奥林匹克教学辅导丛书

高中数学竞赛基础教程

陈传理　主编

第三册

GAO ZHONG SHU XUE JING SAI JI CHU JIAO CHENG

华中师范大学出版社

奥林匹克数学辅导丛书

高中数学竞赛基础教程

第三册

陈传理　主编

朱翠荣　刘中枢　徐子佑

陈志云　梅全雄　郭熙汉　编

裴光亚

华中师范大学出版社

奥林匹克数学辅导丛书
高中数学竞赛基础教程
第三册
陈传理　主编
朱翠荣　刘中枢　徐子佑
陈志云　梅全雄　郭熙汉　编
裴光亚
*
华中师范大学出版社出版发行
（武昌桂子山）
新华书店湖北发行所经销
湖北省石首市第二印刷厂印刷
*
开本787×1092　1/32　印张10　字数227千字
1991年6月第1版　1991年6月第1次印刷
ISBN 7-5622-0673-2/G·221
印数：1—30 500　定价：3.80元

出版说明

国际数学、物理、化学、计算机奥林匹克是世界上规模和影响最大的中学生学科竞赛活动。这项活动为各国表现本民族的聪明才智提供了合适的舞台，因而，受到越来越多的国家的重视。几年来，我国中学生在这项活动中获得了优异成绩，震惊中外。为了使中小学生开阔视野、启迪思维、发展才能，进一步推动中小学奥林匹克竞赛活动的普及开展，为了促进中小学教育的深化，为我国科学技术的腾飞做好准备，我社特约请一批热心奥林匹克事业的专家教授和中小学教师编写了这套《奥林匹克教学辅导丛书》。

这套丛书包括有数学、物理、化学、计算机、外语等五门学科。其中，中小学数学奥林匹克教学辅导书5册已经正式出版，物理、化学、计算机和外语等中小学奥林匹克教学辅导书也将陆续出版。本丛书的作者都是首批《中国奥林匹克高级教练员》和湖北省奥林匹克优秀教练员，他们为我国奥林匹克事业和湖北省的竞赛活动作出了富有成效的工作，这套丛书也是他们长期辅导学生经验的总结。每册均编有各层次的奥林匹克讲座和训练，内容翔实，是一套较好的奥林匹克教学辅导书，我们希望这套丛书能成为青少年学习的良师益友。

出版这样的丛书我们还是初步尝试，为了进一步充实完善，衷心希望广大读者提出建议和意见。

前　言

近几年来，我国选手在国际数学奥林匹克中成绩日益突出，今年又以“五金一银”的成绩雄居世界第一，这极大地鼓舞了全国广大中学师生。毫无疑问，数学竞赛活动将在我国更广大的范围内旷日持久地深入开展下去。

大多数准备参加数学竞赛的中学生主要是利用课余时间来进行数学竞赛方面的训练。实践证明，为了使数学竞赛训练富有成效，对于参加竞赛必须掌握的数学知识和方法要灵活处理。有些内容要在学习中学数学教材的基础上同步加深；有些内容则应适当超前学习；对那些中学数学以外的竞赛内容则必须恰当地补充。为了保证训练的系统性，避免盲目性和随意性，编写一套合适的训练教材是必不可少的。这些年来我们在数学竞赛培训工作中，对竞赛训练的形式和训练教材的实用性作了一些探索和试验，在此基础上编写了这套《高中数学竞赛基础教程》。

这套书共分三册。第一册基本与高一数学内容对应，另外增添了“计数”一章，目的是从计数角度介绍组合的一些基本知识和方法，以便在以后各章中渗透组合思想方法。第二册与高二数学内容对应，既可与高二数学教学同步使用，也可在适当参考高二数学课本的基础上超前学习。第三册包括“初等数论”，“平面几何”，“几个典型问题”，“几个重要方法”四章，系统介绍了高中数学教材以外的竞赛内容和解答数学竞赛题的思想方法，读者可以根据自己的实际情况，在学习第一册、第二册的同时，穿插学习第三册内容。

全书内容前呼后应，在基本与高中数学教材内容同步的前提下加强了横向渗透，通过纵横联系的网络形成对高中数学竞赛内容和方法的较全面的覆盖。全书强调基础，着眼提高，力图具有较广的适用性和较强的针对性。

