_2.z_2\},\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

①则$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$;

②$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}=0$.

**6. 向量的射影**

(1)向量在轴上的射影向量：

设向量$\overrightarrow{AB}$的始点$A$和终点$B$在轴$l$上射影分别为点$A'$和$B'$，那么向量$\overrightarrow{A'B'}$叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴$l$上的射影向量，记作射影向量$_l\ \overrightarrow{AB}$. 如图 1.3 所示.

(2)向量在轴上和射影：

若在轴上取与轴同方向的单位向 $\boldsymbol{e}$，则射影向量$_l\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}$，这里的$x$叫做向量$\overrightarrow{AB}$在轴$l$上的射影，记作射影$_l\ \overrightarrow{AB}=x$.

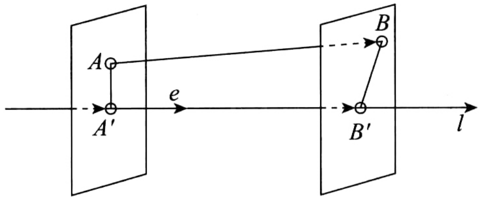


**图 1.3**

(3)射影定理：

向量$\overrightarrow{AB}$在轴$l$上的射影等于向量的模乘以轴与该向量的夹角的余弦，即射影$_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\theta,\theta=\angle(l,\overrightarrow{AB})$.

(4)①对于任何向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有，射影$_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$射影$_l\boldsymbol{a}+$射影$_l\boldsymbol{b}$；

②对任何向量 $\boldsymbol{a}$，实数 $\lambda$，都有射影$_l(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\cdot$射影$_l\boldsymbol{a}$.

**7. 重要定理和结论**

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\},\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

(1)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线$\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\lambda$ 为实数，$\boldsymbol{a}\neq 0$)

$$\Leftrightarrow\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}(\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

(2)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

$$\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

(3)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$

$$\Leftrightarrow\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=0(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

(4)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

(5)非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\quad\cos\beta=\frac{y_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\quad\cos\gamma=\frac{z_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

(6) $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

(7) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}.$$

(8) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体体积

$$V=|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

(9) 两点距离公式：空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

(10) 定比分点公式：设有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的起点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，如图 1.4 所示，则分有向线段 $P_1P_2$ 成定比 $\lambda$ $(\lambda\neq-1)$ 的分点 $P$ 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

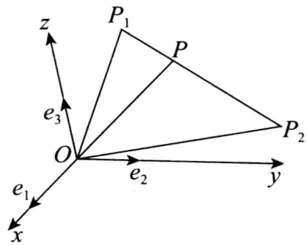


图 1.4

## 典型例题解析

### 一、向量的线性运算在几何证明中的应用

**例 1** 证明四面体对边中点的连线交于一点且互相平分.

**思路分析** 证明线段共点问题可设法先证明其中一条线段通过该点，再证该点必在另一线段上或者在各条线段上找出该点，再证明该点重合即可. 本题中可先找出对边连线的中点，再由向量的线性运算性质证明其重合.

**证　明** 如图 1.5 所示，连结 $AB$. $CD$ 边中点 $E$. $F$，取中点 $P_1$，连接 $AF$，设其余两对边中点连线的中点为 $P_1,P_2$.

即 $AP_1$ 为 $\triangle AEF$ 的中线.

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}).$$

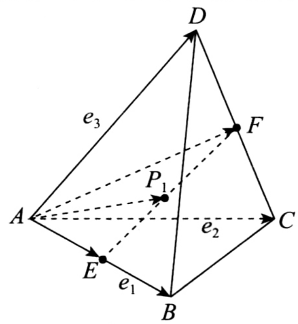


图 1.5

$AF$ 为$\triangle ACD$的中线，那么

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

由 $E$ 为 $AB$ 边中点可得 $AE=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

从而 $$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\right]=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

由于$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$不共面，因此不妨设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_3$,

则 $$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

同样的方法可证得$\overrightarrow{AP_2}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$,$\overrightarrow{AP_3}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$.

故$\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AP_3}$. 即 $P_1$, $P_2$, $P_3$ 重合. 从而原命题得证.

**例 2** 如图 1.6 所示，在四面体 $ABCD$ 中，设 $E$ 为棱 $AD$ 的中点，$G$ 是$\triangle BCD$的重心，$F$ 是 $AG$ 上的一点，且$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$，试证明 $B,C,E,F$ 四点共面.

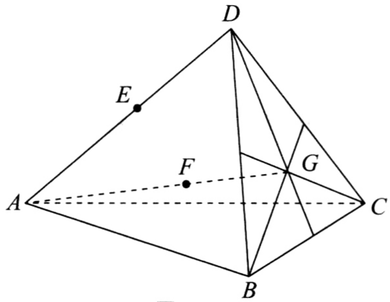

图 1.6

**思路分析** 方法一

点共面的问题可转化为其所构成向量的共面问题，利用向量共面的充要条件，结合向量的线性运算，可以快捷地证明此类问题.

**证　明** 由$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

因此 $$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

而
$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BE})\cdot\overrightarrow{BF}\\
&=\left[(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\right]\cdot\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\\
&=-\frac{3}{8}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})-\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\\
&=0\end{aligned}$$

因此$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{BF}$共面，即 $B,C,E,F$ 四点共面.

