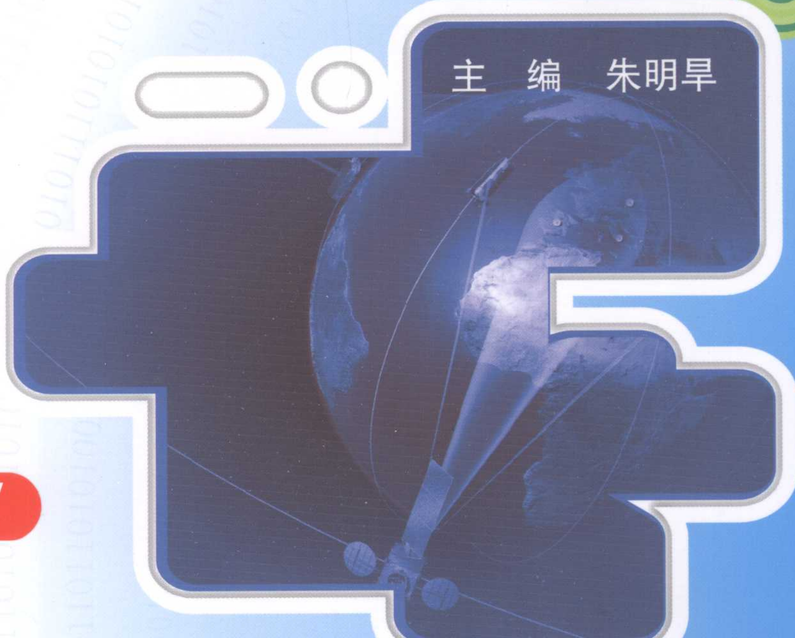
21世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材

信号与线性系统

主 编 朱明早



讲述基本理论与方法，内容选取少而精
配以大量实例和算题，组织编排全而清

提供 电子课件 www.pup6.com
提供 习题答案 www.pup6.com

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材

信号与线性系统

主　编　朱明早
参　编　叶　华　刘尘尘

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书系统地讨论了信号与系统的基本理论和基本方法，共分为8章，主要内容包括信号与系统的基本概念，连续系统的时域分析，离散系统的时域分析，连续信号与系统的频域分析，离散信号与系统的频域分析，连续系统的 s 域分析，离散系统的 z 域分析，系统的状态变量分析。本书条理清晰，深入浅出，配有大量实例，便于自学。

本书可作为高等学校通信工程、电子电气工程、计算机工程、自动控制工程等专业信号与系统课程的教材，也作为相关专业、相关领域的科技工作者的参考书，还可作为一本考研的辅导书。

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统/朱明旱主编. —北京：北京大学出版社，2013.7
（21世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材）
ISBN 978-7-301-22776-3

Ⅰ.①信…　Ⅱ.①朱…　Ⅲ.①信号理论—高等学校—教材②线性系统—高等学校—教材　Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第148340号

书　　名：信号与线性系统
著作责任者：朱明旱　主编
策 划 编 辑：程志强
责 任 编 辑：程志强
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-22776-3/TN・0099
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　新浪官方微博:@北京大学出版社
电 子 信 箱：pup_6@163.com
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62750667　出版部 62754962
印　刷　者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　16.5印张　384千字
2013年7月第1版　2013年7月第1次印刷
定　　价：33.00元

前　言

在通信、自动控制、信号与信息处理、电路与系统等领域，信号与线性系统是基本的研究对象。在过去的几十年中，信号与线性系统的研究取得了重要的进展，并形成了相当完整和成熟的理论。信号与线性系统中所涉及的许多概念、方法、原理和结论，对于通信系统、数字滤波、最优控制、随机控制、计算机控制等都有重要的作用，是学习这些课程必不可少的基础。基于此，国内外很多大学都毫不例外地将信号与线性系统作为通信工程、电子电气工程、计算机工程、自动控制工程等专业的主干基础课，并将它作为研究生入学考试的专业课程之一。

本书以大学本科理工科学生为主要读者对象，系统地阐述了处理信号和分析线性系统的基本方法。在内容的选取上，本书根据少而精的原则论述了信号与线性系统的基本概念、基本方法和基本理论。全书牢牢地把握信号处理与线性系统分析这条主线，分别对连续和离散情况、时域法和变换法进行了介绍，既注意了连续和离散、时域法和变换法之间的内在联系，又保持了它们之间的相对独立，使读者在阅读本书的过程中，既能感到新知识的不断拓展，又能体会到旧知识的不断巩固，从而高效地掌握本课程的知识。