为了便于各地数学奥林匹克学校和数学培优班的教学，我们将全书各章都分成若干节，每一节就是一次讲座内容，每节材料略多于2小时讲授量，以便教师根据本校实际情况进行取舍。正如一位数学家所言，“学数学的最好办法是‘做数学’”。每节后我们都选编了相当数量的习题供学生练习。书中例、习题绝大多数选自国内外几十年来的优秀竞赛试题，这些题及书后解答闪耀着众多数学专家、教师和学生的智慧之光，是学习数学的极好素材。学生在理解每节内容的基础上再做后面的习题，可以获得参加各级数学竞赛所必需的数学知识、技能和方法，并使解题能力得到长足的发展。

自1978年恢复数学竞赛以来，经过数学界有识之士和广大中学数学教育工作者的努力，使得数学竞赛训练工作在各地都有了一定的基础，为早发现人才和推动数学教育作出了积极的贡献，并且赢得了各级党政部门和社会各界的支持。我们深信我国数学竞赛活动必将取得更加丰硕的成果。我们衷心希望广大有志青少年积极参加到数学竞赛活动中来，把握住机会，脱颖而出，饱饮人类智慧的甘霖，在科学和创造的道路上健康成长，为中华崛起作出应有的贡献。

编　者

1990年12月25日

目　　录

第一章 初等数论

§1.1 整除性问题

利用整数的整除理论中的某些基础知识，如基本概念：带余除法，整除，素数，合数，公因数，公倍数等，以及与这些基本概念有关的基本性质，处理某些整数问题，往往需要较强的分析能力与具备一定的数学素质。正因为如此，整除性的有关问题常常是数学竞赛中涉及的内容之一。从下面几例可以看出，在处理有关整除性问题时，除了要求会熟练地运用某些常用的方法，如分析法、综合法、数学归纳法、反证法、构造法等外，更重要的是要善于分析，要学会抓问题的本质特征。

为了运用的方便，下面列出几个最基本的定理。为节省篇幅，定理的证明过程一律不列出。

定理1（带余除法） 设a、b是两整数且$b \neq 0$，则存在唯一确定的整数q和r，使得

$$a = bq + r,\quad 0 \leqslant r < |b|.$$

其中q和r分别被称为a被b除所得的商和余数。

定理2 设a是任一大于1的整数，则a的大于1的最小正因数q是素数，并且当a是合数时，$q \leqslant \sqrt{a}$。

定理3 若p是素数，$p|ab$，则有$p|a$，或$p|b$。

定理4（裴蜀定理） a、b是两不全为零的整数，$(a, b) = d$（(a, b)表示a与b的最大公因数），则存在整数x、y，

使得

$$ax+by=d.$$

特别地，两正整数 a、b 互素的充分必要条件是存在正整数 x、y，使得

$$ax-by=1.$$

定理5 （1）$(a,b)=(a,b+ka)$，k为任意整数。

（2）$(ac,bc)=c(a,b)$，$c>0$为整数。

（3）若$c>0$是 a、b 的公因数，则$\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{(a,b)}{c}$。

定理6 设a、b、c是任意三个正整数，则

（1）$[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$。　　（2）$(a,b,c)=\big((a,b),c\big)$。

（3）$[a,b,c]=\big[[a,b],c\big]$。（$[a,b]$ 表示a与 b 的最小公倍数）。

定理7 若p为素数，对任意整数a，有$p|a$或$(p,a)=1$。

定理8（算术基本定理） 任一大于 1 的整数 a 都可唯一地表示成素因数的连乘积

$$a=p_1p_2\cdots p_n,\quad p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n \qquad ①$$

其中p_1，p_2，…，p_n为素数。

把①式中相同的素因子写在一起成幂的形式，则得 a 的标准分解式

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},\quad p_1<p_2<\cdots<p_k,$$

$$\alpha_i\geqslant 1,\ i=1,2,\cdots,k.$$

例1 设 S 为整数的非空集合，满足条件：如果x,y在S中，那么差$x-y$也在S中。求证：在S中存在一个整数d，使得S由d的所有倍数组成。

分析 由于此题的结论较具体，因此，要证明结论成立，

可考虑做到两点：①使S中元素相对具体化；②找出一个具体的d. 下面的证明正是依照此思路进行的。

证明 因为S非空且为整数集，显然0满足条件，故$0\in S$. 若$S=\{0\}$，则$d=0$，结论成立。

若$S\neq\{0\}$，则S至少有一个整数$c\neq 0$，由条件：$0-c=-c\in S$，故S中一定含有正整数。将S中全体正整数作成的集合记作S^*，由最小数原理，S^*中有一最小正整数d. 由于$d\in S$，所以$0-d=-d\in S$.

