普通高等教育“十二五”规划教材

离散数学

殷剑宏　金菊良　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

离　散　数　学

殷剑宏　金菊良　编著

机 械 工 业 出 版 社

离散数学是研究离散的、有限量的结构及其相互关系的数学学科。它以抽象和形式化为显著特征，是由数理逻辑、集合论、抽象代数、组合数学、图论、算法理论等汇集而成的一门综合学科，是现代数学的一个重要分支。它广泛地应用于各学科领域，特别是计算机科学与技术领域。

学习本教材，无需特别预备知识，既易轻松入门，又易激发学习兴趣，是一本短、平、快的离散数学入门教材，并且它具有很强的普适性，特别适合计算机科学与技术、软件工程、网络工程、信息安全、物联网工程、数字媒体技术数学与应用数学、信息与计算科学、信息管理与信息系统、电子商务、电子信息工程、电子科学与技术、通信工程、信息工程等专业师生选用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/殷剑宏，金菊良编著．—北京：机械工业出版社，2013.5
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-111-41621-0

Ⅰ.①离…　Ⅱ.①殷…②金…　Ⅲ.①离散数学－高等学校－教材
Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 036260 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　汤　嘉
版式设计：霍永明　责任校对：张　媛
责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2013年5月第1版第1次印刷
184mm×260mm・28.75印张・728千字
标准书号：ISBN 978-7-111-41621-0
定价：55.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	封面无防伪标均为盗版

前　言

离散数学是研究离散的、有限量的结构及其相互关系的数学学科，以抽象和形式化为显著特征，是由数理逻辑、集合论、抽象代数、组合数学、图论、算法理论等汇集而成的一门综合学科，是现代数学的一个重要分支。它广泛地应用于各学科领域，特别是计算机科学与技术领域。

如果说连续数学是近代工业技术的数学基础，那么离散数学则是计算机科学的数学基础。“能行性”这个计算机科学的根本问题决定了计算机本身的结构和它处理的对象都是离散的、有限的，因而无论是计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临着如何建立离散结构的数学模型，以及将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可由计算机加以处理，而离散数学恰恰提供了描述离散结构的工具和方法，奠定了计算机科学的数学基石。同时，以微电子为基础、计算机与通信为载体、软件为核心、密码为保障的信息科学技术的飞速发展，又大大促进了离散数学的快速发展，因此离散数学被称为信息时代的数学。

离散数学广博而深奥，有其独特的思维方式和思想方法，具有严密的逻辑、准确的定义、很强的专业性，其理论有深奥甚至枯燥的一面，虽然本科阶段大学生的学科知识体系刚初步成型，再多的学时也不可能讲透离散数学的全部理论和方法，但作为计算机科学与技术专业的专业基础课，其教学内容不但不能随意删减更不能偷工减料。为此，本书将离散数学学科内容进行了分门别类的精心整理、概括和总结，取材突出以下特色：

(1) 前呼后应，融会贯通

每节都以小标题的形式，提纲挈领，围绕若干知识点，由易到难、由浅入深而铺陈展开，适时突出重点、前呼后应。比如：由命题运算与集合运算的内在联系，抽象出代数系统的同态；由等价关系与划分解决相同实际问题引出两者的一一对应；由关系的复合到函数的复合再到置换的积，逐步引出置换群；由特殊偏序集导出格，进而引出各种特殊格；由基本计数工具建立各种高级计数工具；由图的笛卡儿积导出超立方体；等等。全书采用模块化结构分为五篇，各篇信息量大致均衡，且各篇之间既可相互独立、自成体系，又可彼此联系、融会贯通。这样做便于教师根据不同专业、不同学时、不同基础的学生进行选讲，方便学生很快入门，同时又为基础好的学生设置足够的拓展和提升空间。

