◎金星教育系列丛书　全心全意解疑解难◎

总主编/薛金星

中学教材全解®

ZHONGXUE JIAOCAI QUANJIE

学案版

高中数学

必修2

配套人民教育出版社实验教科书

陕西出版集团　陕西人民教育出版社

A版

中学教材全解

ZHONGXUE JIAOCAI QUANJIE

高中数学

A

◎金星教育系列丛书　全心全意解疑解难◎

中学教材全解

学案版

高中数学必修2

配套人民教育出版社实验教科书

总 主 编　薛金星
本册主编　朱宏毅
副 主 编　丰振海
编　　委　李成苍　杨祥明

A版

陕西出版集团　陕西人民教育出版社

敬告读者——全解【学案版】与全解【工具版】特点

JINGGAODUZHE

全解【学案版】(大16开本)

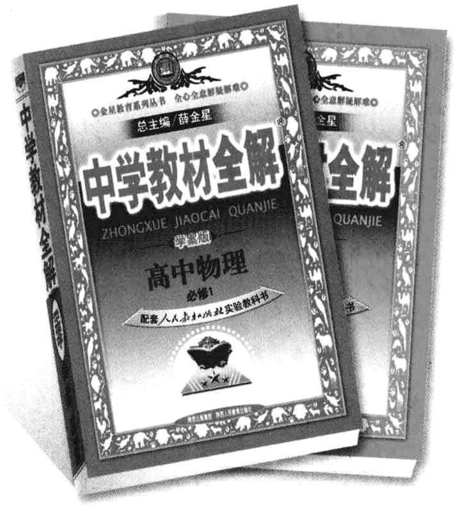
全方位学习解决方案
全过程攻克高考考点

六大特点:

◇讲解精要化　◇重点突出化
◇例题典型化　◇训练针对化
◇总结专题化　◇高考同步化

三大功能:

●学生用它同步备考
●教师用它备课上课
●师生共用直击高考



高中各学科各版本必修选修齐全

全解【工具版】(大32开本)

高中各学科各版本必修选修齐全

教材同步学习工具书
学生自学巩固好帮手

四大特点:

◇备查性　◇工具性
◇资料性　◇备考性

三大功能:

●学生用它能自学
●教师有它能备课
●家长拿它能辅导

图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解:学案版:人教实验A版.高中数学.2:必修/薛金星主编.—西安:陕西人民教育出版社,2011.5

ISBN 978—7—5450—0952—1

Ⅰ.①中… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第084199号

中学教材全解(学案版)·高中数学必修2(人教实验A版)

陕西出版集团
陕西人民教育出版社 出版发行
(陕西省西安市丈八五路58号)
各地书店经销 北京市汇祥印务有限公司
880×1230毫米 16开本 11.5印张 480千字
2011年7月第1版 2011年7月第1次印刷
ISBN 978—7—5450—0952—1
定价:22.80元

零距离直击高考

模块考点及对应高考题分布概览

考　点		经典高考题分布及分值		
立体几何初步	简单几何体		全国Ⅱ理，11，5分	
	直观图和三视图	山东理，11，5分[第13页] 浙江理，3，5分[第13页] 课标全国理，6，5分[第109页] 浙江文，7，5分	广东理，6，5分[第24页] 北京理，3，5分[第25页] 课标全国文，15，4分 湖南理，13，5分 辽宁理，15，5分	上海文，16，4分 福建文，5，5分
	点、线、面之间的位置关系	浙江理，4，5分[第58页] 辽宁理，8，5分[第58页] 山东文，19，12分[第59页] 北京文，17，14分[第59页] 课标全国文，18，12分[第60页] 四川理，3，5分 天津文，17，13分 重庆理，9，5分[第116页] 大纲全国文，15，5分[第117页] 重庆理，19，12分[第117页] 江西理，8，5分[第117页]	浙江理，6，5分[第58页] 山东理，3，5分[第59页] 陕西文，17，12分 北京文，17，13分 安徽文，19，13分 课标全国文18，12分 江西理，10，5分 广东文，18，14分	天津文，19，12分[第59页] 辽宁文，19，12分[第112页] 山东理，5，5分 山东文，18，12分 海南宁夏理，7，5分 江苏，16，14分 浙江文，4，5分
	简单几何体的面积和体积	天津文，10，5分[第20页] 安徽理，6，5分[第25页] 湖南理，3，5分[第25页] 陕西理，5，5分[第25页] 课标全国理，15，4分 天津理，10，5分 广东理，7，5分[第116页]	浙江理，12，4分[第25页] 课标全国理，10，5分[第116页] 天津理，12，4分[第116页] 福建理，12，4分 北京理，8，5分 山东文，20，12分 湖北理，13，5分 安徽理，8，5分	山东理，4，5分 海南宁夏理，11，5分 广东文，17，13分 天津理，12，4分 浙江理，12，4分 辽宁理，11，5分
解析几何初步	直线与直线的方程	重庆文，13，5分[第119页] 安徽文，4，5分[第119页] 浙江文，12，4分[第119页]	安徽文，4，5分[第86页]	上海文，15，4分[第87页] 全国Ⅰ文，16，5分[第86页] 安徽文，7，5分[第86页]
	圆与圆的方程	辽宁文，13，4分[第91页] 重庆理，8，5分[第100页] 湖南文，15，5分[第105页] 湖北文，14，5分[第105页] 江西理，9，5分 广东文，2，5分 大纲全国文，11，5分 四川文，3，5分	四川理，14，4分[第105页] 上海文，7，4分[第105页] 江苏，9，5分[第105页] 山东理，16，4分[第119页] 广东理，12，5分 湖南文，14，5分[第119页] 江西理，9，5分[第119页] 湖北理，9，5分 课标全国，15，4分	江苏，18，16分[第120页] 天津文，14，4分[第119页] 上海文，17，4分 广东文，13，4分 辽宁理，4，5分
	空间直角坐标系			安徽文，11，5分

注：表中[第×页]表示该题在本书中的页码. 标有页码的题目，具有典型性、新颖性，读者通过这些题目足以洞析、把握该考点；未标注本书页码的高考题，因其综合性等其他因素，不适合于本书读者的同步使用，故本书未选用.

