教科书中的故事

吴伟丽/编著

中州古籍出版社

中外数学故事

中外数学故事

吴伟丽　编著

中州古籍出版社

图书在版编目(CIP)数据

中外数学故事 / 吴伟丽编著.
— 郑州 : 中州古籍出版社, 2012.11
ISBN 978-7-5348-4041-8

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①数学-青年读物②数学
-少年读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 269428 号

出 版 社:中州古籍出版社
(地址:郑州市经五路 66 号 邮政编码:450002)
发行单位:新华书店
承印单位:北京一鑫印务有限责任公司
开　　本:690 mm×960 mm 1/16　　**印　　张:**14
字　　数:180 千字　　**印　　数:**5000 册
版　　次:2012 年 12 月第 1 版　　**印　　次:**2013 年 1 月第 1 次印刷

定价:27.8 元

前　言

在数学家的眼里，丰富多彩、千姿百态的世界无非就是“数”和“形”。他们用数学的魔棒指点江山，驾驭自然；他们用数学的钥匙打开了一个又一个科学的大门。努瓦列斯说：“数学家本质上是个着迷者，不迷就没有数学。”本书开篇就讲述了数学巨匠的那些事。让成功的数学家们带领我们走入数学的王国。

数学是研究客观世界中数量关系和空间形式的一门科学，大体上说，凡是研究数和数与数关系的部分，属于代数学范畴；凡是研究形和形与形关系的部分，属于几何学范畴。概率论又开启了一个新的数学领域。抽象的数学理论在数学家们缜密的思考与不厌其烦的计算证明中前进发展，数学家哈尔莫斯就曾认为：“数学的创作绝不是单靠推论可以得到的，首先通常是一些模糊的猜测，揣摩着可能的推广，接着下了不十分有把握的结论。然后整理想法，直到看出事实的端倪，往往还要费好大的劲儿，才能将一切付诸逻辑式的证明。这过程并不是一蹴而就的，要经过许多失败、挫折，一再地猜测、揣摩，在试探中白花掉几个月的时间是常有的。”但本书用妙趣横生的故事把代数、几何、概率中近乎抽象的理论形象化，让你觉得数学原来也没有想象中的那么不可亲近。

现代数学与快速发展的科学技术并驾齐驱，研究领域更加广阔、深入，产生了多种分支学科，并成功应用于高新技术和生产领域。如密码学是信息交流的一种极为特殊的方式，利用数学原理破译编辑密码运用于军事、情报的各个方面。计算机理论的应用就更不用多说了。计算机进入千家万户，程序中二进制的运算又怎么能离开数学的协助呢？本书第五章你会看到数学在密码学、计算机理论、物理、宇宙、天文等不同领域大放异彩的故事。

数学与生活息息相关，一个小小的棋盘也有无尽的秘密，一张小小的彩色地图也会引发数学家们的无限联想，一只小小的鸡崽也能创造深奥的数学问题。生活处处皆学问，科学的奥妙就来自生活中的角角落落。本书结尾讲述了许多生活中的数学故事，发现生活，了解生活。快来吧，说不定你就是下一个数学家。

目　录

第一章　数学巨匠的故事

第二章　代数天地的故事

第三章　魔幻几何的故事

第四章 神奇概率的故事

第五章 应用数学的故事

第六章　生活中的数学故事

第一章　数学巨匠的故事

凫雁问题与割圆术

三国时，魏元帝景元四年（263 年）秋末冬初的一天，刘徽仍在书房里紧张地筹算。窗外，忽然传来大雁的鸣叫声，他立起身，走到窗口，看见一行大雁正排成“人”字，向南方飞去。正是雁南飞的时节，刘徽刚巧正在运算一个“凫雁问题”。

这是《九章算术》中的一个问题：一只野鸭从南海飞到北海要用 7 天的时间，一只大雁从北海飞到南海要用 9 天，问：若它们同时从两地起飞，几天后相遇？在《九章算术》中采取这样的一种算法：把野鸭和大雁所需的飞行天数相加作为除数，把飞行的天数相乘作为被除数，两数相除的结果即是相遇的天数。算式是：

$$\frac{7\times 9}{7+9}=\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}$$

在《九章算术》中只说明了解题的方法，没有说明这样做的原因。刘徽所做的就是解释这种解题方法的工作。为求野鸭与大雁相遇的天数，就应求它们能共同飞完全程的天数（最小公倍数），即将野鸭的 7 天乘以大雁的 9 天，得出 63 天的数字。这就

是说，在 63 天中野鸭可全程飞完 9 次，大雁可全程飞完 7 次。如果野鸭和大雁一起飞行这段时间，就一共飞行了 7 +9 次即 16 次，或者说它们可以相遇 16 次，这样野鸭和大雁合作全程飞行一次，就只需要$\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}$天。按照题意列出算图：

$$\left(\frac{\text{天数}}{\text{次数}}\right)\ \left(\frac{9\qquad\qquad\qquad 7}{\text{大雁 1 次野鸭 1 次}}\right)\ \rightarrow\frac{63}{7}\quad\frac{63}{9}\overset{\text{合作}}{\rightarrow}\ \left(\frac{63}{7+9}\right)$$