全书共分为8章：第1章信号与系统的基本概念，主要介绍了和信号与系统分析相关的基本概念和运算，是信号与线性系统理论的基础的总括；第2章连续系统的时域分析，主要讲述了时域里分析连续系统的响应和特性的方法，以及运用卷积积分运算求解连续系统零状态响应的方法；第3章离散系统的时域分析，主要讲述了时域里分析离散系统响应和特性的方法，以及运用卷积和运算求解LTI离散系统零状态响应的方法；第4章连续信号与系统的频域分析，主要介绍了分析连续信号频率特性和连续系统的频率响应的方法；第5章离散信号与系统的频域分析，主要介绍了分析离散信号频率特性和离散系统的频率响应的方法；第6章连续系统的s域分析，主要介绍了运用拉普拉斯变换法分析连续系统响应和特性的方法；第7章离散系统的z域分析，主要介绍了运用z变换法分析离散系统响应和特性的方法；第8章系统的状态变量分析，初步地介绍了运用状态变量法分析连续和离散系统响应及稳定性的方法。

本书的知识脉络非常清晰，每章都有展示各知识点联系的【本章知识架构】和【本章教学目标与要求】可供授课教师教学参考，【引例】中介绍了全章的知识背景、应用和特点，用以激发读者的学习热情，同时又使读者能够迅速把握全章的实质。对于不易理解的知识点，通过【理解】和【知识要点提醒】补充必要的基础知识，引导读者使其理解程度达到一定的深度和广度。【实用小窍门】介绍了实用的解题思路和技巧，提升读者运用知识的能力。【知识联想】将相似的知识进行比较，帮助读者加强新旧知识和不同学科知识之间的整理和融合。在讲述基本理论和方法的同时，通过【拓展阅读】使读者在学习本课程的同时，思维和视野又不仅仅局限于本课程的内容。在知识内容的安

排和描述上，编者力求让读者在阅读的过程中品味到虽然处理方法在变，但其最基本的原理和思维方法却始终不变，“知识”的本质内涵没变，从而可以从中体会到学习的乐趣。

编者参考了国内外的经典教材，并根据多年的教学思考，花费了一年多的时间编写本书，衷心希望本书对学习信号与线性系统的读者能够有所帮助。由于编者水平有限，书中难免有不足和疏漏之处，欢迎使用本教材的读者批评指正。若有疑问，可联系作者 E-mail: zhumh_123@163. com。

编　者

2013 年 4 月于湖南长沙

目　录

第 1 章

信号与系统的基本概念

本章知识架构

- 信号与系统的基本概念
  - 信号与系统的定义
    - 信号的定义
    - 系统的定义
  - 信号的分类
    - 确定信号 / 随机信号
    - 连续信号 / 离散信号
    - 周期信号 / 非周期信号
    - 能量信号 / 功率信号
  - 常用的信号
    - 单位阶跃信号 / 阶跃序列
    - 单位冲激信号 / 单位序列
    - 斜坡信号 / 斜坡序列
    - 门函数信号 / 矩形序列
  - 信号的基本运算
    - 相加和相乘 / 翻转和时移
    - 尺度变换 / 混合运算
  - 描述和分析系统的方法
    - 输入输出法 / 状态变量法
    - 时域法 / 变换域法
  - 系统的特性
    - 记忆性 / 线性
    - 时不变性 / 因果性
    - 稳定性

本章教学目标与要求

- 理解信号和系统的定义、信号与系统的相互关系。
- 熟悉信号的表示、分类和各类信号的特点。
- 了解常用信号的特点，掌握单位阶跃信号和单位冲激信号的性质。
- 掌握信号的相加、相乘、翻转、时移、尺度变换和混合运算等基本运算。
- 初步了解描述和分析系统的方法。
- 理解系统各特性的具体含义。

引例

人们的生产和生活都离不开信号。人们常常用信号来交流信息，传递消息或命令。系统是普遍存在的，从基本粒子到星系，从人类社会到人的思维，从无机界到有机界，从自然科学到社会科学，系统无所不在。

案例一：

我国古代人利用烽火台上的火或烟，向远方军队传递敌人入侵的消息；十字路口的红绿灯告诉人们应该停或行，这都属于光信号。当人们说话时，声波传递到他人的耳朵，使他人了解说话人的意图；铃声传达上下课的命令，这都属于声信号。电视机天线接收的电视信息以及手机接收的来电信息，这些都属于电信号。

案例二：

人们在自然科学、工程、经济、社会等许多领域中，广泛地运用系统的概念，如天体系统、生产系统、教育系统、交通系统、电力系统、通信系统(如图 1.1 所示)等。手机、电视机、计算机网等都可以看成是系统。