目录

CONTENTS

第一章　空间几何体

1.1　空间几何体的结构 …………………………（1）

1.1.1　柱、锥、台、球的结构特征（Ⅰ）…………（1）

一、棱柱的结构特征 …………（2）

二、棱锥的结构特征 …………（2）

三、棱台的结构特征 …………（3）

教材习题答案与解析 …………（123）

1.1.1　柱、锥、台、球的结构特征（Ⅱ）…………（5）

1.1.2　简单组合体的结构特征 …………（5）

一、圆柱的结构特征 …………（5）

二、圆锥的结构特征 …………（6）

三、圆台的结构特征 …………（6）

四、球的结构特征 …………（7）

五、简单组合体的结构特征 …………（8）

教材习题答案与解析 …………（123）

1.2　空间几何体的三视图和直观图 …………（10）

1.2.1　中心投影与平行投影 …………（10）

1.2.2　空间几何体的三视图 …………（10）

一、三视图 …………（10）

二、常见柱、锥、台、球的三视图 …………（10）

三、简单组合体的三视图 …………（11）

四、三视图的识别 …………（11）

教材习题答案与解析 …………（123）

1.2.3　空间几何体的直观图 …………（13）

一、水平放置的平面图形的直观图画法 …………（14）

二、空间几何体的直观图画法 …………（14）

三、由三视图画直观图 …………（14）

教材习题答案与解析 …………（123）

1.3　空间几何体的表面积与体积 …………（16）

1.3.1　柱体、锥体、台体的表面积与体积 …………（16）

一、棱柱的表面积 …………（17）

二、棱锥的表面积 …………（17）

三、棱台的表面积 …………（17）

四、圆柱的表面积 …………（17）

五、圆锥的表面积 …………（18）

六、圆台的表面积 …………（18）

七、柱体、锥体与台体的体积 …………（18）

八、柱、锥、台体的表面积与体积之间的关系 …………（19）

教材习题答案与解析 …………（124）

1.3.2　球的体积和表面积 …………（21）

一、球的表面积与体积公式 …………（21）

二、球的截面问题 …………（21）

教材习题答案与解析 …………（124）

本章解决方案 …………（23）

本章知能检测 …………（26）

教材章末习题答案与解析 …………（126）

目录

CONTENTS

第二章　点、直线、平面之间的位置关系

2.1　空间点、直线、平面之间的位置关系 ……（28）
2.1.1　平面 ……（28）
一、平面的概念和画法 ……（29）
二、平面的基本性质 ……（29）
教材习题答案与解析 ……（127）
2.1.2　空间中直线与直线之间的位置关系 ……（33）
一、空间中两条直线的位置关系 ……（33）
二、平行公理 ……（34）
三、空间等角定理 ……（34）
四、异面直线所成的角 ……（34）
教材习题答案与解析 ……（127）
2.1.3　空间中直线与平面之间的位置关系 ……（36）
2.1.4　平面与平面之间的位置关系 ……（36）
一、直线与平面之间的位置关系 ……（37）
二、平面与平面之间的位置关系 ……（37）
三、平面划分空间问题 ……（37）
教材习题答案与解析 ……（127）
2.2　直线、平面平行的判定及其性质 ……（39）
2.2.1　直线与平面平行的判定 ……（39）
2.2.2　平面与平面平行的判定 ……（39）
一、直线与平面平行的判定 ……（39）
二、平面与平面平行的判定 ……（39）
教材习题答案与解析 ……（128）
2.2.3　直线与平面平行的性质 ……（42）
2.2.4　平面与平面平行的性质 ……（42）
一、直线与平面平行的性质 ……（42）
二、平面与平面平行的性质 ……（42）
教材习题答案与解析 ……（128）
2.3　直线、平面垂直的判定及其性质 ……（45）
2.3.1　直线与平面垂直的判定 ……（45）
一、直线与平面垂直 ……（45）
二、直线与平面垂直的判定定理 ……（46）
三、直线与平面所成的角 ……（46）
教材习题答案与解析 ……（129）
2.3.2　平面与平面垂直的判定 ……（49）
一、二面角 ……（49）
二、平面与平面垂直的判定 ……（50）
教材习题答案与解析 ……（130）
2.3.3　直线与平面垂直的性质 ……（53）
2.3.4　平面与平面垂直的性质 ……（53）
一、直线与平面垂直的性质 ……（53）
二、平面与平面垂直的性质 ……（53）
三、空间中的距离 ……（54）
教材习题答案与解析 ……（130）
本章解决方案 ……（57）
本章知能检测 ……（60）
教材章末习题答案与解析 ……（131）

目录

CONTENTS

第三章　直线与方程

3.1　直线的倾斜角与斜率 …… (63)
3.1.1　倾斜角与斜率 …… (63)
一、直线的倾斜角 …… (64)
二、直线的斜率 …… (64)
三、过两点的直线的斜率公式 …… (64)
教材习题答案与解析 …… (132)
3.1.2　两条直线平行与垂直的判定 …… (67)
一、根据斜率判定两条直线平行 …… (67)
二、根据斜率判定两条直线互相垂直 …… (68)
教材习题答案与解析 …… (132)
3.2　直线的方程 …… (69)
3.2.1　直线的点斜式方程 …… (69)
一、直线的点斜式方程 …… (69)
二、直线的斜截式方程 …… (70)
教材习题答案与解析 …… (133)
3.2.2　直线的两点式方程 …… (72)
一、直线的两点式方程 …… (72)
二、直线的截距式方程 …… (73)
教材习题答案与解析 …… (134)
3.2.3　直线的一般式方程 …… (75)
一、直线的一般式方程 …… (75)
二、利用直线的一般式方程判断两直线的位置关系 …… (76)
三、平行直线系、垂直直线系和中心直线系 …… (77)
教材习题答案与解析 …… (134)
3.3　直线的交点坐标与距离公式 …… (79)
3.3.1　两条直线的交点坐标 …… (79)
3.3.2　两点间的距离 …… (79)
一、两条直线的交点坐标 …… (79)
二、平面上两点间的距离 …… (80)
教材习题答案与解析 …… (136)
3.3.3　点到直线的距离 …… (82)
3.3.4　两条平行直线间的距离 …… (82)
一、点到直线的距离公式 …… (82)
二、两平行线间的距离 …… (82)
教材习题答案与解析 …… (136)
本章解决方案 …… (85)
本章知能检测 …… (87)
教材章末习题答案与解析 …… (139)