(2) 深入浅出，通俗易懂

由命题逻辑的扩展潜移默化地导出谓词逻辑；从一种特殊集合引出关系，又从一种特殊关系导出函数，再从一种特殊函数引出运算等。在讨论集合时，将其限于合适定义范围内，采用经典集合论的原始描述，既不会导致悖论，且所得结论和公理化集合论中的结论完全一致，又避免展示公理化集合论的过于复杂性。在讨论陪集的性质时，适时与等价类的性质相呼应，两者巧妙地殊途同归于拉格朗日定理，充分展示数学的美妙与

神奇。在讨论计数问题时，从基本的计数技术向高级计数技术慢慢推进，且反复尝试用不同的方法解同一个问题，从中展示不同计数技术解题的一般思路和方法，使学生不仅懂得了其深奥的道理，而且掌握了普遍的方法，对所学知识能广泛迁移，融会贯通。这样既降低了学习难度，又激发了学习兴趣。

（3）授人以渔，创新思维

强调命题翻译和谓词翻译的技巧，强调逻辑推理，反复训练学生的形式思维和逻辑思维能力。巧妙导出关系是客观事物间联系的一种数学抽象，而图是客观事物间联系的另一种数学抽象，并用不同的数学模型抽象关系和图；强调不同代数结构间的相互联系；展示不同计数技术的数学模型，不断训练学生的抽象思维能力。

（4）理论清晰，应用真切

由 n 元关系与关系数据库的渊源，由等价关系的等价类来求解许多应用问题，将哈斯图作为一种最基本的操作系统模型等角度，延伸关系的广泛应用；用较大的篇幅阐述主合取范式与主析取范式、群、环、域、独立集、匹配、着色、最短路问题、欧拉图、哈密顿图、树、平面图等的广泛应用，且这些应用都真真切切地来自社会实践，使学生自然而然地理解离散数学与其他学科之间千丝万缕的联系，促进学生在充分体会理论与应用的结合点时，培养自己的探索兴趣与应用能力，培养以后研究中运用离散数学理论知识的敏锐性。

（5）广泛实践，与时俱进

本书不是为编教材而编教材，更不是临时拼凑，而是十几年课堂教学实践经验的总结。力争每个概念都阐述清晰，每个定理都证明透彻，每道例题和习题都精心设计。书末附有详细习题解答，课程深度与广度适当，注重运用形式化方法，避免符号堆积。以近于公理化、模式化的逻辑体系呈现给读者，展示明确的学习范围、目标、步骤、方法和方向，既引人快速地一步一个台阶进入知识的殿堂，又抛砖引玉，授人以渔，打开离散数学这扇有趣的大门。同时，本教材还及时补充了哈斯图的生成算法、超立方体的拉普拉斯（Laplace）谱、生成排列的翻转算法、生成组合的插入算法等新内容。

全书分为数理逻辑、集合论、抽象代数、图论、组合数学五篇，其中第 3 章、4.1 节至4.3 节由金菊良撰写，其余部分由殷剑宏撰写，并由殷剑宏负责全书的统编工作。

学习本教材，无需特别预备知识，既易轻松入门，又易激发学习兴趣，是一本短、平、快的离散数学入门教材，并且它具有很强的普适性，特别适合计算机科学与技术、软件工程、网络工程、信息安全、物联网工程、数字媒体技术数学与应用数学、信息与计算科学、信息管理与信息系统、电子商务、电子信息工程、电子科学与技术、通信工程、信息工程等专业师生选用。但限于作者水平有限，错误和疏漏在所难免，恳请各位同仁和读者不吝指正。

作　者

符号注释

数理逻辑

(1) $\neg$	否定联结词
(2) $\wedge$	合取联结词
(3) $\vee$	析取联结词
(4) $\rightarrow$	条件联结词
(5) $\leftrightarrow$	双条件联结词
(6) $\bar{\vee}$	异或联结词
(7) $\uparrow$	与非联结词
(8) $\downarrow$	或非联结词
(9) $\mapsto$	条件否定联结词
(10) $\Leftrightarrow$	等价或逻辑相等
(11) $\Rightarrow$	蕴含
(12) $\forall$	全称量词
(13) $\exists$	存在量词
(14) 1 或 T	真
(15) 0 或 F	假

