高等学校教材

高等数学

下册　第四版

同济大学数学教研室　主编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

第四版 下册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 下册 / 同济大学数学教研室主编．—4 版．
—北京：高等教育出版社，1996（2005 重印）．
ISBN 7-04-005804-9

Ⅰ．高… Ⅱ．同… Ⅲ．高等数学 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 09286 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
		版　　次	1978 年 10 月第 1 版
开　　本	850×1168　1/32		1996 年 12 月第 4 版
印　　张	14.125	印　　次	2005 年 8 月第 32 次印刷
字　　数	360 000	定　　价	16.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　5804-00

内 容 提 要

本书第四版是在高等学校工科数学课程教学指导委员会指导下，遵照国家教委“对质量较高，基础较好，使用面较广的教材要进行锤炼”的精神，并结合修订的《高等数学课程教学基本要求》，在第三版的基础上修改成的．这次修改广泛吸取了全国同行的意见，从教学角度出发进行仔细推敲，改写了一些重要概念的论述，调整了习题的配置，每章增加总习题，使内容和系统更加完整，也便于教学．

本书分上、下两册出版．下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程五章，书末附有习题答案与提示．

本书仍保持了第三版结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多、便于自学等优点，又在保证教学基本要求的前提下，扩大了适应面，增强了伸缩性，以供高等工科院校不同专业的学生使用．

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数叫做一元函数.但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形.这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用.讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推.

第一节　多元函数的基本概念

一、区域

讨论一元函数时，经常用到邻域和区间概念.由于讨论多元函数的需要，我们首先把邻域和区间概念加以推广，同时还要涉及其它一些概念.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数.与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\},$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

如果不需要强调邻域半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的 δ 邻

域. 点 P_0 的去心的邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

2. 区域

设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$ 使 $U(P)\subset E$, 则称 P 为 E 的内点(图 8-1). 显然, E 的内点属于 E.

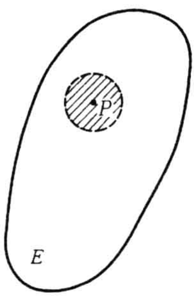

图 8-1

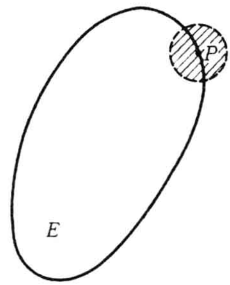

图 8-2

如果点集 E 的点都是内点, 则称 E 为开集. 例如, 点集 $E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 中每个点都是 E_1 的内点, 因此 E_1 为开集.

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点(点 P 本身可以属于 E, 也可以不属于 E), 则称 P 为 E 的边界点(图 8-2). E 的边界点的全体称为 E 的边界. 例如上例中, E_1 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$.

设 D 是开集. 如果对于 D 内任何两点, 都可用折线连结起来, 且该折线上的点都属于 D, 则称开集 D 是连通的.

连通的开集称为区域或开区域. 例如, $\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 及 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 都是区域.

开区域连同它的边界一起, 称为闭区域, 例如

$$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\} \text{ 及 } \{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$$

都是闭区域.

对于点集 E 如果存在正数 K, 使一切点 $P\in E$ 与某一定点 A

间的距离 $|AP|$ 不超过 K，即

$$|AP| \leqslant K$$

对一切 $P \in E$ 成立，则称 E 为有界点集，否则称为无界点集. 例如，

$$\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

是有界闭区域，$\{(x,y) \mid x+y>0\}$ 是无界开区域.

3. n 维空间

我们知道，数轴上的点与实数有一一对应关系，从而实数全体表示数轴上一切点的集合，即直线. 在平面上引入直角坐标系后，平面上的点与有序二元数组 (x,y) 一一对应，从而有序二元数组 (x,y) 全体表示平面上一切点的集合，即平面. 在空间引入直角坐标系后，空间的点与有序三元数组 (x,y,z) 一一对应，从而有序三元数组 (x,y,z) 全体表示空间一切点的集合，即空间. 一般地，设 n 为取定的一个自然数，我们称有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 n 维空间，而每个有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点，数 x_i 称为该点的第 i 个坐标. n 维空间记为 $\mathbb{R}^n$.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离规定为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

容易验知，当 $n=1,2,3$ 时，由上式便得解析几何中关于直线（数轴），平面，空间内两点间的距离.

前面就平面点集来陈述的一系列概念，可推广到 n 维空间中去. 例如，设 $P_0 \in \mathbb{R}^n$，δ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P \in \mathbb{R}^n\}$$

就定义为点 P_0 的 δ 邻域. 以邻域概念为基础，可定义点集的内点、边界点以及区域等一系列概念.

二、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间

的依赖关系，举例如下：

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2 h.$$

这里，当 r、h 在集合 $\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时，V 的对应值就随之确定.

例 2 一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数.这里，当 V、T 在集合 $\{(V,T)\mid V>0,T>T_0\}$ 内取定一对值 (V,T) 时，p 的对应值就随之确定.