目录

CONTENTS

第四章　圆与方程

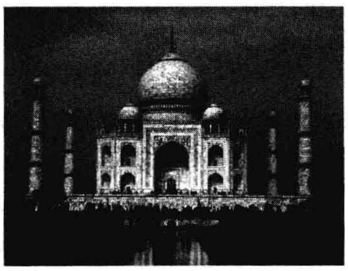
4.1　圆的方程 …………………………………………………………（89）
4.1.1　圆的标准方程 …………………………………………………（89）
一、圆的标准方程 ……………………………………………………（90）
二、点与圆的位置关系 ………………………………………………（90）
三、几种特殊位置的圆的方程 ………………………………………（90）
教材习题答案与解析 …………………………………………………（141）
4.1.2　圆的一般方程 …………………………………………………（92）
一、圆的一般方程 ……………………………………………………（92）
二、由圆的一般方程判断点与圆的位置关系 ………………………（93）
教材习题答案与解析 …………………………………………………（141）
4.2　直线、圆的位置关系 ……………………………………………（94）
4.2.1　直线与圆的位置关系 …………………………………………（94）
一、直线与圆的位置关系及判断方法 ………………………………（95）
二、圆的切线方程 ……………………………………………………（95）
三、圆系方程 …………………………………………………………（96）
教材习题答案与解析 …………………………………………………（142）
4.2.2　圆与圆的位置关系 ……………………………………………（98）
4.2.3　直线与圆的方程的应用 ………………………………………（98）
一、圆与圆的位置关系及判断方法 …………………………………（98）
二、圆系方程 …………………………………………………………（99）
三、用坐标方法解决平面几何问题的“三步曲” ……………………（99）
教材习题答案与解析 …………………………………………………（142）
4.3　空间直角坐标系 …………………………………………………（101）
4.3.1　空间直角坐标系 ………………………………………………（101）
4.3.2　空间两点间的距离公式 ………………………………………（101）
一、空间直角坐标系 …………………………………………………（101）
二、空间中两点间的距离公式 ………………………………………（101）
三、空间中两点的中点坐标公式 ……………………………………（102）
教材习题答案与解析 …………………………………………………（146）
本章解决方案 …………………………………………………………（103）
本章知能检测 …………………………………………………………（105）
教材章末习题答案与解析 ……………………………………………（147）

模块解决方案

模块知识建构 …………………………………………………………（108）
核心知识梳理 …………………………………………………………（109）
专题一　三视图和直观图 ……………………………………………（109）
专题二　柱、锥、台体和球的表面积和体积 ………………………（110）
专题三　直线、平面平行或者垂直的证明 …………………………（110）
专题四　空间角的计算 ………………………………………………（111）
专题五　直线方程的求解 ……………………………………………（113）
专题六　直线与圆的位置关系 ………………………………………（113）
思想方法归纳 …………………………………………………………（114）
方法一　分类讨论思想 ………………………………………………（114）
方法二　数形结合思想 ………………………………………………（114）
方法三　函数与方程思想 ……………………………………………（115）
五年考题博览 …………………………………………………………（116）
模块知能检测 …………………………………………………………（120）
教材习题答案与解析 …………………………………………………（123）
本书习题答案与解析 …………………………………………………（149）

第一章 空间几何体

本章激趣导学



左图展示了一个建筑恢宏的气势，仔细观察周围，你能发现，在恢宏建筑上有的元素在其他地方也大量存在着，比如形状、大小等.

事实上，纷繁复杂的物质世界都是那些既有大小又有一定几何形状的物体构成的，把这些物体其他特征忽略，只看它们的形状和大小.这就是这章要研究的内容.

通过学习本章，达到以下要求：

(1)认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

(2)能画出简单空间图形(长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合)的三视图，能识别上述的三视图所表示的立体模型，会用斜二测画法画出它们的直观图.

(3)会用平行投影与中心投影两种方法，画出简单空间图形的三视图与直观图，了解空间图形的不同表示形式.

(4)会画某些建筑物的三视图与直观图(在不影响图形特征的基础上，尺寸、线条等不作严格要求).

(5)了解球、棱柱、棱锥、台的表面积和体积的计算公式(不要求记忆公式).

1.1 空间几何体的结构

1.1.1 柱、锥、台、球的结构特征(Ⅰ)

学前要点预览

XUEQIANYAODIANYULAN

知识要点图解

- 多面体
  - 棱柱
    - 定义
    - 结构特征
    - 特殊的四棱柱
  - 棱锥
    - 定义
    - 结构特征
    - 特殊的棱锥
  - 棱台
    - 定义
    - 结构特征
    - 与棱柱、棱锥的关系

相关知识链接

1.空间几何体与人类的生活密切相关，人类的吃、穿、住、行无一离开空间几何体，由于人类生活、生产与空间几何体密不可分，就有了专门研究这些空间几何体的学科——立体几何.

2.在小学和初中已学过棱柱、棱锥、圆柱、圆锥、球等简单几何体，接触到它们的一些特点，在此基础上，进一步研究一些空间几何体的结构特征.

知识要点精解

ZHISHIYAODIANJINGJIE

重点难点解读

一、棱柱的结构特征

1. 棱柱的定义

一般地,有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的多面体叫做棱柱.

理解棱柱的定义需要注意以下两点:

(1)有两个互相平行的面;

(2)其余各面都是四边形,且每相邻的两个四边形的公共边都互相平行.

2. 棱柱的各部分名称

在棱柱中,两个互相平行的面叫做棱柱的底面,简称底;其余各面叫做棱柱的侧面;相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱;侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点. 如图 1-1-1.

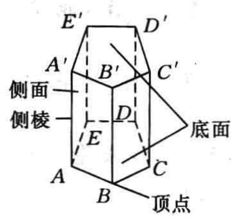


图 1-1-1

3. 棱柱的分类

(1)按底面边数分类,底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……

(2)按侧棱是否与底面垂直,可分为直棱柱、斜棱柱.

4. 一些特殊的四棱柱(如图 1-1-2)

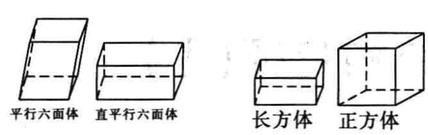


图 1-1-2

(1)底面是平行四边形的四棱柱叫做平行六面体.

(2)侧棱与底面垂直的平行六面体叫做直平行六面体.

(3)底面是矩形的直平行六面体叫做长方体.

(4)棱长都相等的长方体叫做正方体.

根据以上定义可知:

{四棱柱}$\subsetneqq${平行六面体}$\subsetneqq${直平行六面体}$\subsetneqq${长方体}$\subsetneqq${正方体}.

二、棱锥的结构特征

1. 棱锥的定义

一般地,有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,由这些面所围成的多面体叫做棱锥.

2. 棱锥的结构特征

由棱锥的概念可得出棱锥的两个本质特征,这两个特征缺一不可:

(1)有一个面是多边形;

转下页左栏

经典例题诠释

例 1　如图 1-1-9,长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,

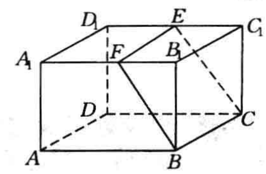


图 1-1-9

(1)这个长方体是棱柱吗?如果是,是几棱柱? 为什么?

(2)用平面 $BCEF$ 把这个长方体分成两部分,各部分的几何体还是棱柱吗?

解题提示:辨别所给几何体是否是棱柱,关键是看所给几何体是否具备了棱柱的结构特征.

解:(1)是棱柱. 且是四棱柱,因为长方体中相对的两个面是平行的,其余的每个面都是矩形(四边形),且每相邻的两个矩形的公共边都平行,符合棱柱的结构特征,所以是棱柱.

