

高等学校教材

# 高等数学

下册 第四版

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

高等学校教材

# 高等数学

第四版 下册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 下册 / 同济大学数学教研室主编. —4 版.  
—北京: 高等教育出版社, 1996(2005 重印).

ISBN 7-04-005804-9

I. 高… II. 同… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 09286 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landracom.com">http://www.landracom.com</a>
			<a href="http://www.landracom.cn">http://www.landracom.cn</a>
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	850 × 1168 1/32	版 次	1978 年 10 月第 1 版 1996 年 12 月第 4 版
印 张	14.125	印 次	2005 年 8 月第 32 次印刷
字 数	360 000	定 价	16.40 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 5804-00

## 内 容 提 要

本书第四版是在高等学校工科数学课程教学指导委员会指导下,遵照国家教委“对质量较高,基础较好,使用面较广的教材要进行锤炼”的精神,并结合修订的《高等数学课程教学基本要求》,在第三版的基础上修改成的.这次修改广泛吸取了全国同行的意见,从教学角度出发进行仔细推敲,改写了一些重要概念的论述,调整了习题的配置,每章增加总习题,使内容和系统更加完整,也便于教学.

本书分上、下两册出版.下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程五章,书末附有习题答案与提示.

本书仍保持了第三版结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多、便于自学等优点,又在保证教学基本要求的前提下,扩大了适应面,增强了伸缩性,以供高等工科院校不同专业的学生使用.

# 目 录

第八章 多元函数微分法及其应用 .....	1
第一节 多元函数的基本概念 .....	1
一、区域(1) 二、多元函数概念(3) 三、多元函数的极限(6)	
四、多元函数的连续性(9) 习题 8-1(12)	
第二节 偏导数 .....	13
一、偏导数的定义及其算法(13) 二、高阶偏导数(17) 习题	
8-2(20)	
第三节 全微分及其应用 .....	21
一、全微分的定义(21) 二、全微分在近似计算中的应用(25)	
习题 8-3(28)	
第四节 多元复合函数的求导法则 .....	29
习题 8-4(36)	
第五节 隐函数的求导公式 .....	37
一、一个方程的情形(37) 二、方程组的情形(40) 习题 8-5(43)	
第六节 微分法在几何上的应用 .....	44
一、空间曲线的切线与法平面(44) 二、曲面的切平面与法线(49)	
习题 8-6(52)	
第七节 方向导数与梯度 .....	53
一、方向导数(53) 二、梯度(56) 习题 8-7(60)	
第八节 多元函数的极值及其求法 .....	61
一、多元函数的极值及最大值、最小值(61) 二、条件极值 拉格	
朗日乘数法(67) 习题 8-8(71)	
*第九节 二元函数的泰勒公式 .....	71
一、二元函数的泰勒公式(71) 二、极值充分条件的证明(76)	
*习题 8-9(78)	
*第十节 最小二乘法 .....	79

* 习题 8-10(84)	
总习题八 .....	85
<b>第九章 重积分</b> .....	87
第一节 二重积分的概念与性质 .....	87
一、二重积分的概念(87) 二、二重积分的性质(91)	
习题 9-1(93)	
第二节 二重积分的计算法 .....	94
一、利用直角坐标计算二重积分(94) 习题 9-2(1) (103)	
二、利用极坐标计算二重积分(104) 习题 9-2(2)(110)	
* 三、二重积分的换元法(112) * 习题 9-2(3)(118)	
第三节 二重积分的应用 .....	119
一、曲面的面积(120) 二、平面薄片的重心(123) 三、平面薄片的转动惯量(125) 四、平面薄片对质点的引力(126)	
习题 9-3(127)	
第四节 三重积分的概念及其算法 .....	128
习题 9-4(133)	
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分 .....	134
一、利用柱面坐标计算三重积分(134) 二、利用球面坐标计算三重积分(136) 习题 9-5(141)	
* 第六节 含参变量的积分 .....	143
* 习题 9-6(149)	
总习题九 .....	150
<b>第十章 曲线积分与曲面积分</b> .....	152
第一节 对弧长的曲线积分 .....	152
一、对弧长的曲线积分的概念与性质(152) 二、对弧长的曲线积分的计算法(154) 习题 10-1(158)	
第二节 对坐标的曲线积分 .....	159
一、对坐标的曲线积分的概念与性质(159) 二、对坐标的曲线积分的计算法(163) 三、两类曲线积分之间的联系(168)	
习题 10-2(170)	
第三节 格林公式及其应用 .....	171