下证对任何整数n，$nd\in S$.

若$n>0$. $d\in S$，$d-(-d)=2d\in S$. 假设$(n-1)d\in S$，则由条件$(n-1)d-(-d)\in S$，即$nd\in S$.

若$n<0$，则$-n>0$，$nd=(-n)(-d)$，由以上证明知$nd\in S$.

若$n=0$，$nd=0\in S$.

再证S中任一元素均可表示为d的整数倍. 任取$h\in S$，设$h=kd+r$, $0\leqslant r<d$，k为整数，若$r\neq 0$，则由$h\in S$，$kd\in S$，知$r=h-kd\in S$，从而与d最小矛盾，故$r=0$，即$h=kd$. 这就证明了结论.

例2 一个大于1的自然数，如果它恰好等于其不同真因子(大于1小于它本身的因子)的积，那么称它为"好的". 求前十个"好的"自然数的和.（第5届美国数学邀请赛试题）

解 设自然数$a>1$，其所有的真因子记作

$$1<d_1<d_2<\cdots<d_k<a$$

由$d_1d_k=d_2\cdot d_{k-1}=\cdots=d_kd_1=1\times a$ 知a若为"好的"，则有$a=d_1d_k=d_1d_2\cdots d_k$，故 $k=2$.

又由定理2，d_1为素数，d_2是d_1的平方或d_2为大于d_1的

素数，若不然，$d_2=c_1c_2$，$1<c_1<c_2<d_2$．则c_1,c_2也是a的真因子，且由d_1为最小素因子知$d_1<c_2<d_2$，与所设矛盾．

因为

$2\times3=6$,	$2^3=8$,	$2\times5=10$,
$2\times7=14$,	$2\times11=22$,	$2\times13=26$,
$2\times17=34$,	$3\times5=15$,	$3\times7=21$,
$3\times3^2=27$,	$3\times11=33$,	$5\times7=35$.

故前十个“好的”正整数为6,8,10,14,15,21,22,26,27,33.

所求的和数为$6+8+10+14+15+21+22+26+27+33=182$.

例3 已知有整系数a_1，a_2，…，a_n的多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

又已知存在四个不同的整数a，b，c，d，使得

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5.$$

证明：没有整数k，使得$f(k)=8$.（加拿大第2届中学生数学竞赛试题）

证明 由已知

$$f(x)-5=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x).$$

其中$g(x)$也为整系数多项式．

假设有整数k，使得$f(k)=8$，则

$$f(k)-5=(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)g(k)=3.$$

因3为素数，从而$k-a$，$k-b$，$k-c$，$k-d$中至少有两个同为-1或同为1，不妨设

$$k-a=k-b,$$

这样得到$a=b$，与题设a、b、c、d互不相同矛盾．

例4 求出使$\dfrac{n-13}{5n+6}$是非零可约分式的最小正整数n.（第

36届美国高中数学考试题）

解 对于正整数n，要使$\frac{n-13}{5n+6}$是非零可约的，必须而且只须$(n-13,\ 5n+6)=d>1$，且$n-13\neq 0$。又

$(n-13,5n+6)=(n-13,5(n-13)+65+6)=(n-13,71)$，所以$d|71$，而71为素数，故由$d>1$知$d=71$。由$71|(n-13)$且$n-13\neq 0$，知最小的正整数$n=71+13=84$。

例5 在任意的十个连续整数中，至少有一个与其余九个数都互素。

分析 由于任何连续的十个数中任两数a、b的差的绝对值满足$0<|a-b|\leqslant 9$ ①．又因为，若素数$p|a$，$p|b$，则$p|a-b|$②，从①②两基本事实出发可寻找此题的证明思路。

证明 在连续的十个整数中，恰有五个数能被2整除；至多有四个数能被3整除，但其中至多只有两个不是偶数；至多有两个数能被7整除，但也至多只有一个不是偶数；恰有两个数能被5整除，但是，仅有一个不是偶数．故在连续的十个整数中，不能被2、3、5、7中任一个整除的数，至少有$10-(5+2+1+1)=1$个，记这个数为a，下证数a与其余的九个数都互素．设b是其余九个数中的任一个，若a、b都有素约数p，则$p||a-b|$，但$0<|a-b|\leqslant 9$，因而p只有可能为2，3，5，7中的某一个。又由于2，3，5，7均不是a的素约数，故又有$p\neq 2,3,5,7$。因此$(a,b)=1$。