(2)截后的各部分都是棱柱,分别为棱柱 $BB_1F\text{-}CC_1E$ 和棱柱 $ABFA_1\text{-}DCED_1$.

点评:判断棱柱,依据棱柱的定义,先确定两个平行的面——底面,再判断其余面——侧面是否为四边形及侧棱是否平行.

例 2　两个面互相平行,其余各面都是平行四边形所围成的几何体一定是棱柱,这种说法正确吗?

解:棱柱的定义是:有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的多面体叫做棱柱. 而"其余各面都是平行四边形"不等价于"其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行". 如图 1-1-10 所示几何体,满足题目中所给条件,但不满足棱柱的定义. 因为四边形 $A_1B_1B_2A_2$ 与四边形 ABB_1A_1 相邻,四边形 BCC_1B_1 与四边形 ABB_1A_1 也相邻,但它们的公共边 A_1B_1、BB_1 不互相平行.

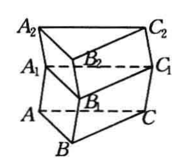


图 1-1-10

点评:判断几何体是否为棱柱,依据的是棱柱的定义. 其中的两个本质特征缺一不可,更不可随意变动.

例 3　如图 1-1-11,将装有水的长方体水槽固定底面一边后倾斜一个角度,则倾斜后水槽中的水形成的几何体是(　　)

A. 棱柱　　B. 棱台

C. 棱柱与棱台的组合体　D. 不能确定

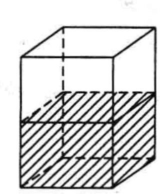


图 1-1-11

解析:由棱柱的结构特征知,无论怎样倾斜,都会形成三棱柱或四棱柱.

答案:A

转下页右栏

(2)其余各面都是有一个公共顶点的三角形.

3. 棱锥的各部分名称

在棱锥中，这个多边形面叫做棱锥的底面或底；有公共顶点的各个三角形面叫做棱锥的侧面. 如图 1-1-3.

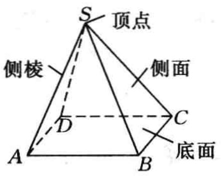


图 1-1-3

4. 棱锥的分类

按底面边数分类，底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别称为三棱锥、四棱锥、五棱锥……

其中三棱锥也叫四面体，它是面数最少的多面体. 四面体因其底面为三角形，而使得其四个面全部为三角形. 这一特殊性，使我们解决问题时顶点或底面的选择就比较灵活，可根据题目需要灵活选择顶点或底面. 如图 1-1-4.

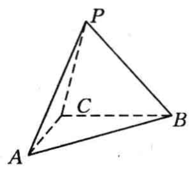


图 1-1-4

5. 特殊的棱锥

正棱锥：一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面的射影是底面多边形的中心.

三、棱台的结构特征

1. 棱台的概念

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分叫做棱台.

2. 棱台各部分的名称

原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的下底面和上底面；其他各面叫做棱台的侧面；相邻侧面的公共边叫做棱台的侧棱；上、下底面之间的距离叫做棱台的高. 如图 1-1-5，四边形 $A'B'C'D'$ 和四边形 $ABCD$ 分别是上、下底面，四边形 $ABB'A'$，$BCC'B'$ 等是侧面，AA'，BB' 等是侧棱，$O'O$ 是该棱台的高.

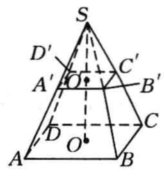


图 1-1-5

3. 棱台的结构特征

(1)上、下底面互相平行；

(2)各侧棱延长后必交于一点.

判断一个几何体是否是棱台，关键是看这个几何体是否满足：(1)两个底面的对应边平行；(2)这些对应边成比例. 若同时具备这两个条件，则这个几何体就是棱台，只具备一个条件时不是棱台.

转下页左栏

例 4　棱锥是一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体. 这种说法对吗？如果不对，你能画出反例图形吗？

解：这种说法不对. 棱锥的定义是：有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做棱锥. 而“其余各面都是三角形”并不等价于“其余各面都是有一个公共顶点的三角形”，故此说法是错误的. 如图 1-1-12 所示的几何体满足此说法，但它不是棱锥，理由是$\triangle ADE$ 和$\triangle BCF$ 无公共顶点.

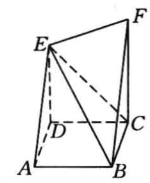


图 1-1-12

例 5　在四棱锥的四个侧面中，直角三角形最多可有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

解析：如图 1-1-13，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，取四棱锥 $A_1\text{-}ABCD$，则此四棱锥的四个侧面全为直角三角形.

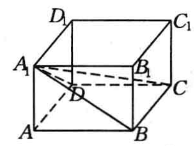


图 1-1-13

答案：D

点评：本题对给出的四棱锥没有带任何附加条件，只给出了思考、探索的方向，即探索侧面为直角三角形的四棱锥应是怎样的模型，让人展开充分的想象，对培养学生的空间想象力有很大帮助.

例 6　在正方体上任意选择 4 个顶点，它们可能是如下各种几何形体的四个顶点，这些几何形体是________.(写出所有正确结论的序号)

①矩形；②不是矩形的平行四边形；③有三个面为等腰直角三角形，另一面为等边三角形的四面体；④每个面都是等边三角形的四面体；⑤每个面都是直角三角形的四面体.

解析：①正方体每个面上的四个顶点，对角面上的四个顶点，连接都可得到矩形.

③如图 1-1-14，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，选取点 A、D、C、D_1，连接所得四面体，其中三个面：面 ADC、面 ADD_1、面 DCD_1 均为等腰直角三角形，面 ACD_1 为等边三角形.

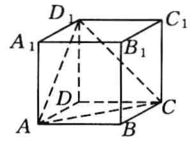


图 1-1-14

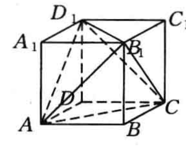


图 1-1-15

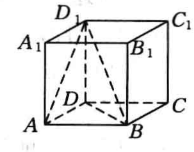


图 1-1-16

④如图 1-1-15，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，选取 A、C、D_1、B_1 四个顶点，连接所得四面体四个面全为等边三角形.

⑤如图 1-1-16，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，选取点 A、B、D、D_1，连接所得几何体四个面全为直角三角形.

答案：①③④⑤

转下页右栏

4. 棱台的分类

由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台……由正棱锥截得的棱台叫做正棱台. 如图 1-1-6.

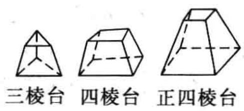


图 1-1-6

5. 棱柱、棱锥、棱台之间的关系

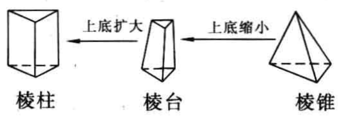


图 1-1-7

如图 1-1-7,当棱台的上底面扩大为与下底面相同时,棱台转化为棱柱;当棱台的上底面收缩为一点时,棱台转化为棱锥. 棱柱的两个底面是全等的多边形,棱台的两个底面是相似的多边形,棱锥只有一个底面;棱柱的侧面是平行四边形,棱台的侧面是梯形,棱锥的侧面是三角形.