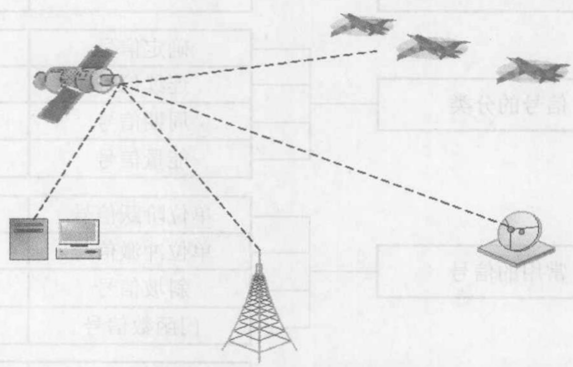


图 1.1 通信系统示意图

那么，信号和系统的准确定义是什么？怎样分类信号？怎样对其进行运算？系统有哪些特性？描述和分析系统的方法有哪些？这些都是本章所要讲授的重要内容。

1.1 信号与系统的定义

1. 信号的定义

信号是信息的表现方式，是带有信息(如语言、音乐、图像等)的随时间(或空间)变化的某种物理量，其图像称为信号的波形。

信号广泛地出现在人们的生产和生活领域中，并携带着特定的信息。我国古代人利用烽火台上的火或烟，向远方军队传递敌人入侵的消息，这里的“火”和“烟”就是信号，它所传递的“敌人入侵”就是该信号所携带的信息。在现代社会中，语言、音乐、图像等往往先变换为电流、电压、电磁波或光，然后再通过电缆、空间或光缆传输给对方。这些物理量(电流、电压、电磁波或光)都是信号，常被称为电信号、光信号，它们携带着特定的语言、音乐、图像等信息。

为了运用数学工具对信号进行分析，需要先对信号的特点或变化规律进行描述。信号一般可用包含一个或多个变量的函数来描述。在电路中，信号通常是随时间变化的电压或电流，这类信号可用随时间变化的一维函数来描述，即信号是变量 t 的函数 $f(t)$。一幅图像的灰度，可用随空间坐标 (x, y) 变化的二维函数 $f(x, y)$ 来描述。一段视频序列图像的灰度，则可用随时间 t 和空间坐标 (x, y) 变化的三维函数 $f(x, y, t)$ 来描述。

由于信号常用函数来描述，在以后讨论信号的有关问题时，“信号”与“函数”两词常不加区别互相通用。本书所讨论的信号，主要是一维信号。

2. 系统的定义

系统是由若干个相互作用和相互依赖的事物组成的具有特定功能的整体。这些事物可能是一些个体、元件、零件，也可能本身就是一个子系统。

企业家可将企业的原材料消耗、工资的支付额、产品的数量、产品的销售额的关系看成经济系统，研究如何获得最大利润。生理学家将人体的骨、软骨、关节和骨骼肌组成的整体看成人体的运动系统，研究它们对人体的支撑和保护作用，以及产生运动的机理。地球系统科学把地球看成一个由地核、地幔、岩石圈、水圈、大气圈、生物圈和行星组成的系统，研究各组成部分之间的相互作用，解释地球的动力和演化。

在分析系统属性时，人们常常不关心它的内部细节，而是将其抽象为理想的模型，以便揭示系统的主要性能，如经济学家用循环流量图模型来研究经济参与者如何相互交易；生物教师用塑料人体模型来讲授基础解剖学；电工教师在分析电路时，常常认为电阻是理想的线性元件，导线的电阻为零等。虽然这些模型略去了许多细节，不包括系统各事物的每一个特征，但是研究这些模型对了解系统属性却非常有用。

系统的基本功能就是对输入信号进行“加工”、“处理”，并产生输出信号。信号与系统是紧密相连的，信号离开了系统，就无法实现“加工”、“处理”；系统没有信号，也就失去了作用。

知识联想

如果将系统当成是“硬件”，则信号便是“软件”。客观世界中的“硬件”与“软件”往往是相互依存的，如计算机的硬件和软件，人们的肉体和思想等。

图 1.2 是大家熟悉的整流滤波电路，其中输入交流电压 $u_i(t)$ 为输入信号，输出直流电压 $u_o(t)$ 为输出信号，通常输入信号也称为激励，输出信号也称为响应。变压器、整流桥、电阻 R、电容 C_1 和 C_2 组成了整流滤波电路系统。该系统的功能就是将交流电压 $u_i(t)$ 变压、整流、滤波后，变为直流电压 $u_o(t)$ 输出。

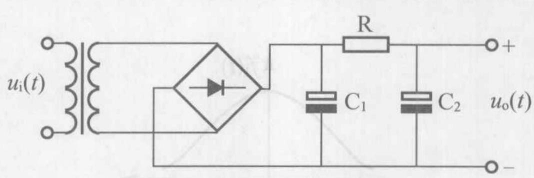


图 1.2　整流滤波电路

信号分析与系统分析是信号传输、信号处理、信号综合及系统综合的共同理论基础。本书系统地论述了信号分析与系统分析的基本理论和方法，以便为读者学习和研究通信理论、控制理论、数字图像处理和数字语音处理理论打下基础。