一、格林公式(171) 二、平面上曲线积分与路径无关的条件(176) 三、二元函数的全微分求积(179) 习题 10-3(184)	
第四节 对面积的曲面积分 .....	185
一、对面积的曲面积分的概念与性质(185) 二、对面积的曲面积分的算法(186) 习题 10-4(190)	
第五节 对坐标的曲面积分 .....	192
一、对坐标的曲面积分的概念与性质(192) 二、对坐标的曲面积分的算法(197) 三、两类曲面积分之间的联系(200) 习题 10-5(203)	
第六节 高斯公式 通量与散度 .....	204
一、高斯公式(204) * 二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件(209) 三、通量与散度(210) 习题 10-6(212)	
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度 .....	213
一、斯托克斯公式(213) * 二、空间曲线积分与路径无关的条件(219) 三、环流量与旋度(221) * 四、向量微分算子(223) 习题 10-7(224)	
总习题十 .....	225
<b>第十一章 无穷级数</b> .....	228
第一节 常数项级数的概念和性质 .....	228
一、常数项级数的概念(228) 二、收敛级数的基本性质(231) * 三、柯西审敛原理(235) 习题 11-1(236)	
第二节 常数项级数的审敛法 .....	237
一、正项级数及其审敛法(237) 二、交错级数及其审敛法(245) 三、绝对收敛与条件收敛(247) 习题 11-2(252)	
第三节 幂级数 .....	254
一、函数项级数的概念(254) 二、幂级数及其收敛性(255) 三、幂级数的运算(260) 习题 11-3(263)	
第四节 函数展开成幂级数 .....	264
一、泰勒级数(264) 二、函数展开成幂级数(267) 习题 11-4(275)	
第五节 函数的幂级数展开式的应用 .....	275

一、近似计算(275) 二、欧拉公式(280) 习题 11-5(281)	
* 第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质 .....	282
一、函数项级数的一致收敛性(282) 二、一致收敛级数的基本性质(287) * 习题 11-6(292)	
第七节 傅里叶级数 .....	293
一、三角级数 三角函数系的正交性(293) 二、函数展开成傅里叶级数(296) 习题 11-7(303)	
第八节 正弦级数和余弦级数 .....	304
一、奇函数和偶函数的傅里叶级数(304) 二、函数展开成正弦级数或余弦级数(308) 习题 11-8(310)	
第九节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 .....	310
习题 11-9(314)	
* 第十节 傅里叶级数的复数形式 .....	314
* 习题 11-10(317)	
总习题十一 .....	318
<b>第十二章 微分方程</b> .....	320
第一节 微分方程的基本概念 .....	320
习题 12-1(325)	
第二节 可分离变量的微分方程 .....	326
习题 12-2(333)	
第三节 齐次方程 .....	334
一、齐次方程(334) * 二、可化为齐次的方程(339)	
习题 12-3(341)	
第四节 一阶线性微分方程 .....	342
一、线性方程(342) 二、伯努利方程(345) 习题 12-4(348)	
第五节 全微分方程 .....	349
习题 12-5(352)	
* 第六节 欧拉-柯西近似法 .....	352
* 习题 12-6(357)	
第七节 可降阶的高阶微分方程 .....	357



一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程(358)	二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程(360)	三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程(363)	习题 12-7(366)
第八节 高阶线性微分方程 .....			366
一、二阶线性微分方程举例(366)	二、线性微分方程的解的结构(369)		* 三、常数变易法(372)
			习题 12-8(375)
第九节 二阶常系数齐次线性微分方程 .....			376
			习题 12-9(386)
第十节 二阶常系数非齐次线性微分方程 .....			387
一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型(388)	二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型(390)		习题 12-10(394)
* 第十一节 欧拉方程 .....			395
			* 习题 12-11(397)
第十二节 微分方程的幂级数解法 .....			397
			习题 12-12(402)
* 第十三节 常系数线性微分方程组解法举例 .....			402
			* 习题 12-13(406)
总习题十二 .....			407
习题答案与提示 .....			409

## 第八章 多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的函数都只有一个自变量,这种函数叫做一元函数.但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素,反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形.这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.讨论中我们以二元函数为主,因为从一元函数到二元函数会产生新的问题,而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推.