方法技巧归纳

一、棱台问题转化为棱锥问题

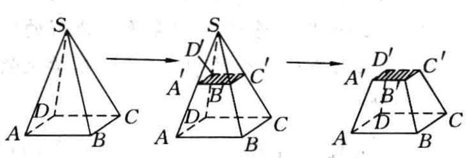


图 1-1-8

图 1-1-8 展示的是棱台的形成过程,由此可知台与锥之间存在着联系,故在解决与棱台有关问题时常转化为相应的棱锥的问题.

二、四面体顶点选取的灵活性应用

在后面求点到面的距离时常用到的"等体积法"就是利用了四面体的这一特征.(后面将用到)

例 7　以长方体的各顶点为顶点,能构建四棱锥的个数是(　　)

A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 48

解析:设长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,若点 A 为四棱锥的顶点,则底面可以为不过点 A 的矩形 $A_1B_1C_1D_1$,矩形 BCC_1B_1,矩形 CDD_1C_1,矩形 BB_1D_1D,矩形 BCD_1A_1,矩形 CDA_1B_1,共有 6 个不同的四棱锥,8 个顶点可以分别作为四棱锥的顶点,共 $6\times8=48$(个)不同的四棱锥.

答案:D

点评:解题时从观察图形入手,先确定顶点,再确定底面. 确定底面时应注意,除长方形的表面外还有长方体的对角面,要做到不重不漏.

例 8　已知四棱台的上底面、下底面分别为边长 4,8 的正方形,各侧棱长均相等,且侧棱长为 $\sqrt{17}$,求四棱台的高.

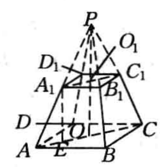


图 1-1-17

解法一:如图 1-1-17,设 O_1,O 分别为正方形 $A_1B_1C_1D_1$,正方形 $ABCD$ 的中心,连接 PO_1,则 P,O_1,O 三点共线.

$A_1O_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,

$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

$\because \triangle PA_1O_1\backsim\triangle PAO$,$\therefore \frac{A_1O_1}{AO}=\frac{PA_1}{PA}$,即$\frac{PA_1}{PA}=\frac{1}{2}$.

又$\because PA=PA_1+A_1A=2PA_1$,$\therefore PA_1=A_1A=\sqrt{17}$.

在 Rt $\triangle PO_1A_1$ 中,$PO_1=\sqrt{PA_1^2-A_1O_1^2}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-(2\sqrt{2})^2}=3$.

又$\because \frac{PO_1}{PO}=\frac{A_1O_1}{AO}$,$\therefore PO=6$. $\therefore OO_1=3$.

$\therefore$ 四棱台的高为 3.

解法二:如图 1-1-17,在轴截面 ACC_1A_1 中,$A_1A=CC_1=\sqrt{17}$,$A_1C_1=4\sqrt{2}$,$AC=8\sqrt{2}$,过 A_1 作 $A_1E\perp AC$ 交 AC 于点 E.

在 Rt$\triangle A_1EA$ 中,$AE=\frac{1}{2}(8\sqrt{2}-4\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,$A_1A=\sqrt{17}$,

$\therefore A_1E=\sqrt{A_1A^2-AE^2}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-(2\sqrt{2})^2}=3$,

即四棱台的高为 3.

本节提升训练

BENJIETISHENGXUNLIAN

[答案见第 149 页]

1. 下列描述中,不是棱柱的结构特征的是(　　)　←要点一 [例 1]

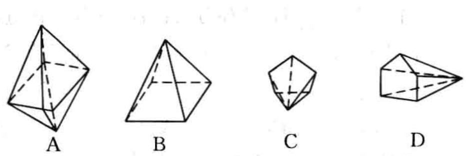
A. 有一对面互相平行

B. 侧面都是四边形

C. 相邻两个侧面的公共边都互相平行

D. 所有侧棱都交于一点

2. 下面图形所表示的几何体中,不是棱锥的是(　　)　←要点二 [例 4]



3. 下列说法正确的是(　　)　←要点一、二、三

A. 有两个面平行,其余各面都是四边形的几何体叫棱柱

B. 有两个面平行,其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱

C. 有一个面是多边形,其余各面都是三角形的几何体叫棱锥

D. 棱台各侧棱的延长线交于一点

4. 下列说法正确的是(　　)　要点一→ [例 2]

A. 棱柱的所有面中,至少有两个面互相平行

B. 棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面

C. 棱柱的侧面不一定是平行四边形

D. 棱柱的侧面一定是平行四边形,但它的底面一定不是平行四边形

5. 由六个面围成,并且每个面都是平行四边形,则该　[要点]→

几何体为(　　)

A. 正方体　B. 长方体　C. 四棱柱　D. 棱台

6. 四棱柱的面数及棱数分别是(　　)　←要点一

A. 6,4　B. 7,3　C. 6,6　D. 6,12

7. 某棱台的上、下底面对应边之比为 1∶2,则上、下底面面积之比是(　　)　←要点三 [例 8]

A. 1∶2　B. 1∶4　C. 2∶1　D. 4∶1

8. 斜四棱柱侧面至少可有几个面不是矩形(　　)　←要点一

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

9. 一个棱柱至少有________个面;面数最少的棱柱有________个顶点,有________条棱.　←要点一

10. 以正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点中四个为顶点的,且 4 个面全为直角三角形的四面体是________.(写出符合题意的两个)　←要点二 [例 6]

要点一→ 11. 一个无盖的正方体盒子的平面展开图如图 1-1-18,A、B、C 是展开图上的三点,则在正方体盒子中,$\angle ABC=$________.

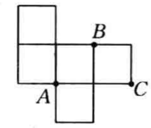


图 1-1-18

要点二→ 12. 如图 1-1-19,在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别为 AB,BC 的中点,沿图中虚线将4个三角形折起,使点 A、B、C 重合,重合后记为点 P.

问:(1)折起后形成的几何体是什么几何体?

(2)这个几何体共有几个面,每个面的三角形有何特点?

(3)若正方形边长为 $2a$,则每个面的三角形面积为多少?