集合论

(1) $a \in A$	a 属于 A
(2) $a \notin A$	a 不属于 A
(3) $A \subseteq B$	A 包含于 B
(4) $B \supseteq A$	B 包含 A
(5) $A \subset B$	A 真包含于 B
(6) $B \supset A$	B 真包含 A
(7) $A = B$	集合 A 与 B 相等
(8) $A \neq B$	集合 A 与 B 不相等
(9) $A \not\subset B$	A 不是 B 的真子集
(10) $\mid A \mid$	有限集 A 的基数
(11) $\varnothing$	空集
(12) E	全集
(13) $P(A)$或 2^A	集合 A 的幂集
(14) $A \cap B$	集合 A 与 B 的交
(15) $A \cup B$	集合 A 与 B 的并
(16) $A - B$	集合 A 与 B 的差
(17) $\sim A$ 或 $\overline{A}$	集合 A 的绝对差(补)

(18) $A \oplus B$	集合 A 与 B 的对称差
(19) $A \times B$	集合 A 与 B 的笛卡儿积
(20) $<a, b>$	二元组或序偶
(21) $<a_1, a_2, \cdots, a_n>$	n 元组
(22) $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$	n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡儿积
(23) A^n	n 个集合 A 的笛卡儿积
(24) aRb	$<a, b> \in R$
(25) $a\overline{R}b$	$<a, b> \notin R$
(26) $\mathrm{dom}(R)$	关系 R 的前域
(27) $\mathrm{ran}(R)$ 或 $\mathrm{ran}(f)$	关系 R 的值域或函数 f 的值域
(28) $\mathrm{FLD}(R)$	关系 R 的域
(29) I_A	集合 A 上的恒等关系或集合 A 上的恒等函数
(30) $x \equiv y(\mathrm{mod}\ k)$	模 k 同余运算
(31) $[a]_R$	a 确定的关于 R 的等价类
(32) A/R	A 关于 R 的商集
(33) $\mathrm{C}_R(A)$	R 确定的集合 A 的完全覆盖
(34) $\preccurlyeq$	偏序关系
(35) $<A, \preccurlyeq>$	偏序集
(36) $\prec$	拟序关系
(37) $<A, \prec>$	拟序集
(38) 盖住关系	$\mathrm{cov}(A, \preccurlyeq) = \{<x, y> \mid x, y \in A, y$ 盖住 $x\}$
(39) $\mathrm{LUB}(A)$	集合 A 的上确界
(40) $\mathrm{GLB}(A)$	集合 A 的下确界
(41) $R \circ S$ 或 $g \circ f$	R 与 S 的复合关系 或 f 与 g 的复合函数
(42) R^n 或 f^n	n 个关系 R 的复合关系或 n 个函数 f 的复合函数
(43) R^{-1} 或 f^{-1}	关系 R 的逆关系或函数 f 的逆函数
(44) $\boldsymbol{M}_R \circ \boldsymbol{M}_S$	关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 与 $\boldsymbol{M}_S$ 的逻辑乘
(45) $r(R)$	关系 R 的自反闭包
(46) $s(R)$	关系 R 的对称闭包
(47) $t(R)$	关系 R 的传递闭包
(48) $\mathrm{rst}(R)$	关系 R 的等价闭包
(49) $f: A \to B$	集合 A 到集合 B 的函数 f
(50) B^A	$\{f \mid f: A \to B\}$
(51) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$	集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的 n 次置换

(52) $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$ 集合$\{1, 2, \cdots, n\}$上的恒等置换

(53) gf 置换f与g的积

(54) f^n n个置换f的积

(55) f^{-1} 置换f的逆

(56) $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ k循环(轮换)

(57) $n \mid m$ n整除m

(58) $A \sim B$ 集合A与集合B等势

(59) $K[A]$ 集合A的基数

(60) $\aleph_0$ 可数集的基数(超限数或阿列夫零)

(61) $\aleph$ 实数集的基数(连续统的势)