### 第一节 多元函数的基本概念

#### 一、区域

讨论一元函数时,经常用到邻域和区间概念.由于讨论多元函数的需要,我们首先把邻域和区间概念加以推广,同时还要涉及其它一些概念.

##### 1. 邻域

设  $P_0(x_0, y_0)$  是  $xOy$  平面上的一个点,  $\delta$  是某一正数. 与点  $P_0(x_0, y_0)$  距离小于  $\delta$  的点  $P(x, y)$  的全体, 称为点  $P_0$  的  $\delta$  邻域, 记为  $U(P_0, \delta)$ , 即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\},$$

也就是

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}.$$

在几何上,  $U(P_0, \delta)$  就是  $xOy$  平面上以点  $P_0(x_0, y_0)$  为中心、 $\delta > 0$  为半径的圆的内部的点  $P(x, y)$  的全体.

如果不需要强调邻域半径  $\delta$ , 则用  $U(P_0)$  表示点  $P_0$  的  $\delta$  邻

域. 点  $P_0$  的去心的邻域记作  $\overset{\circ}{U}(P_0)$ .

## 2. 区域

设  $E$  是平面上的一个点集,  $P$  是平面上的一个点. 如果存在点  $P$  的某一邻域  $U(P)$  使  $U(P) \subset E$ , 则称  $P$  为  $E$  的内点(图 8-1). 显然,  $E$  的内点属于  $E$ .

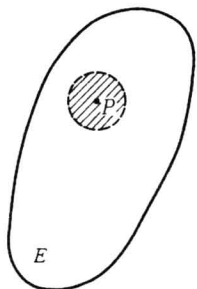


图 8-1

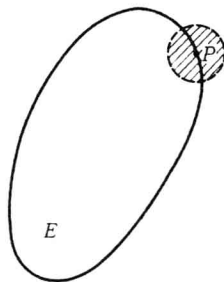


图 8-2

如果点集  $E$  的点都是内点, 则称  $E$  为开集. 例如, 点集  $E_1 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$  中每个点都是  $E_1$  的内点, 因此  $E_1$  为开集.

如果点  $P$  的任一邻域内既有属于  $E$  的点, 也有不属于  $E$  的点 (点  $P$  本身可以属于  $E$ , 也可以不属于  $E$ ), 则称  $P$  为  $E$  的边界点 (图 8-2).  $E$  的边界点的全体称为  $E$  的边界. 例如上例中,  $E_1$  的边界是圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$ .

设  $D$  是开集. 如果对于  $D$  内任何两点, 都可用折线连结起来, 且该折线上的点都属于  $D$ , 则称开集  $D$  是连通的.

连通的开集称为区域或开区域. 例如,  $\{(x, y) | x + y > 0\}$  及  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$  都是区域.

开区域连同它的边界一起, 称为闭区域, 例如

$$\{(x, y) | x + y \geq 0\} \text{ 及 } \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

都是闭区域.

对于点集  $E$  如果存在正数  $K$ , 使一切点  $P \in E$  与某一定点  $A$

间的距离 $|AP|$ 不超过 $K$ ,即

$$|AP| \leq K$$

对一切 $P \in E$ 成立,则称 $E$ 为有界点集,否则称为无界点集.例如,

$$\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

是有界闭区域, $\{(x, y) | x + y > 0\}$ 是无界开区域.

### 3. $n$ 维空间

我们知道,数轴上的点与实数有一一对应关系,从而实数全体表示数轴上一切点的集合,即直线.在平面上引入直角坐标系后,平面上的点与有序二元数组 $(x, y)$ 一一对应,从而有序二元数组 $(x, y)$ 全体表示平面上一切点的集合,即平面.在空间引入直角坐标系后,空间的点与有序三元数组 $(x, y, z)$ 一一对应,从而有序三元数组 $(x, y, z)$ 全体表示空间一切点的集合,即空间.一般地,设 $n$ 为取定的一个自然数,我们称有序 $n$ 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体为 $n$ 维空间,而每个有序 $n$ 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 $n$ 维空间中的一个点,数 $x_i$ 称为该点的第 $i$ 个坐标. $n$ 维空间记为 $\mathbb{R}^n$ .