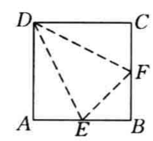
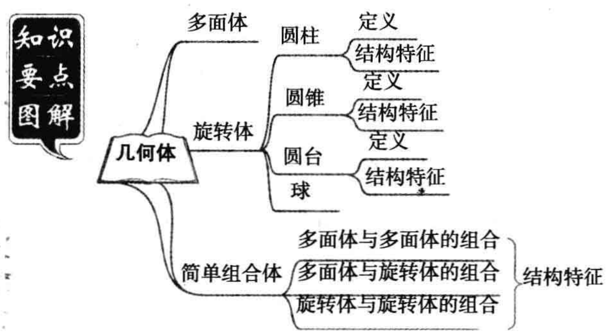


图 1-1-19

1.1.1　柱、锥、台、球的结构特征(Ⅱ)
1.1.2　简单组合体的结构特征

学前要点预览
XUEQIANYAODIANYULAN



相关知识链接

1. 设圆的半径为 r,则它的周长为 $2\pi r$,面积为 πr^2.

2. 两条直线同时与三条平行直线相交,被截得的线段长对应成比例.

3. 若两个三角形相似,则其面积之比等于对应边长之比的平方.

4. 在 Rt△ABC 中,若 $\angle C=90^\circ$,则有 $AC^2+BC^2=AB^2$.

知识要点精解
ZHISHIYAODIANJINGJIE

重点难点解读

一、圆柱的结构特征

1. 圆柱的定义

如图 1-1-20,以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆柱.

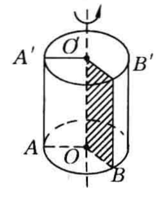


图 1-1-20

2. 圆柱的各部分的名称

在圆柱中,旋转轴叫做圆柱的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面;平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面;无论旋转到什么位置,不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线,如图 1-1-20.

圆柱有两个大小相同的底面,有无数条母线,而且圆柱的所有母线都平行且相等.

转下页左栏

经典例题诠释

例 1　给出下列命题:

①圆柱的底面是圆;

②经过圆柱任意两条母线的截面是一个矩形;

③连接圆柱上、下底面圆圆周上两点的线段是圆柱的母线;

④圆柱的任意两条母线互相平行.

其中正确的命题的个数为(　　)

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

解析:圆柱的底面是圆面而不是圆,所以命题①不正确;圆柱的任意一条母线都与圆柱的轴平行,所以圆柱的任意两条母线互相平行,又圆柱的母线与底面垂直,故命题②④正确;连接圆柱上、下底面圆圆周上两点的线段不一定与圆柱的轴平行,所以命题③不正确.

答案:B

转下页右栏

3. 圆柱的结构特征

(1)平行于底面的截面是与底面大小相同的圆面，如图1-1-21(1).

(2)过轴的截面(轴截面)是全等的矩形，如图1-1-21(2).

(3)圆柱的侧面展开图是矩形，如图1-1-21(3).

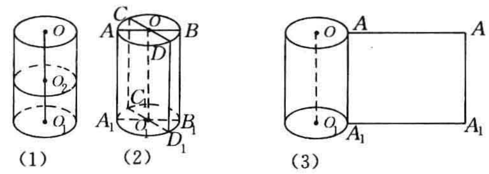


图 1-1-21

(4)圆柱的轴及母线与底面垂直，母线互相平行且相等.

(5)圆柱的轴截面能反映出圆柱的底面半径、母线长等信息.

二、圆锥的结构特征

1. 圆锥的定义

以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫圆锥. 其特点是:圆锥有一个圆面，一个顶点，其他为曲面.

2. 圆锥各部分名称

旋转轴直线 SO 叫做圆锥的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆锥的底面;三角形的斜边绕轴旋转形成的曲面叫做圆锥的侧面;无论旋转到什么位置，斜边所在的边都叫做圆锥的母线;轴 SO 叫做圆锥的高，如图1-1-22.

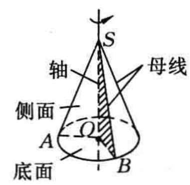


图 1-1-22

3. 圆锥的结构特征

(1)圆锥的轴垂直于底面，圆锥的底面是一个圆面.

(2)用平行于底面的平面截圆锥，截面是圆面.

(3)圆锥的轴截面为等腰三角形，其腰长等于圆锥的母线长，其底边长为圆锥的底面圆的直径长.

(4)圆锥的顶点与底面圆周上任意一点的连线都是圆锥的母线.

(5)圆锥的侧面展开图为扇形，其中扇形的半径为圆锥的母线长，扇形的弧长为圆锥的底面圆的周长，如图1-1-23.

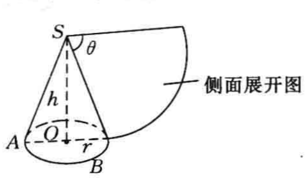


图 1-1-23

三、圆台的结构特征

1. 圆台的定义

用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分叫做圆台. 另外圆台还可认为是:

(1)圆台可以看作是直角梯形以垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其他三边旋转形成的面所围成的几何体;

(2)圆台也可以看作是等腰梯形以其底边的中垂线为轴，各边旋转形成的面所围成的几何体.

转下页左栏

例2　已知一个圆柱的轴截面是一个正方形，且其面积为100，求圆柱的底面半径、母线长.

解题提示:圆柱的轴截面为矩形，矩形的一边长等于圆柱的底面直径长，另一边长等于母线长.

解:设圆柱的底面半径为 r，母线长为 l，

则 $\begin{cases}2r=l,\\ 2r\cdot l=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=5,\\ l=10.\end{cases}$

点评: 在圆柱的有关运算中经常会用到轴截面，弄清圆柱的轴截面包含了圆柱的哪些信息是用好它的关键. 另外，这也是解决空间问题的一个重要思想方法——空间问题平面化的一个重要体现.

例3　若圆锥的母线长为4，轴截面的面积为8，则圆锥的高是________.

解析:设圆锥的底面半径为 r，则圆锥的高为 $\sqrt{16-r^2}$. 由题意知，$\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\sqrt{16-r^2}=8$，可得 $r=2\sqrt{2}$，

$\therefore\ \sqrt{16-r^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

答案:$2\sqrt{2}$

例4　圆台侧面的母线长为 $2a$，母线与轴的夹角为 $30°$，一个底面的半径是另一个底面半径的2倍. 求两底面的半径与两底面面积之和.

解题提示:注意数形结合以及轴截面的应用.

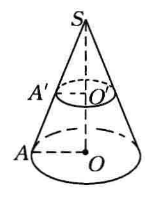


图 1-1-32

解:设圆台上底面半径为 r，则下底面半径为 $2r$，如图1-1-32，$\angle ASO=30°$，

在 $Rt\triangle SA'O'$ 中，$\frac{r}{SA'}=\sin 30°$，$\therefore\ SA'=2r$.

在 $Rt\triangle SAO$ 中，$\frac{2r}{SA}=\sin 30°$，$\therefore\ SA=4r$.

$\therefore\ SA-SA'=AA'$，即 $4r-2r=2a$，$\therefore\ r=a$.