抽象代数

(1) $Z_m = \{[0], [1], \cdots, [m-1]\}$

(2) $[a] +_m [b] = [(a+b) \bmod m]$

(3) $[a] \times_m [b] = [(a \times b) \bmod m]$

(4) $N_k = \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$

(5) $x +_k y = (x+y) \bmod k$

(6) $x \times_k y = (xy) \bmod k$

(7) a^{-1} 元素a的逆元

(8) $|A|$ 群A的阶

(9) $|a|$ 元素a的阶

(10) $n \mid m$ n整除m

(11) AB 集合A与B的乘积

(12) aH H的左陪集

(13) Ha H的右陪集

(14) $[G : H]$ H在G中的指数

(15) G/H 群G关于H的商群

(16) $\gcd(a, b)$ a, b的最大公约数

(17) $\mathrm{lcm}(a, b)$ a, b的最小公倍数

(18) $A \backsim B$ A同态B

(19) $A \cong B$ A同构B

(20) $\mathrm{Ker}(f)$ f的同态核

(21) $<a>$ 以a为生成元的循环群

(22) $<S_n, \circ>$ 集合S的n元对称群

(23) $\psi(f)$ 置换f作用下的不变元的个数

(24) $\mathrm{Char}(G)$ 环G的特征

(25) $\bar{a}$ 元素a的补元

图论

(1) $G=<V(G), E(G), \varphi(G)>$	图 G
(2) $e_i=(v_j, v_t)$	以 v_j 和 v_t 为端点的无向边 e_i
(3) $e_i=<v_j, v_t>$	以 v_j 为起点 v_t 为终点的有向边 e_i
(4) $G=<V(G), E(G)>$ 或 $G=<V, E>$	简单图 G
(5) K_n	n 个结点完全图
(6) K_n^*	n 个结点完全有向图
(7) $\deg(x)$ 或 $d(x)$	结点 x 的度数
(8) $\deg^+(x)$ 或 $d^+(x)$	结点 x 的入度
(9) $\deg^-(x)$ 或 $d^-(x)$	结点 x 的出度
(10) $\Delta(G)=\max\{d_G(x) \mid x\in V(G)\}$	图 G 的最大结点度
(11) $\delta(G)=\min\{d_G(x) \mid x\in V(G)\}$	图 G 的最小结点度
(12) $\Delta^+(D)=\max\{d_D^+(x) \mid x\in V(D)\}$	图 G 的最大入度
(13) $\Delta^-(D)=\max\{d_D^-(x) \mid x\in V(D)\}$	图 G 的最大出度
(14) $\delta^+(D)=\min\{d_D^+(x) \mid x\in V(D)\}$	图 G 的最小入度
(15) $\delta^-(D)=\min\{d_D^-(x) \mid x\in V(D)\}$	图 G 的最小出度
(16) $N_s(v)$	v 在 S 中的邻域
(17) $N(v)$	$N_G(v)$ 的简写
(18) $N_G(S)$	S 的邻集
(19) $G_1\cong G_2$	图 G_1 和 G_2 同构
(20) $G_1\subseteq G$	G_1 是 G 的子图
(21) $G[V_1]$	结点集 V_1 的导出子图
(22) $G[E_1]$	边集 E_1 的导出子图
(23) $\overline{G}$	G 的补图
(24) $G_1\times G_2$	图 G_1 和 G_2 的笛卡儿积
(25) Q_n	n 维超立方体
(26) $G_1\cup G_2$	图 G_1 和 G_2 的并
(27) $G_1\cap G_2$	图 G_1 和 G_2 的交
(28) G_1-G_2	图 G_1 和 G_2 的差
(29) $G_1\oplus G_2$	图 G_1 和 G_2 的环和
(30) $W(G)$	无向图 G 的连通分支数
(31) $\overrightarrow{W}(D)$	有向图 D 的强连通分支数
(32) $K(G)=\min\{\lvert T\rvert \mid T$ 是 G 的点割$\}$	图 G 的点连通度或连通度
(33) $\lambda(G)=\min\{\lvert S\rvert \mid S$ 是 G 的边割$\}$	图 G 的边连通度
(34) $K_{m,n}$	结点 m 和 n 的完全偶图或完全二分图
(35) $\alpha'(G)$	图 G 的匹配数
(36) $C(G)$	图 G 的闭包
(37) $x(G)$	图 G 的色数