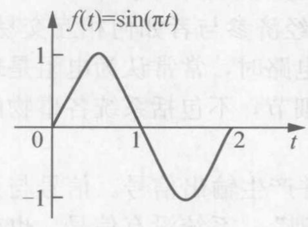
1.2 信号的分类

为了便于分析各信号的共性与个性，常从不同的角度对信号进行分类。大体上可将信号分为：确定信号和随机信号，连续信号和离散信号，周期信号和非周期信号，能量信号和功率信号。另外有的学者还将信号分为：偶信号和奇信号，实信号和虚信号，普通信号的奇异信号，时限信号和无时限信号，因果信号和反因果信号。

1. *确定信号和随机信号*

确定信号是指可以用确定的时间函数关系式来描述的信号，对于任意指定的时刻，都有其确定的量值。如图 1.3(a)所示的正弦信号 $f(t)=\sin(\pi t)$，要确定信号 $f(t)$在任意时刻 t_0 的量值，只需将 t_0 值代入函数关系式即可，即 $f(t_0)=\sin(\pi t_0)$。

随机信号又称不确定信号，是指无法用确定的时间函数来描述的信号，如某地区的气温变化信号、上证指数走势信号等。图 1.3(b)为 2011 年 12 月 30 日的上证指数走势信号，可见该曲线无法用确定的时间函数来描述。研究随机信号要用概率、统计的方法。



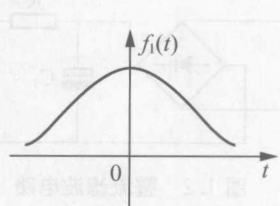
(a) 正弦信号

(b) 上证指数走势信号

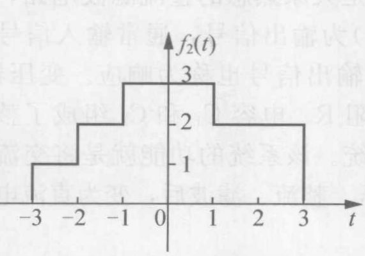
图 1.3　确定信号与随机信号

2. *连续信号和离散信号*

在连续时间范围内($-\infty<t<\infty$)有定义的信号称为连续时间信号，简称连续信号。连续信号常用 $f(t)$表示，如图 1.4 所示。



(a) 幅值连续的连续信号



(b) 幅值离散的连续信号

图 1.4　连续信号

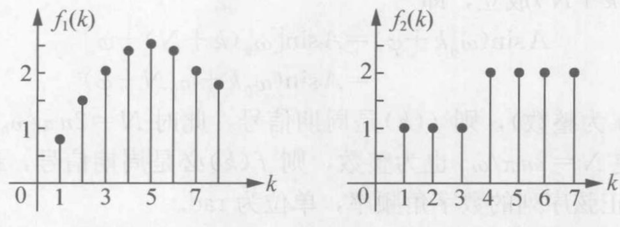
比较连续信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$，会发现同是连续信号，但两信号又有本质的不同。前

者的幅值连续，后者的幅值离散。这种幅值连续的信号又被称为模拟信号。

知识要点提醒

“幅值连续”是指对于任意时刻 t_0，当时间增量趋于 0 时，相应的幅值增量也趋于 0，读者可参考高等数学中的“函数连续”定义。

仅在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。这里“离散”是指信号的定义域是离散的，如果信号是时间的 t 的函数，则该信号只在一些离散时刻有值，其余的时间均没有，常用 $f(kT)$ 表示。本书只讨论离散时间间隔 T 为常数的情况，为了方便，又将 $f(kT)$ 简记为 $f(k)$，这样的离散信号也常称为序列，如图 1.5 所示。



(a) 幅值连续的离散信号　　(b) 幅值离散的离散信号

图 1.5　离散信号

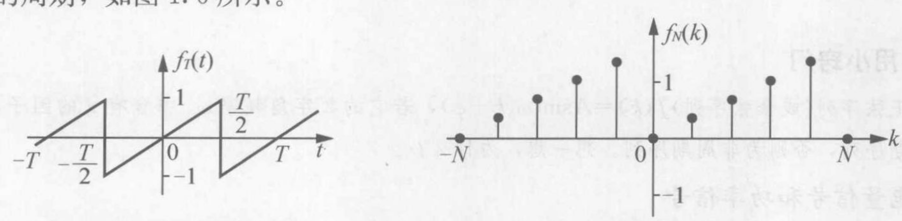
比较图 1.5 的离散信号 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$，会发现同是离散信号，但两信号的幅值又有本质的不同，前者的幅值为连续区间[0，2.5]上的实数，后者的幅值只为{1.0，2.0}这两个离散值。这种幅值离散的序列，又被称为数字信号。