$\therefore\ S=S_1+S_2=\pi r^2+\pi(2r)^2=5\pi r^2=5\pi a^2$.

$\therefore$ 圆台的上底面半径为 a，下底面半径为 $2a$，两底面面积之和为 $5\pi a^2$.

点评: 求解有关旋转体的基本量问题，一般借助于轴截面构造直角三角形，在三角形中，有关量的关系就容易找了.

例5　图1-1-33是圆台 $O'O$ 的轴截面 $ABCD$，圆台的高为 h，母线与轴的夹角为 $90°-\alpha$，轴截面中对角线 $AC\perp AB$，求(1)圆台的母线长 l;(2)上、下底面的面积之和.

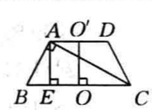


图 1-1-33

解:(1)作 $AE\perp BC$ 于 E，则 $AE=h$，

因为轴截面 $ABCD$ 是等腰梯形，

所以 $O'A$，OB 分别是上、下底面圆的半径.

由题意知，$\angle BAE=90°-\alpha$，$\angle BAC=90°$，

所以 $\angle EAC=\angle B=\alpha$. 所以 $O'A+OB=EC=h\cdot\tan\alpha$，

$OB-O'A=BE=\frac{h}{\tan\alpha}$，所以 $OB=\frac{1}{2}\left(h\cdot\tan\alpha+\frac{h}{\tan\alpha}\right)$，

$O'A=\frac{1}{2}\left(h\cdot\tan\alpha-\frac{h}{\tan\alpha}\right)$，$l=\frac{h}{\sin\alpha}$.

转下页右栏

2. 圆台各部分的名称及表示

圆锥的底面和截面叫做圆台的底面.在圆台中,除去底面后的其他面叫做圆台的侧面,圆锥的母线被平面截后剩余的部分叫做圆台的母线;用表示轴的字母表示圆台,如图 1-1-24 所示的圆台可以记作圆台 OO_1.

图 1-1-24

3. 圆台的结构特征

(1)圆台的底面是两个半径不相等的圆面,两圆面互相平行且与轴垂直;

(2)平行于底面的截面是圆面;

(3)母线长相等,各母线延长后相交于一点;

(4)圆台的轴截面是等腰梯形,其上底和下底分别为上、下底面的直径,腰长为圆台的母线长,其高也为圆台的高,如图 1-1-25;

(5)圆台的侧面展开图为扇环,如图 1-1-26.

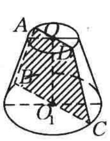


图 1-1-25

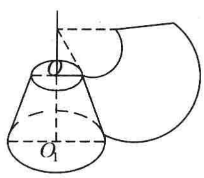


图 1-1-26

4. 知识拓展

(1)圆台和棱台统称为台体,都可以看作是锥体用平行于底面的平面所截得的.

(2)柱、锥、台三者之间的联系:当台体的下底面保持不变,而上底面越来越大时,台体就越来越接近于柱体,当上底面增大到与下底面相同时,台体转化为柱体;当台体的上底面越来越小时,台体就越来越接近于锥体,当上底面收缩为一个点时,台体转化为锥体,如图 1-1-27.

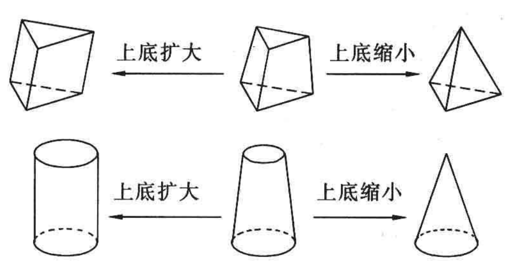


图 1-1-27

四、球的结构特征

1. 球的定义

以半圆的直径所在直线为旋转轴,半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体,简称球,如图 1-1-28.

2. 球的各部分的名称

半圆的圆心叫做球的球心;半圆的半径叫做球的半径;半圆的直径叫做球的直径,如图 1-1-28.

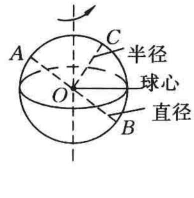


图 1-1-28

3. 球的结构特征

用一个平面去截球,截面是圆面,而且球心和截面圆心的连线垂直于截面,球心到截面的距离 d 与球的半径 R 及

转下页左栏

(2) $S=\pi\cdot O'A^2+\pi\cdot OB^2=\pi\cdot\frac{1}{4}\left(h\cdot\tan\alpha-\frac{h}{\tan\alpha}\right)^2+\pi\cdot\frac{1}{4}\left(h\cdot\tan\alpha+\frac{h}{\tan\alpha}\right)^2=\frac{\pi h^2}{2}\cdot\tan^2\alpha+\frac{\pi h^2}{2\tan^2\alpha}=\frac{\pi h^2}{2}\left(\tan^2\alpha+\frac{1}{\tan^2\alpha}\right)$.

点评: 把空间几何体问题转化为平面图形问题是解决立体几何问题的基本思想方法.

例 6　已知球的两个平行截面的面积分别为 5π 和 8π,它们位于球心的同侧,且距离为 1,那么这个球的半径为多少?

解:如图 1-1-34,设 $O_1A=r_1$,$O_2C=r_2$,则 $\pi r_1^2=5\pi$,$\pi r_2^2=8\pi$,∴ $r_1^2=5$,$r_2^2=8$.

又 $R^2=OO_2^2+r_2^2$,$R^2=OO_1^2+r_1^2$,

∴ $OO_1^2=R^2-5$,$OO_2^2=R^2-8$.

两式相减得$(OO_1+OO_2)(OO_1-OO_2)=3$.又 $OO_1-OO_2=1$,∴ $OO_1+OO_2=3$.

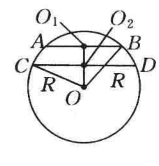


图 1-1-34

联立得 $\begin{cases}OO_1-OO_2=1,\\OO_1+OO_2=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}OO_1=2,\\OO_2=1.\end{cases}$

∴ $R^2=1^2+8=9$,∴ $R=3$,即这个球的半径为 3.

例 7　以如图 1-1-35 所示的直角三角形的一边所在的直线为旋转轴,其余两边旋转形成的曲面围成的旋转体是怎样的几何体?试画出各个旋转体.

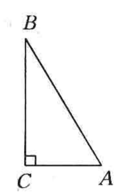


图 1-1-35

解:以 BC 所在的直线为旋转轴,其余两边旋转形成的曲面围成的旋转体是圆锥,记为圆锥 BC(如图 1-1-36(1));以 AC 所在的直线为旋转轴,其余两边旋转形成的曲面围成的旋转体也是圆锥,记为圆锥 AC(如图 1-1-36(2));以 AB 所在的直线为旋转轴,其余两边旋转形成的曲面围成的旋转体是一个组合体,可以看作是由两个圆锥组合而成的(如图 1-1-36(3)).