例 3 设 R 是电阻 R_1、R_2 并联后的总电阻，由电学知道，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

这里，当 R_1、R_2 在集合 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$ 内取定一对值 (R_1,R_2) 时，R 的对应值就随之确定.

上面三个例子的具体意义虽各不相同，但它们却有共同的性质，抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 1 **设 D 是平面上的一个点集.如果对于每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x、y 的二元函数(或点 P 的函数)，记为**

$$z=f(x,y)\quad(\text{或 } z=f(P)).$$

点集 D 称为该函数的定义域，x、y 称为自变量，z 也称为因变量.数集

$$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的值域.

z 是 x、y 的函数也可记为 $z=z(x,y)$，$z=\varphi(x,y)$ 等等.

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数.一般地，把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D，

则可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. n 元函数也可简记为 $u=f(P)$,这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 当 $n=1$ 时,n 元函数就是一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域,与一元函数相类似,我们作如下约定:在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时,就以使这个算式有确定值 u 的自变量所确定的点集为这个函数的定义域. 例如,函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

(图 8-3),这是一个无界开区域. 又如,函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

(图 8-4),这是一个有界闭区域.

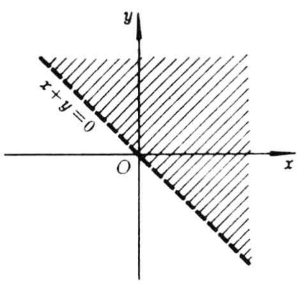

图 8-3

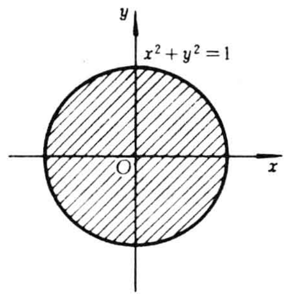

图 8-4

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$,对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 遍取 D 上的一切点时,得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(图 8-5). 通常我们也说二元函数的图形是一张曲面.

例如,由空间解析几何知道,线性函数

$$z = ax + by + c$$

的图形是一张平面；由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的图形是球心在原点、半径为 a 的球面，它的定义域是圆形闭区域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2\}.$$

在 D 的内部任一点 (x, y) 处，这函数有两个对应值，一个为 $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，另一个为 $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. 因此，这是多值函数，它有两个单值分支：

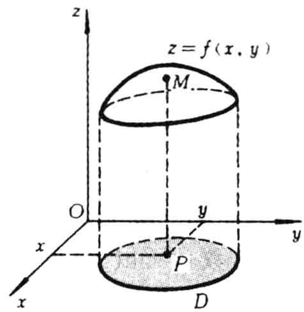

图 8-5

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad 及 \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

前者表示上半球面，后者表示下半球面. 以后除了对多元函数另作声明外，总假定所讨论的函数是单值的；如果遇到多值函数，可以找出它的(全部)单值分支，然后加以讨论.

三、多元函数的极限

我们先讨论二元函数 $z = f(x, y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$，即 $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ 时的极限.

这里 $P \to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0，也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零，即

$$|PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \to 0.$$

与一元函数的极限概念类似，如果在 $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ 的过程中，对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，我们就说 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 时的极限. 下面用"$\varepsilon - \delta$"语言描述这个极限概念.

定义 2 **设函数 $f(x, y)$ 在开区域(或闭区域) D 内有定义，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点. 如果对于任意给定的正数 ε，总**

存在正数 δ,使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in D$,都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

或 $$f(x,y)\to A\quad(\rho\to 0),$$

这里 $\rho=|PP_0|$.

为了区别于一元函数的极限,我们把二元函数的极限叫做二重极限.

例 4 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$,

求证 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$$

证 因为

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见,对任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时,总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立,所以 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$$

我们必须注意,所谓二重极限存在,是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数都无限接近于 A.因此,如果 $P(x,y)$ 以某一特殊方式,例如沿着一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,即使函数无限接近于某一确定值,我们还不能由此断定函数的极

限存在.但是反过来,如果当 $P(x,y)$以不同方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时,函数趋于不同的值,那末就可以断定这函数的极限不存在.下面用例子来说明这种情形.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然,当点 $P(x,y)$沿 x 轴趋于点(0,0)时,

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{x\to 0}0=0;$$

又当点 $P(x,y)$沿 y 轴趋于点(0,0)时,

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}0=0.$$

虽然点 $P(x,y)$以上述两种特殊方式(沿 x 轴或沿 y 轴)趋于原点时函数的极限存在并且相等,但是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$并不存在.这是因为当点 $P(x,y)$沿着直线 $y=kx$ 趋于点(0,0)时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着 k 的值的不同而改变的.

以上关于二元函数的极限概念,可相应地推广到 n 元函数 $u=f(P)$即 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$上去.

关于多元函数的极限运算,有与一元函数类似的运算法则.

例 5 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解 这里 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$在区域$D_1=\{(x,y)\mid x<0\}$和区域 $D_2=\{(x,y)\mid x>0\}$内都有定义,$P_0(0,2)$同时为 D_1 及 D_2 的边界点.但无论在 D_1 内还是在 D_2 内考虑,下列运算都是正确的:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\cdot 2=2.$$