$n$ 维空间中两点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 及 $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 间的距离规定为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

容易验知,当 $n=1, 2, 3$ 时,由上式便得解析几何中关于直线(数轴),平面,空间内两点间的距离.

前面就平面点集来陈述的一系列概念,可推广到 $n$ 维空间中去.例如,设 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ , $\delta$ 是某一正数,则 $n$ 维空间内的点集

$$U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta, P \in \mathbb{R}^n\}$$

就定义为点 $P_0$ 的 $\delta$ 邻域.以邻域概念为基础,可定义点集的内点、边界点以及区域等一系列概念.

## 二、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中,经常会遇到多个变量之间

的依赖关系,举例如下:

**例 1** 圆柱体的体积  $V$  和它的底半径  $r$ 、高  $h$  之间具有关系

$$V = \pi r^2 h.$$

这里,当  $r, h$  在集合  $\{(r, h) | r > 0, h > 0\}$  内取定一对值  $(r, h)$  时,  $V$  的对应值就随之确定.

**例 2** 一定量的理想气体的压强  $p$ 、体积  $V$  和绝对温度  $T$  之间具有关系

$$p = \frac{RT}{V},$$

其中  $R$  为常数.这里,当  $V, T$  在集合  $\{(V, T) | V > 0, T > T_0\}$  内取定一对值  $(V, T)$  时,  $p$  的对应值就随之确定.

**例 3** 设  $R$  是电阻  $R_1, R_2$  并联后的总电阻,由电学知道,它们之间具有关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

这里,当  $R_1, R_2$  在集合  $\{(R_1, R_2) | R_1 > 0, R_2 > 0\}$  内取定一对值  $(R_1, R_2)$  时,  $R$  的对应值就随之确定.

上面三个例子的具体意义虽各不相同,但它们却有共同的性质,抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

**定义 1** 设  $D$  是平面上的一个点集.如果对于每个点  $P(x, y) \in D$ ,变量  $z$  按照一定法则总有确定的值和它对应,则称  $z$  是变量  $x, y$  的二元函数(或点  $P$  的函数),记为

$$z = f(x, y) \quad (\text{或 } z = f(P)).$$

点集  $D$  称为该函数的定义域,  $x, y$  称为自变量,  $z$  也称为因变量.  
数集

$$\{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

称为该函数的值域.

$z$  是  $x, y$  的函数也可记为  $z = z(x, y), z = \varphi(x, y)$  等等.

类似地可以定义三元函数  $u = f(x, y, z)$  以及三元以上的函数.一般地,把定义 1 中的平面点集  $D$  换成  $n$  维空间内的点集  $D$ ,

则可类似地定义  $n$  元函数  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  $n$  元函数也可简记为  $u = f(P)$ , 这里点  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ . 当  $n=1$  时,  $n$  元函数就是一元函数. 当  $n \geq 2$  时,  $n$  元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域, 与一元函数相类似, 我们作如下约定: 在一般地讨论用算式表达的多元函数  $u = f(P)$  时, 就以使这个算式有确定值  $u$  的自变量所确定的点集为这个函数的定义域. 例如, 函数  $z = \ln(x+y)$  的定义域为

$$\{(x, y) | x + y > 0\}$$

(图 8-3), 这是一个无界开区间. 又如, 函数  $z = \arcsin(x^2 + y^2)$  的定义域为

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(图 8-4), 这是一个有界闭区域.

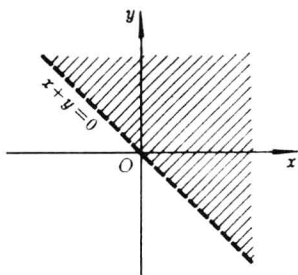


图 8-3

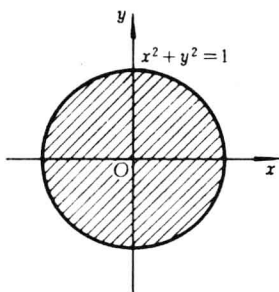


图 8-4

设函数  $z = f(x, y)$  的定义域为  $D$ . 对于任意取定的点  $P(x, y) \in D$ , 对应的函数值为  $z = f(x, y)$ . 这样, 以  $x$  为横坐标、 $y$  为纵坐标、 $z = f(x, y)$  为竖坐标在空间就确定一点  $M(x, y, z)$ . 当  $(x, y)$  遍取  $D$  上的一切点时, 得到一个空间点集

$$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

这个点集称为二元函数  $z = f(x, y)$  的图形(图 8-5). 通常我们也说二元函数的图形是一张曲面.