理解

模拟信号经过抽样(即时间离散)，就变成了离散信号。离散信号再经过幅度量化，即幅值离散，就变成了数字信号。将模拟信号转换成离散信号的过程中，采用多大的抽样频率合适呢？这个问题将会在 4.7 节中阐述。

3. 周期信号和非周期信号

周期信号具有在整个时间轴上不断重复变化的特点，重复的时间间隔 T(或整数 N)称为信号的周期，如图 1.6 所示。



(a) 连续周期信号　　(b) 离散周期信

图 1.6　周期信号

连续周期信号满足

$$f_T(t)=f_T(t+T),\ (T>0) \tag{1-1}$$

离散周期信号满足

$$f_N(k)=f_N(k+N),\ (N>0) \tag{1-2}$$

最小的不为零的时间间隔 T(或整数 N)称为信号的基本周期。

不满足式(1-1)或式(1-2)的信号称为非周期信号。非周期信号的幅值在整个时间轴上不具有重复变化的特点，也可认为它的周期为无穷大。

对于正弦序列(或余弦序列)$f(k)=A\sin(\omega_0 k+\varphi)$，如果它为周期信号，需要满足什么具体条件呢？

根据周期信号的定义可知，若 $f(k)=A\sin(\omega_0 k+\varphi)$为周期信号，就必然能够找到整数 N，使 $f(k)=f(k+N)$成立，即

$$\begin{aligned}A\sin(\omega_0 k+\varphi)&=A\sin[\omega_0(k+N)+\varphi]\\&=A\sin(\omega_0 k+\omega_0 N+\varphi)\end{aligned}$$

若 $\omega_0 N=2n\pi$(n 为整数)，则 $f(k)$是周期信号，此时 $N=2n\pi/\omega_0$。也就是在 n 为整数的情况下，若能使 $N=2n\pi/\omega_0$ 也为整数，则 $f(k)$必是周期信号，最小正整数 N 就是 $f(k)$的周期，ω_0 为正弦序列的数字角频率，单位为 rad。

【例 1.1】 判断下列各序列是否为周期信号，如果是周期信号，确定其周期。

(1) $f_1(k)=\sin\left(\frac{\pi}{7}k+\frac{\pi}{5}\right)$　　(2) $f_2(k)=\sin\left(\frac{1}{7}k+\frac{\pi}{5}\right)$　　(3) $f_3(k)=\cos(3\pi k)$

解：

(1) $\omega_0=\frac{\pi}{7}$，$N=\frac{2n\pi}{\omega_0}=14n$

n 为整数时，N 也为整数，故 $f_1(k)$是周期序列。当 $n=1$ 时，对应的大于零的最小正整数 14，就是 $f_1(k)$的周期。

(2) $\omega_0=\frac{1}{7}$，$N=\frac{2n\pi}{\omega_0}=14\pi n$

n 为整数时，N 不可能为整数，它是无理数，故 $f_2(k)$不是周期序列。

(3) $\omega_0=3\pi$，$N=\frac{2n\pi}{\omega_0}=\frac{2n}{3}$

N 可取到整数，$n=3$ 时，取到非零的最小正整数 2，故 $f_3(k)$是周期序列。2 是 $f_3(k)$的周期。

实用小窍门

对于正弦序列(或余弦序列)$f(k)=A\sin(\omega_0 k+\varphi)$，若它的数字角频率 ω_0 中含有 π 的因子，该序列一定是周期序列，否则为非周期序列。想一想，为什么？

4. 能量信号和功率信号

对于连续信号 $f(t)$，在区间$(-\infty,+\infty)$的能量 E 和平均功率 P，分别为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-3}$$

$$P=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-4}$$

这里的 E 和 P，并不是信号 $f(t)$ 在系统中的能量和平均功率，因为实际的能量和平均功率还与负载有关。这两个量可以用于描述信号的特性和比较信号，例如，信号不同分量的 E 和 P 表示了各分量间的相对重要性。如果 $f(t)$ 是电流信号或电压信号，此时的 E 和 P 就是它在单位电阻上的能量和平均功率。

对于离散信号 $f(k)$，在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的能量 E 和平均功率 P，分别为

$$E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(k)|^2 \tag{1-5}$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|f(k)|^2 \tag{1-6}$$

若信号的能量 E 有界(即 $0<E<\infty$)，则称其为能量有限信号，简称能量信号。由于能量信号的能量有界，而时间为无穷长，所以它的平均功率 $P\to 0(P=E/t)$。