**思路分析** 方法二　在处理有关向量的问题时，如果采用坐标运算，往往可取得事半功倍的效果，在证明题中，可建立适当的坐标系，证明几何问题.

**证　明** 取仿射坐标系$\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$则

$$A(0,0,0),B(1,0,0),C(0,1,0)D(0,0,1),E\left(0,0,\frac{1}{2}\right).$$

由$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$得，$G$坐标系为$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

由$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$得，$F$的坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

因此$\overrightarrow{BC}=\{-1,1,0\}$，$\overrightarrow{BE}=\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$，$\overrightarrow{BF}=\left\{-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\}$.

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF})=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=0.$$

即$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BF}$共面，故$B,C,E,F$四点共面.

## 二、向量的数量积在几何计算中的应用

**例3** 计算下列各题

(1) 已知$\triangle ABC$的边长分别为3,4,5，且$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 已知$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$与$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$垂直，且$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$与$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$垂直，求$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角.

(3) 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{3}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=5\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，问$\lambda$取何值时，$\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{q}$.

**解题过程** (1) 由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{0}^2=0$得.

$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

因此$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2)=-25$.

(2) 由$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0,\\(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}3\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(-4\boldsymbol{b}^2)=0,\\3\boldsymbol{a}^2-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2=0.\end{cases}$$

联立求得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{b}^2}{12},|\boldsymbol{a}|=\frac{\sqrt{11}}{3}|\boldsymbol{b}|.$$

因此
$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{\boldsymbol{b}^2}{12}}{\sqrt{\frac{11}{3}}\boldsymbol{b}^2}=\frac{1}{4\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{44}.$$

所以
$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\arccos\frac{\sqrt{11}}{44}.$$

(3) $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

而
$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}&=(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\\&=15\boldsymbol{a}^2+(3\lambda-5)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{b}^2\\&=15+\frac{3}{2}(3\lambda-5)-9\lambda\\&=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}\lambda\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=0$ 得 $\lambda=\frac{5}{3}$. 所以当 $\lambda=\frac{5}{3}$ 时，$\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{q}$.

## 三、向量运算在平面三角形中的应用

**例 4** 证明三角形的正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

**思路分析** 可以利用三角形面积这一恒等量作切入点，将三角形边和角联系起来的运算可以采用向量的向量积运算.

**证 明** 如图 1.7 所示，设 $|\overrightarrow{BC}|=a,|\overrightarrow{AC}|=b,|\overrightarrow{AB}|=c$,

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A\\&=\frac{1}{2}bc\sin A.\end{aligned}$$

同样 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

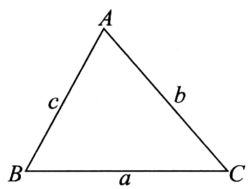

图 1.7

即 $bc\sin A=ac\sin B=ab\sin C$. 由于 $a>0,b>0,c>0$,

方程和项同时除以 $abc$，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

## 四、向量的综合运用

**例 5** 利用向量法证明柯西一施瓦茨不等式.

$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right)$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 时等号成立(设 $a_i\neq0,b_i\neq0,i=1,2,3$).

**证 明** 在直角坐标中. 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$. $\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

而$-1\leqslant\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\leqslant 1$，则$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，

即
$$\left|\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right|\leqslant\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}\right|\cdot\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^2}\right|,$$

两边平方得
$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right).$$

当$|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|=1$，即$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线时，等号成立.

而$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线.

因此，当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$时等号成立.

# 考研知识拓展

## 一、重点难点梳理

考研试题中单独针对本章的题目并不多，大多都是结合直线，平面以及二次曲线的问题综合考查. 考研中涉及到本章的常考知识点主要是向量运算法则以及向量和几何应用.

### (一)向量运算法则

**1. 加法与数乘**

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha},(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$$
$$\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha},(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$$
$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$$
$$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$$

**2. 数量积**

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}\quad(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}\quad(\lambda\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}=\lambda(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$$

**3. 向量积**

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}\qquad(\lambda\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta}=\lambda(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})$$
$$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}\qquad\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha}=0$$

**4. 混合积**

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0.$$
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$$
$$(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$$

## (二)向量的几何应用

### 1. 加法与数乘

(1)过点 $P_0$,方向向量为 $\boldsymbol{s}$ 的直线的向量方程是(如图 1.8 所示)

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\boldsymbol{s}$$

(2)过点 $P_0$,与 $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$($\boldsymbol{u}_1$ 不平行于 $\boldsymbol{u}_2$)都平行的平面的向量方程是

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t_1\boldsymbol{u}_1+t_2\boldsymbol{u}_2.$$

(3)任意非零向量 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$,其中 $\boldsymbol{a}^0$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量(如图 1.9 所示).

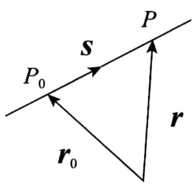


图 1.8

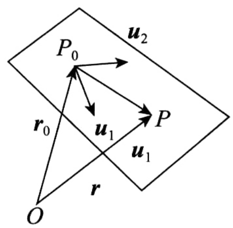


图 1.9

### 2. 数量积

(1)求模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$,进而可求两点距离.

(2)求向量夹角,进而可求两条直线,直线与平面,两平面之间的夹角.

(3)判定垂直:$\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}=0$,进而可证直线,平面之间的垂直与平行关系.

(4)求点到平面的距离.

(5)建立平面方程(点法式):$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$.

### 3. 向量积

(1)求平行四边形或三角形的面积:$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 或 $S=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$,进而可求点到直线的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$.

(2)求两平面交线的方向向量.设这两个平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$,则交线 $L$ 的方向向量可取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

(3)判断平行: $\boldsymbol{\alpha}_1/\!/\boldsymbol{\alpha}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2=0$