例6 已知两个无穷数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \qquad ①$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots \qquad ②$$

它们的元素都是自然数，并且对于$i\neq j$，有$a_i\neq a_j$，$b_i\neq b_j$。

求证：存在两个脚标k、l，且$k<l$，满足$a_k<a_l$，$b_k<b_l$。

分析 因只需证明有两个下脚标$k<l$，满足$a_k<a_l$，$b_k<b_l$。若数列①与②均严格单调上升，则结论自然成立．由此启发我们去寻找①与②的两个严格单调上升的子列

$$a_{k_1},\ a_{k_2},\ a_{k_3},\ \cdots,\ a_{k_i},\ \cdots$$

$$b_{k_1},\ b_{k_2},\ b_{k_3},\ \cdots,\ b_{k_i},\ \cdots$$

使得$k_1<k_2<\cdots<k_i<\cdots$.

证明 由最小数原理，自然数列①中必有最小数a_{k_1}．考虑无穷数列

$$a_{k_1+1},\ a_{k_1+2},\ a_{k_1+3},\ \cdots$$

由最小数原理，此数列中必有最小数a_{k_2}，显然$k_2>k_1$，再考虑无穷数列

$$a_{k_2+1},\ a_{k_2+2},\ a_{k_2+3},\ \cdots$$

由最小数原理，其中必有最小数a_{k_3}，显然$k_3>k_2$，如此继续便得到数列①的一个子列

$$a_{k_1},\ a_{k_2},\ a_{k_3},\ \cdots,\ a_{k_i},\ \cdots \tag{③}$$

适合$a_{k_1}<a_{k_2}<a_{k_3}<\cdots<a_{k_i}<\cdots$，且$k_1<k_2<k_3<\cdots<k_i<\cdots$.

考虑与子列③相应的②的子列

$$b_{k_1},\ b_{k_2},\ b_{k_3},\ \cdots,\ b_{k_i},\ \cdots \tag{④}$$

仿前面反复应用最小数原理，从子列④中可以选出子列

$$b_{k_{i_1}},\ b_{k_{i_2}},\ b_{k_{i_3}},\ \cdots,\ b_{k_{i_j}},\ \cdots \tag{⑤}$$

适合$b_{k_{i_1}}<b_{k_{i_2}}<b_{k_{i_3}}<\cdots<b_{k_{i_j}}<\cdots$，且$k_{i_1}<k_{i_2}<k_{i_3}<\cdots<k_{i_j}<\cdots$.

作出与子列⑤相应的③的子列

$$a_{k_{i_1}},\ a_{k_{i_2}},\ a_{k_{i_3}},\ \cdots,\ a_{k_{i_j}},\ \cdots \tag{⑥}$$

由③是严格单调上升的，知⑥也是严格单调上升的.

取 k 为任意的k_{i_j}，l 为大于k_{i_j}的任意k_{i_t}，显然有$a_k<a_l$，$b_k<b_l$。

从上面两例可以看出，通过分析，若能抓住问题内在的特征，则问题不难得解。

例7 (1) 对于什么样的$n>2$，有n个连续的正整数，其中最大的数是其余$n-1$个数的最小公倍数的约数？

(2)对于什么样的$n>2$，恰有一组正整数具有上述性质？(第22届IMO试题)。

分析 (1)对于某个$n>2$，若能构造出n个连续的整数满足题设条件，则这样的n就是要找的，将所有这样的n合在一起记作N_1.若对于某个$n'>2$，若能证明任何n'个连续的整数都不满足条件，则这样的n'就不是需要找的，将所有这样的n'合在一起记作N_2。若能使得$N_1\cup N_2=\{n|n>2, n\in N\}$，则$N_1$就是(1)的答案.