若信号的平均功率 P 有界(即 $0<P<\infty$)，则称其为功率有限信号，简称功率信号。由于功率信号的平均功率有界，而时间为无穷长，所以它的能量 $E\to\infty(E=Pt)$。

一个信号可以既不是能量信号，也不是功率信号，但一个信号不能既是能量信号又是功率信号。

【例 1.2】 判断下列信号哪些是能量信号，哪些是功率信号。

(1) $f_1(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$　　(2) $f(k)=3$　　(3) $f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}$

解：

(1) $E=\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$

由于 $0<E<\infty$，故该信号是能量信号。

(2) $E=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=-N}^{N}|f(k)|^2=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=-N}^{N}3^2=\lim\limits_{N\to\infty}9(2N+1)\to\infty$

$P=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{k=-N}^{N}|f(k)|^2=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{k=-N}^{N}3^2=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{9(2N+1)}{(2N+1)}=9$

由于 $E\to\infty$，$0<P<\infty$，故该信号不是能量信号，而是功率信号。

(3) $E=\int_{-\infty}^{\infty}|f_2(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\Big|_{-\infty}^{\infty}\to\infty$

$P=\lim\limits_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\lim\limits_{a\to\infty}\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{2a}$

根据洛必达法则，$\lim\limits_{a\to\infty}\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{2a}\to\infty$，故该信号既不是能量信号，也不是功率信号。

1.3　常用的信号

本课程中常用的信号有单位阶跃信号和阶跃序列、单位冲激信号和单位序列、斜坡信号和斜坡序列、门函数信号和矩形序列。

1.3.1 单位阶跃信号和阶跃序列

1. 单位阶跃信号

单位阶跃信号常用$\varepsilon(t)$表示，它的定义为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}\tag{1-7a}$$

图形如图1.7(a)所示，该信号在$t=0$时刻产生了幅度为1的阶跃变化。对于阶跃时刻$t=0$的值，常不给出具体定义。阶跃幅度为1，就是单位阶跃中“单位”二字的含义。

如果信号在$t=t_0$时刻产生幅度为1的阶跃变化，该信号的定义为

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\0 & t<t_0\end{cases}\tag{1-7b}$$

图形如图1.7(b)所示(图中$t_0>0$)。

2. 阶跃序列

阶跃序列常用$\varepsilon(k)$表示，它的定义为

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1 & k\geqslant 0\\0 & k<0\end{cases}\tag{1-7c}$$

图形如图1.7(c)所示。

如果将$\varepsilon(k)$向右平移k_0单位，它的定义为

$$\varepsilon(k-k_0)=\begin{cases}1 & k\geqslant k_0\\0 & k<k_0\end{cases}\tag{1-7d}$$

图形如图1.7(d)所示(图中$k_0>0$)。

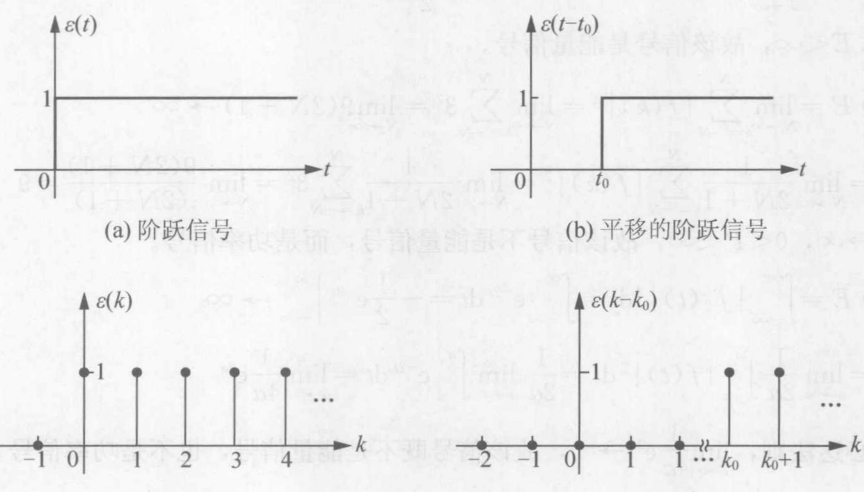
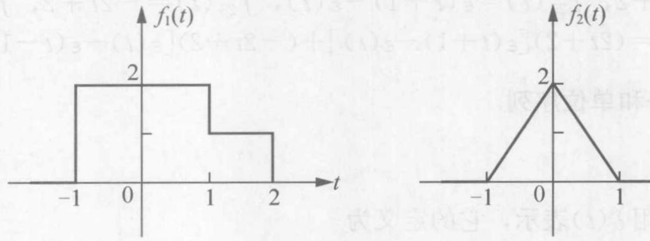