组合数学

(1) P_n^r 或 $P(n, r)$	n 个元素集合的 r 排列的个数
(2) C_n^r 或 $C(n, r)$	n 个元素集合的 r 组合的个数
(3) $P(n; n_1, n_2, \cdots, n_k)$	重集 $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$ 的全排列的个数
(4) $[n]$	小于等于 n 的最大整数
(5) $S_2(p, k)$	第二类斯特林(Stirling)数
(6) $S_1(p, k)$	第一类斯特林(Stirling)数

目　　录

第1篇 数理逻辑

数理逻辑的创始人莱布尼茨(Leibniz，1646—1716，德国)，在其少年时代就酝酿普遍数学的思想：创造一种普遍的符号语言，这种符号语言是表意的，每个符号表达一个概念；同时，这种符号语言又是一个思维的演算，根据这种演算，把一切思维和推理归结为一种运算。后经布尔(Boolean，1815—1864，英国)、德·摩根(DeMorgan，1806—1871，英国)、弗雷格(Frege，1848—1925，德国)、皮亚诺(Peano，1883—1932，意大利)、罗素(Russell，1870—1970，英国)、希尔伯特(Hilbert，1862—1943，德国)、图灵(Turing，1912—1954，英国)、哥德尔(Gödel，1906—1978，奥地利)等数学家的努力和发展，一门新兴的学科——数理逻辑诞生了。

数理逻辑(mathematical logic)又称符号逻辑，它是运用数学方法，特别是指引进一套符号的方法，建立严格的形式推理系统，运用形式语言来表达数学思维的形式结构和推理规律，把对数学思维规律的研究转换为对符号规律的研究，把严格的数学推理转换为简洁的逻辑关系。它既是数学，又是逻辑学。其中，它关于形式语言的构造与意义的研究，不仅为计算机语言提供了理论基础，还为计算机科学的工程实践提供了基本的逻辑背景框架。开关线路、自动化系统和计算机设计等可用命题演算的公式来表示；机器证明、程序设计逻辑、程序正确性证明等无一不是数理逻辑的研究成果。计算机科学和数理逻辑，在相互作用与促进中共同发展。

数理逻辑的内容大体可归纳为逻辑演算、公理化集合论、证明论、模型论、递归论等，下面两章介绍数理逻辑的最基本内容：命题逻辑与谓词逻辑。

第1章 命题逻辑

1.1 命题

命题逻辑不是研究一个具体命题的内容，也不是研究一个具体命题是否正确，而是重点研究命题之间的关系。

1. 命题的概念

命题(statement)即判断，即描述客观世界的、可分辨真假且非真即假的陈述句。当一个命题所表达的内容正确时，则称该命题的真值(truth value)为真(truth)，用1或T表示；当一个命题所表达的内容错误时，则称该命题的真值为假(false)，用0或F表示。

例1.1.1 判断下列陈述句是否为命题。

(1) 北京是中国的首都。

(2) 上海是大城市。

(3) 雪是白色的。

(4) 别的星球上有生物。

(5) 今天是星期三。

(6) 他是王菲的朋友。

(7) 李菲在火车站上班。

(8) $1+101=110$。

(9) $x+y=2$。

(10) 我正在说谎。

(11) 姚明是高个子。

(12) 上海离北京近。

(13) 王菲选修英语或汉语。

(14) 如果王菲有时间，那么她去黄山旅游。

解 (1)~(3) 都是命题，且真值均为真；(4) 是命题，只是其真值未知；

(5)~(7) 分别含有不定时间、人物、地点代词，不是命题；

(8) 与上下文有关，根据上下文的不同情况它可真可假，即无唯一真值，不是命题；

(9) 中含有变量 x 与 y，根据 x 与 y 的不同取值情况它可真可假，即无唯一真值，因而不是命题。后面将讨论这类陈述句变成命题的多种方法；(10) 是悖论，不是命题；