(2)同上，若对某个$n_1\in N_1$，证明它恰有一组正整数具有上述性质，则n_1就是所要找的，将所有这样的n_1合在一起记作N_1'。若对某个$n_2\in N_1$，总可以找到至少两组n个连续的整数满足上述性质，则这样的n_2就不符合(2)的答案要求，将全体这样的n_2合在一起记作N_1''。若$N_1'\cup N_1''=N_1$，则N_1'就是(2)的答案。

下面就是按如上的思路解题的。

解 (1)对于$n=3$，不论$m\geqslant3$为何整数，总有$(m-1, m-2)=(m-2+1, m-2)=(1, m-2)=1$，故$m-1,m-2$的最小公倍数为$(m-1)(m-2)$.又$(m,m-1)=1,m-2<m$，$m-2$不可能被$m$整除，从而$m$不可能是$(m-1)(m-2)$的约数。即任何三个连续的正整数均不可能具备所设性质。

若$n>3$，取$m=(n-1)(n-2)$，显然$m-(n-1)=(n-1)(n-2)-(n-1)=(n-1)(n-3)>0$。考虑下面的$n-1$个正整数

$$m-1,\ m-2,\ m-3,\ \cdots,\ m-n+1 \qquad (*)$$

由带余除法知其中一定有一个数为$n-1$的倍数，也一定有一个数为$n-2$的倍数。又因$(n-1,\ n-2)=1$,所以其中诸数的最小公倍数是$(n-1)(n-2)$的倍数,因而是$m=(n-1)(n-2)$的倍数，故只要$n>3$，就有一组n个连续正整数，其中最大的数是其余$n-1$个数的最小公倍数的约数。

（2）当$n=4$时，如果m是$m-1, m-2,\ m-3$的最小公倍数的约数，那么由最小公倍数的定义知，m所含每个素因数的最高次幂必是$m-1,\ m-2,\ m-3$中至少一个的约数。又$(m,\ m-1)=1$，$(m,\ m-2)=(m,\ -2)=1$或2，$(m,m-3)=(m,\ -3)=1$或3，且$m\geqslant4$，所以只可能是$m=2\times3=6$。事实上，6确实是5,4,3的最小公倍数的约数。

若$n>4$，则除在$(*)$中取$m=(n-1)(n-2)$外，还可取$m=(n-2)(n-3)$，此时$(n-2)(n-3)-(n-1)=(n-3)^2-2>0$，而$n-1$个数

$$(n-2)(n-3)-1,(n-2)(n-3)-2,\cdots,$$
$$(n-2)(n-3)-n+1$$

中有一数为$n-2$的倍数，还有一数为$n-3$的倍数，因而这$n-1$个数的最小公倍数是$(n-2)(n-3)$的倍数。因此，此时至少有两组正整数满足上述性质，故只有当$n=4$时，恰有一组4个连续正整数3,4,5,6，其中6是3,4,5的最小公倍数的约数。

从以上解题可以看出,全过程中仅仅用到约数、最小公倍数、互素、最大公约数等基本概念和性质，其中“n个连续

整数中至少有一个是n, $n-1$, $n-2$的倍数”这一性质对于构造出正整数m和数列(*)起了关键作用.

此题中证明存在性问题时使用了直接构造出所需数的方法. 构造法是证明存在性命题的一个重要方法.

习题1.1

1. 设p和q为自然数，使得

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319},$$

证明：数p可被1979整除.（第21届IMO试题）

2. 试证：对于任意正整数k，总有无穷多个整数a，使得$a+1$, $a+2$, …, $a+k-1$中没有一个素数.

3. 试证：对于任何自然数n，存在n个相继的正整数，前$n-1$个相继的数是合数，而第n个是素数.

4. 数列101，104，109，…的通项是$a_n=100+n^2$，其中$n=1$, 2, 3, …，对于每一个n，用d_n表示a_n与a_{n+1}的最大公约数，求d_n的最大值，其中n取一切正整数.

5. 设m、n为正整数，且$n<m$，现有m个盒子，每个盒子中有一些球，施行下面的操作：每次从这m个盒子中取出n个盒子，在取出的盒子中各放一个球，问：如果$(m,n)=1$，能否施行有限次上述操作，使所有的盒子中有相等的球？

§1.2 高斯函数$[x]$

对于任何实数x，记号$[x]$表示不大于实数x的最大整数. 称$[x]$为高斯函数. 若记$\{x\}=x-[x]$，则有

1. $x=[x]+\{x\}$.　　　　2. $0\leqslant\{x\}<1$.

3. $[x]\leqslant x<[x]+1$.　　　　4. $x\geqslant y$时，$[x]\geqslant[y]$.

5. 当n是整数时，$[n+x]=n+[x]$.