图1.7 单位阶跃信号和阶跃序列的图形

运用单位阶跃信号和阶跃序列，可以简化分段函数信号的表达式。

【例1.3】 信号$f_1(t)$和$f_2(t)$的波形如图1.8所示，写出用单位阶跃信号表示的表达式。



(a) $f_1(t)$　　　　(b) $f_2(t)$

图 1.8　$f_1(t)$和 $f_2(t)$的波形

解：

(1) 图 1.8(a) 中的信号 $f_1(t)$，可看成是图 1.9 所示的 3 个信号 $f_{11}(t)$、$f_{12}(t)$、$f_{13}(t)$ 的相加。

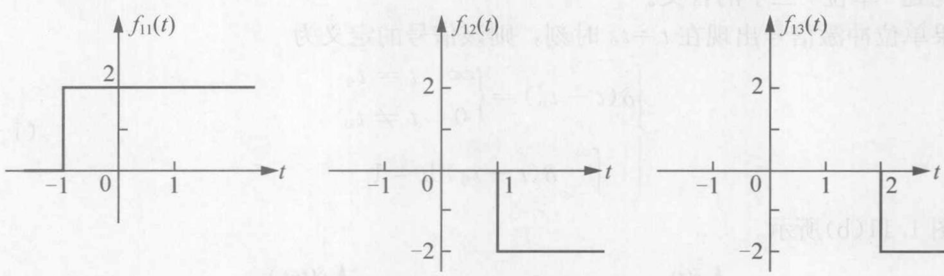


图 1.9　信号的分解

即 $f_1(t)=f_{11}(t)+f_{12}(t)+f_{13}(t)$

因为 $f_{11}(t)=2\varepsilon(t+1)$，$f_{12}(t)=-\varepsilon(t-1)$，$f_{13}(t)=-\varepsilon(t-2)$

所以 $f_1(t)=2\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$

实用小窍门

对于如图 1.8(a) 这样不断发生阶跃变化的信号，只需从左到右顺次记下各个阶跃的位置和幅度，就可得到它的表达式。在图 1.8(a) 中，从左往右看，会发现在 $t=-1$ 的位置有一幅度为 2 的向上阶跃(正阶跃)，即 $2\varepsilon(t+1)$。在 $t=1$ 的位置有一个幅度为 1 的向下阶跃(负阶跃)，即 $-\varepsilon(t-1)$，在 $t=2$ 的位置又有一个幅度为 1 的向下阶跃(负阶跃)，即 $-\varepsilon(t-2)$，于是有 $f_1(t)=2\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$。

(2) 图 1.8(b) 中的信号 $f_2(t)$，可以看成是由图 1.10 所示的 4 个信号 $f_{21}(t)$、$f_{22}(t)$、$f_{23}(t)$、$f_{24}(t)$，经过 $f_{21}(t)\times f_{22}(t)+f_{23}(t)\times f_{24}(t)$ 运算形成的。

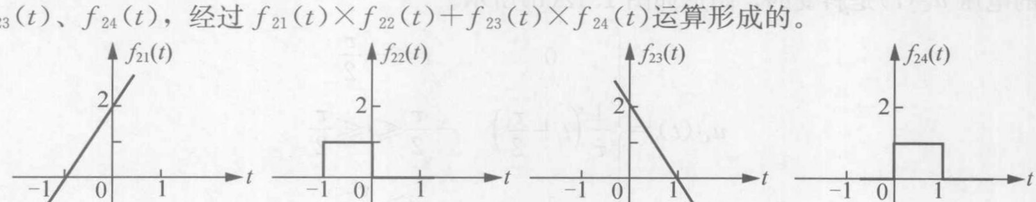


图 1.10　信号的分解

因为 $f_{21}(t)=2t+2$，$f_{22}(t)=\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t)$，$f_{23}(t)=-2t+2$，$f_{24}(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$，所以 $f_2(t)=(2t+2)[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t)]+(-2t+2)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$

1.3.2 单位冲激信号和单位序列

1. 单位冲激信号

单位冲激信号常用 $\delta(t)$ 表示，它的定义为

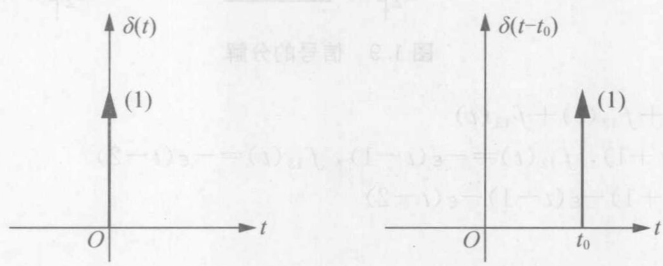
$$\begin{cases}\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases}\tag{1-8a}$$