(11)~(12) 不是命题，因“高个子”“距离近”没有标准，无法判断它们所表达的内容是否正确；

(13)~(14) 都是命题，下面将知道它们都是复合命题，学过命题联结词后，对其真值就有清晰的认识。

注意(1) 一个陈述句能否分辨真假，与是否知道它的真假是两回事。

(2) 命题逻辑关心的不是一个命题到底是真还是假，而是一旦确定它的真值后，这一命题怎样与其他命题发生关系。因此在举例时为方便，常把一些不是命题的陈述句看作命题。

2. 命题的分类

命题可分为原子命题和复合命题。如果一个命题不能分解成更为简单的陈述句，称这样的命题为**原子命题**(atomic statement)或**简单命题**(simple statement)；由简单命题通过联结词联结而成的命题称为**复合命题**(composite statement)。

例如，例1.1.1中，(1)~(4)均是原子命题，而(13)~(14)均是复合命题。

3. 命题常量与命题变量

元语言，即日常生活或一般科学推理时所使用的语言，如汉语、英语等各种自然语言、自然科学与工程中的术语，甚至也包括数学中使用的各种简写或缩写符号，它们既要能表达严密精确的思维，又要能表达含糊不清的思想，具有相当的广泛性、灵活性与歧义性。数理逻辑是研究数学思维的模型，是要将严密精确的数学思维形式化，为此要人工构造一种语言，即形式语言，它由字母和符号构成，必须按严格的规则进行操作，绝对排除歧义性。在数理逻辑中，命题就常用大写英文字母 A，B，…或小写英文字母 a，b，…表示。例如，

A：今天是星期一。

表示命题的符号称为**命题标识符**。如上述中的 A 就是命题标识符。

命题标识符分为命题常量与命题变量。一个命题标识符如果表示确定的命题，就称为**命题常量**(statement constant)；如果命题标识符只表示任意命题的位置标志，就称为**命题变量**(statement variable)。因为命题变量可以表示任意命题，因而它没有确定的真值，因此命题变量不是命题。当命题变量 A 用一个特定命题取代时，A 才能确定真值，这时也称为对命题变量 A 进行**赋值**或**指派**(assignment)。不特别说明时，常用 T 与 F 表示命题常量，其余的字符表示命题变量。

习题 1.1

1. 下列陈述句中，(　　)不是命题。

A. 2011年国庆节是晴天。　　B. 火星上有生物。

C. 月球距离地球近。　　D. 上海是大城市。

2. 下列命题中，(　　)是复合命题。

A. 江山代有人才出。　　B. 我花开时百花杀。

C. 春江水暖鸭先知。　　D. 万紫千红总是春。

3. 下列命题中，(　　)是原子命题。

A. 燕子飞回南方，春天来了。　　B. 天才是炼成的，而不是天生的。

C. 暮春三月，江南草长。　　D. 哥白尼指出地球绕太阳转。

4. 下列命题中，(　　)是原子命题。

A. 王芳与王菲是姐妹。　　B. 王芳与王菲是三好学生。

C. 王芳与王菲持有驾照。　　D. 王芳与王菲喜欢早睡早起。

5. 下列命题中，(　　)是原子命题。

A. 数学是科学的皇后，而数论是数学的皇后。　　B. 数学使人精细，逻辑使人善辩。

C. 较大的偶数都可表示为两个素数的和。　　D. 数学是一种语言，也是一种工具。

6. 判断一个语句是否为命题，首先看它是否为______，然后再看它是否具有唯一的____。

1.2　命题联结词

1. 否定

定义 1.2.1　设 P 是一个命题，P 的否定是一个新命题，记作 $\neg P$，读作"非 P"或"P 的否定"。若 P 的真值为 1，则 $\neg P$ 的真值为 0；若 P 的真值为 0，则 $\neg P$ 的真值为 1。