例如, 由空间解析几何知道, 线性函数

$$z = ax + by + c$$

的图形是一张平面;由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

所确定的函数  $z = f(x, y)$  的图形是球心在原点、半径为  $a$  的球面,它的定义域是圆形闭区域

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

在  $D$  的内部任一点  $(x, y)$  处,这函数有两个对应值,一个为

$$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

另一个为

$$-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

因此,这是多值函数,它有两个单值分支:前者表示上半球面,后者表示下半球面.以后除了对多元函数另作声明外,总假定所讨论的函数是单值的;如果遇到多值函数,可以找出它的(全部)单值分支,然后加以讨论.

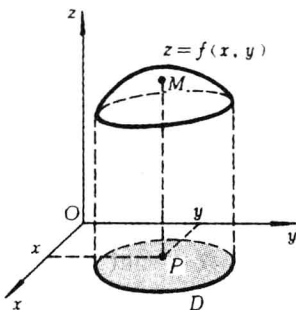


图 8-5

### 三、多元函数的极限

我们先讨论二元函数  $z = f(x, y)$  当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ , 即  $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$  时的极限.

这里  $P \rightarrow P_0$  表示点  $P$  以任何方式趋于点  $P_0$ , 也就是点  $P$  与点  $P_0$  间的距离趋于零, 即

$$|PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0.$$

与一元函数的极限概念类似, 如果在  $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$  的过程中, 对应的函数值  $f(x, y)$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 我们就说  $A$  是函数  $f(x, y)$  当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  时的极限. 下面用“ $\epsilon - \delta$ ”语言描述这个极限概念.

**定义 2** 设函数  $f(x, y)$  在开区域(或闭区域)  $D$  内有定义,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的内点或边界点. 如果对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总

存在正数  $\delta$ , 使得对于适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点  $P(x, y) \in D$ , 都有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

成立, 则称常数  $A$  为函数  $f(x, y)$  当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

或

$$f(x, y) \rightarrow A \quad (\rho \rightarrow 0),$$

这里  $\rho = |PP_0|$ .

为了区别于一元函数的极限, 我们把二元函数的极限叫做二重极限.

**例 4** 设  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$ ,

求证

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

**证** 因为

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| = |x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2,$$

可见, 对任给  $\epsilon > 0$ , 取  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ , 则当

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$$

时, 总有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

成立, 所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

我们必须注意, 所谓二重极限存在, 是指  $P(x, y)$  以任何方式趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时, 函数都无限接近于  $A$ . 因此, 如果  $P(x, y)$  以某一特殊方式, 例如沿着一条定直线或定曲线趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时, 即使函数无限接近于某一确定值, 我们还不能由此断定函数的极



限存在. 但是反过来, 如果当  $P(x, y)$  以不同方式趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时, 函数趋于不同的值, 那末就可以断定这函数的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形.

考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

显然, 当点  $P(x, y)$  沿  $x$  轴趋于点  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

又当点  $P(x, y)$  沿  $y$  轴趋于点  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

虽然点  $P(x, y)$  以上述两种特殊方式(沿  $x$  轴或沿  $y$  轴)趋于原点时函数的极限存在并且相等, 但是  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  并不存在. 这是

因为当点  $P(x, y)$  沿着直线  $y = kx$  趋于点  $(0, 0)$  时, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2},$$

显然它是随着  $k$  的值的不同而改变的.

以上关于二元函数的极限概念, 可相应地推广到  $n$  元函数  $u = f(P)$  即  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  上去.

关于多元函数的极限运算, 有与一元函数类似的运算法则.

**例 5** 求  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}$ .

**解** 这里  $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$  在区域  $D_1 = \{(x, y) | x < 0\}$  和区域  $D_2 = \{(x, y) | x > 0\}$  内都有定义,  $P_0(0, 2)$  同时为  $D_1$  及  $D_2$  的边界点. 但无论在  $D_1$  内还是在  $D_2$  内考虑, 下列运算都是正确的:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y = 1 \cdot 2 = 2.$$