图形如图 1.11(a)所示。式(1-8a)中，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$ 说明该冲激信号波形下的面积等于 1，这便是此处“单位”二字的含义。

如果单位冲激信号出现在 $t=t_0$ 时刻，则该信号的定义为

$$\begin{cases}\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1\end{cases}\tag{1-8b}$$

图形如图 1.11(b)所示。



(a) 冲激信号　　(b) 平移的冲激信号

图 1.11　单位冲激信号的图形

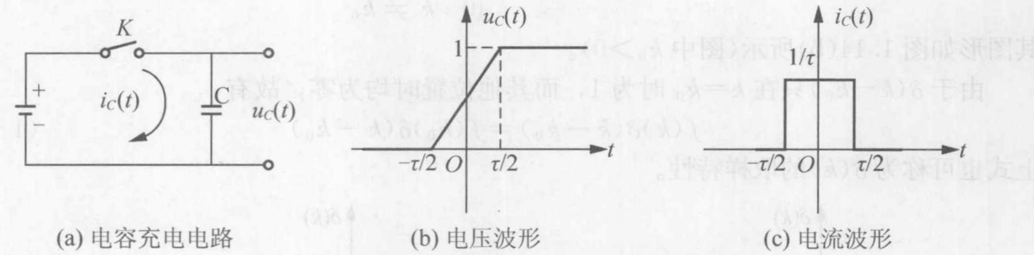
当一个电容突然接到电压为 1V 的电池上时，如果连接导线和电池内部的电阻可以忽略不计，极短时间内流过电容的电流，就可以用单位冲激信号 $\delta(t)$ 来描述。假设图 1.12(a)的电路中电池电压为 1V，C 的电容为 1F，开关 K 在 $t=-\tau/2$ 时刻闭合，开关闭合后电容上的电压 $u_C(t)$ 是斜变的，图形如图 1.12(b)所示。

$$u_C(t)=\begin{cases}0 & t<-\dfrac{\tau}{2}\\ \dfrac{1}{\tau}\left(t+\dfrac{\tau}{2}\right) & -\dfrac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\tau}{2}\\ 1 & t>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

则电流 $i_C(t)$ 的表达式为

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

图形如图 1.12(c)所示。



(a) 电容充电电路　　(b) 电压波形　　(c) 电流波形

图 1.12　电容充电电路与 $u_C(t)$、$i_C(t)$波形

$i_C(t)$波形下的面积为 1，当$\tau\to0$时，$u_C(t)$变成了单位阶跃电压信号，$i_C(t)$变成了单位冲激电流信号。

此外，$\delta(t)$还可看成其他信号的极限。如图 1.13 所示，信号 $p_1(t)$波形下的面积等于 1，即 $\int_{-\infty}^{\infty}p_1(t)\mathrm{d}t=1$。当$\tau\to0$，信号 $p_1(t)$的幅值 $1/\tau\to\infty$。此时信号 $p_1(t)$也变成了单位冲激信号 $\delta(t)$，即

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to0}p_1(t) \tag{1-9}$$

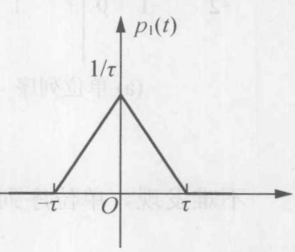


图 1.13　单位冲激信号的模型

拓展阅读

普通函数(如 $y=e^x$)是将定义域内的数 x_0，经过一定的运算，映射为值域内的数 y_0。用积分定义的广义函数，则是将检验函数，经过一定的积分运算，映射成具体的数。设 $g(t)$是广义函数，$\varphi(t)$为检验函数，N_0 为 $\varphi(t)$的映射，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=N_0[g(t),\ \varphi(t)] \tag{1-10}$$

根据广义函数理论，如果有另一个广义函数 $\xi(t)$，它与 $\varphi(t)$经过一定的积分运算，同样也映射成了 N_0，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=N_0[\xi(t),\ \varphi(t)] \tag{1-11}$$

则这两个函数相等，即 $g(t)=\xi(t)$，称为广义函数相等原理。

单位冲激函数不是通常意义下的普通函数，即它并不是对定义域内的每一个数，都会有相应的映射。从严格意义上讲，它是用积分来定义的广义函数，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0) \tag{1-12}$$

其中 $f(t)$在 $t=0$ 处是连续的。式(1-12)所示的积分称为筛选积分(或称为单位冲激函数抽样特性)，因为$\delta(t)$与 $f(t)$相乘后再积分筛选出了 $f(0)$值。

2. 单位序列

单位序列常用$\delta(k)$表示，它的定义为

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\0 & k\neq0\end{cases} \tag{1-13a}$$