"$\neg$"称为命题**否定联结词**(negative connective)，类似汉语联结词"非、否、不"。其含义如表 1.2.1 所示。

表　1.2.1

P	$\neg P$
1	0
0	1

例如，A：五班学生都是男生。

$\neg A$：五班学生都是男生，不是这样的。

又比如 P：上海是中国的最大城市。

$\neg P$：上海不是中国的最大城市。

2. 合取

定义 1.2.2　设 P 和 Q 均是命题，P 与 Q 的合取是复合命题，记作 $P\wedge Q$，读作"P 合取 Q"或"P 与 Q 的合取"。当且仅当 P 与 Q 的真值同为 1 时，$P\wedge Q$ 的真值为 1；否则 $P\wedge Q$ 的真值为 0。

"$\wedge$"称为命题**合取联结词**(conjunctive connective)，类似汉语联结词"与、和、且"。其含义如表 1.2.2 所示。

表　1.2.2

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例如，P：外星人曾访问过地球。

Q：今天是雨天。

$P\wedge Q$：外星人曾访问过地球且今天是雨天。

在汉语中"外星人曾访问过地球且今天是雨天。"是病句，因为 P 与 Q 没有内在联系；在数理逻辑中，并不强调命题联结词要具备汉语中的语法关系，只强调 $P\wedge Q$ 是复合命题，且当 P 与 Q 分别取真值后，$P\wedge Q$ 就有确定的真值。

3. 析取

定义 1.2.3　设 P 和 Q 均是命题，P 与 Q 的析取是复合命题，记作 $P\vee Q$，读作"P 析取 Q"或"P 与 Q 的析取"。当且仅当 P 与 Q 的真值同为 0 时，$P\vee Q$ 的真值为 0；否则 $P\vee Q$ 的真值为 1。

"$\vee$"称为命题**析取联结词**(disjunctive connective)，类似汉语联结词"可兼或"。其含义

如表 1.2.3 所示。

表 1.2.3

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例如，P：外星人曾访问过地球。

Q：今天是雨天。

$P\vee Q$：外星人曾访问过地球或今天是雨天。

又比如，P：王菲是优秀共产党员。

Q：王菲是三好学生。

$P\vee Q$：王菲是优秀共产党员或三好学生。

4. 条件

定义 1.2.4 设 P 和 Q 均是命题，**P 到 Q 的条件**是复合命题，记作 $P\rightarrow Q$，读作"P 到 Q 的条件"。当且仅当**前件**(antecedent) P 的真值为 1，**后件**(consequent) Q 的真值为 0 时，$P\rightarrow Q$的真值为 0；否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为 1。

"$\rightarrow$"称为命题**条件联结词**(conditional connective)，类似汉语联结词"如果…，那么…"。其含义如表 1.2.4 所示。

表 1.2.4

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例如，P：外星人曾访问过地球。

Q：今天是雨天。

$P\rightarrow Q$：如果外星人曾访问过地球，那么今天是雨天。

$Q\rightarrow P$：如果今天是雨天，那么外星人曾访问过地球。

又比如，P：王菲是优秀共产党员。

Q：王菲是三好学生。

$P\rightarrow Q$：如果王菲是优秀共产党员，那么王菲是三好学生。

$Q\rightarrow P$：如果王菲是三好学生，那么王菲是优秀共产党员。

5. 双条件

定义 1.2.5 设 P 和 Q 均是命题，**P 与 Q 的双条件**是复合命题，记作 $P\leftrightarrow Q$，读作"P 与 Q 的双条件"。当且仅当 P 与 Q 的真值相同时，$P\leftrightarrow Q$ 的真值为 1；否则 $P\leftrightarrow Q$ 的真值为 0。

"$\leftrightarrow$"称为命题**双条件联结词**(bi-conditional connective)，类似汉语联结词"当且仅当"。其含义如表 1.2.5 所示。