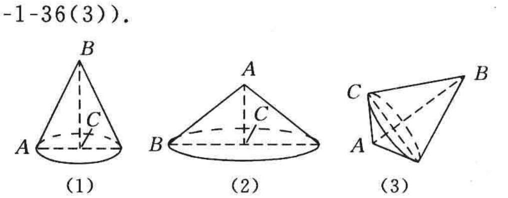


图 1-1-36

点评: 画旋转体关键是确定哪几个点绕着轴旋转,先画出点旋转所成的圆,再画出几条关键的母线.

例 8　如图 1-1-37 所示的平面结构,绕中间轴旋转一周,形成的几何体形状为(　　)

A. 一个半球,一个圆柱中间挖去一个圆锥

B. 一个半球,一个圆锥

C. 一个半球,一个圆柱

D. 一个球,一个圆柱中间挖去一个圆锥

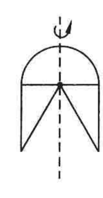


图 1-1-37

解析:绕中间轴旋转一周后,半圆则形成一个半球,下面则形成一个圆柱中间挖去一个圆锥.

答案:A

转下页右栏

截面的半径 r 有下面的关系：$r=\sqrt{R^2-d^2}$，如图 1-1-29.

为了认识和利用地球，人们使用经线和纬线划分地球表面区域. 经线是端点为南北极点的半圆，纬线是圆，纬线圈所在平面与过南北极点的直径垂直(直线与平面垂直将在第二章学习).

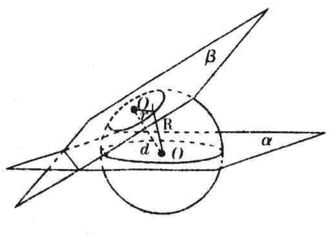


图 1-1-29

五、简单组合体的结构特征

1. 简单组合体

由简单几何体组合而成的几何体称为简单组合体.

2. 简单组合体构成的基本形式

(1)由简单几何体拼接而成.

(2)由简单几何体截去或挖去一部分而成.

3. 简单组合体的结构特征

简单组合体的结构特征可由组成它的简单几何体的结构特征来描述.

(1)多面体与多面体的组合.

由两个或两个以上多面体组成的几何体，如图 1-1-30(1).

(2)多面体与旋转体的组合.

由多面体与旋转体组成的几何体，如图 1-1-30(2).

(3)旋转体与旋转体的组合.

由两个或两个以上旋转体组成的几何体，如图 1-1-30(3).

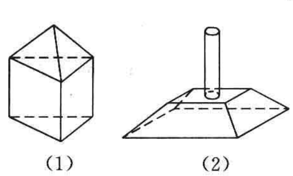

(1)　(2)　(3)

图 1-1-30

方法技巧归纳

一、空间几何体的判断

判断一个几何体是哪类几何体，关键要紧扣几何体的结构特征，特征中所要求的条件缺一不可.

示例　判断如图 1-1-31 所示的几何体是否是台体，并说明理由.

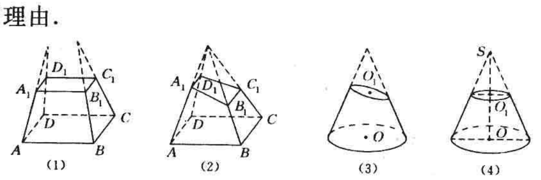
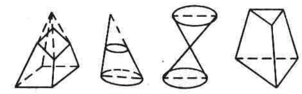


图 1-1-31

解：图(1)(2)(3)中的几何体都不是台体，图(4)中的几何体是台体. 理由如下：图(1)中 AA_1，DD_1 相交于一点，而 BB_1，CC_1 相交于另一点，不能还原成锥体，故图(1)中的几

转下页左栏

例 9　下列几何体是台体的是(　　)



解析：根据棱台、圆台的定义，可得其两个底面互相平行，因而 A 错；对于选项 B，虽然满足两底面互相平行，但组成台体的母线长不相等，因而不是圆台；选项 C 则为两个圆锥形成的简单组合体.

答案：D

例 10　(1)如图 1-1-38(1)，圆台的上、下底面半径分别为 5 cm、10 cm，母线长 $AB=20$ cm，从圆台母线 AB 的中点 M 拉一条绳子绕圆台侧面转到 A 点. 求：

①绳子的最短长度；

②在绳子最短时，上底圆周上的点到绳子的最短距离.

(2)圆锥底面半径为 r，母线长为 $4r$，求从底面一点 A 出发绕圆锥侧面一周再回到 A 的最短距离.

解题提示：利用侧面展开图，求点 A 到 M 的线段长；只要求得圆台所在圆锥的顶点 O 到 AM 的最小值 OQ，$OQ-OB$ 即为所求.

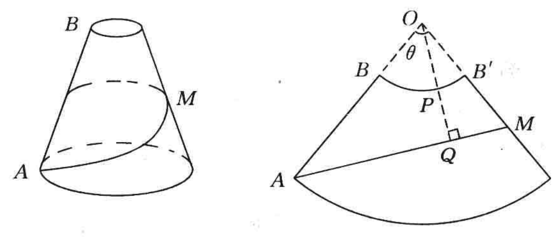


图 1-1-38

解：(1)①如图 1-1-38(2)所示的侧面展开图的圆心角为 θ，绳子的最短距离为侧面展开图中线段 AM 的长，其中，设 $OB'=l$，则

$$\begin{cases} l\theta=2\times5\pi, \\ (l+20)\theta=2\times10\pi,\end{cases}\text{解得}\begin{cases} l=20, \\ \theta=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$\therefore$ $OA=40$ cm，$OM=30$ cm，

$\therefore$ $AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=50$ cm，

即绳子的最短长度为 50 cm.

②作 $OQ\perp AM$ 于 Q，交弧 BB' 于 P，则 PQ 为所求最短距离.

$\because$ $OA\cdot OM=AM\cdot OQ$，$\therefore$ $OQ=24$ cm.

故 $PQ=24-20=4$(cm)，即上底圆周上的点到绳子的最短距离为 4 cm.

(2)如图 1-1-39，画出圆锥的侧面展开图，则最短距离即为线段 AA'的长.

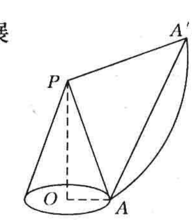


图 1-1-39

$\because$ $\overset{\frown}{AA'}=2\pi r$，

$\therefore$ $\angle A'PA=\dfrac{2\pi r}{4r}=\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $\triangle A'PA$ 为等腰直角三角形，

$\therefore$ $AA'=4\sqrt{2}r$，即所求最短距离为 $4\sqrt{2}r$.

例 11　已知圆锥的底面半径为 r，高为 h，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆锥，求这个正方体的棱长.

转下页右栏