“凫雁问题”是《九章算术》中“均输”章里的一个问题。刘徽是用比例算法来运算的，这说明魏晋时的数学家们认识到：“比”是数量之间的联系，“分数”是一种数，“除法”是一种运算方法。

《九章算术》是我国古代最早的数学著作之一，它可能是经过许多人增补删订而成的。全书共收集了 246 个数学问题与解法，并分为“方田”、“粟米”、“衰分”、“少广”、“商功”、“均输”、“盈不足”、“方程”、及“勾股”等九章。刘徽见到的《九章算术》存在一些遗残，也有一些删补痕迹。于是，他就决心给《九章算术》作注，对其中的问题作详尽的讲解。

刘徽的工作很有价值，并有不少创见：

如在注释第四章“少广”时，有几道问题是由已知的面积和体积反求一边之长，这种问题讲的是开平方或开立方的方法。运算中，刘徽认为开方开到个位还开不尽，就应当继续往下开，求其“微数”。这“微数”就是现代数学中的小数，它是我国古代数学研究中对十进位制的成功运用，并采用十进位制分数的方式来标示小数。其微数第一位数以 10 为分母，第二位数以 100 为分母，第三位数以 1000 为分母。如 3. 1416，刘徽就把它写成：

$$3\frac{1}{10}\frac{4}{100}\frac{1}{1000}\frac{6}{10000}$$

这虽然不是现代小数的标准写法，但却也是一种小数的准确表述，比 1585 年比利时数学家斯蒂文发明的小数概念和记述法要早 1300 多年。

又如《九章算术》第一章“方田”，在计算圆形田亩的面积时，采用了传统的“周三径一”的说法，将“圆周率”定为 3。刘徽认为，这个数字误差太大，在注释时，他创造出一种当时最新最科学的计算圆周率的方法：“割圆术”。他说：“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。”这话的意思是：在圆内作圆内接正多边形，从正 12 边形、正 24 边形、正 48 边形、正 96 边形……边数越多越接近于圆的周长。而这种圆内接正多边形的边长正好可利用圆的直径来运算。利用割圆术，刘徽求到圆内接正 192 边形，圆周率为 $\pi \approx \frac{157}{50} = 3.14$。后来，他还继续求到圆内接正 3072 边形时，圆周率 π 值 $\approx \frac{3927}{1250} = 3.1416$。这个结果是当时世界上最科学的一个数值。可见刘徽的“割圆术”是一种十分先进的方法。两百多年后，祖冲之利用割圆术求得了更精密的圆周率。

刘徽还另外撰写了一章“重差”，作为《九章算术》的第 10 卷。因其中第一题是一个测望海岛山峰而推算它的高、远的问题，所以后来的学者便将它从《九章算术注》中分离出来，定名为《海岛算经》。《海岛算经》标志着我国古代几何学的杰出成就：主要讲述利用标杆进行两次、三次以及更复杂的四次测量目标物的高和远的计算方法。刘徽利用相似三角形的性质，创造了

一种“重差术”（或称二重差分法），用来测量目标物的距离、高度或深度等，从而构成了我国古代地图学的数学基础。

《九章算术》经过刘徽的注释，就更为系统和完善。在唐代它和《海岛算经》都被列为《算经十书》之一，作为唐朝国子监算学馆（相当于国家设立学校中的数学科）学生必读的教科书。

在算完“凫雁问题”之后，刘徽便将《九章算术注》全部完成了。这是他从少年时接触到这部书时立下的心愿。干完这件事后，他就将书稿交给朋友们去刊刻，自己则像大雁南飞一样，浪迹天涯去了。

刘徽后来还撰写了一卷《九章重差图》，可惜没有流传下来。

为了求得由底为直角三角形直棱柱分割而成的一个四棱锥与一个三棱锥的体积之比，他采用无限分割、逐次拼合的方法建立了“刘徽原理”，这使得他在数学史上留下了不朽的一页。

史书上刘徽无传，近人据有关资料推测他是公元 225—295 年间的人士。《宋史·礼》中有关记载表明，宋徽宗大观三年（1109 年）曾敕封刘徽为淄乡男的爵位，以表示对他的褒奖。若依按籍贯封爵的惯例，可以推测他是淄乡（今山东邹平县）人。

由于刘徽的成就，人们称他为“中国的欧几里得”。

闪亮数学界的小行星——“祖冲之星”

南北朝刘宋孝武帝大明六年（462 年），对于年仅 33 岁的祖冲之（429—500 年）而言，是他人生历程中关键性的一年。

这年一天的正午时分，祖冲之循例测量和记录了铜表的日

影，然后踱进书房。他兴致很高地喊："暅儿！来帮爹爹磨墨。"将近十岁的祖暅之应声而来，捋起衣袖磨起墨来，边磨墨边看爹爹写字，在父亲的点拨下，他已认识不少字，这次，他认识父亲写下的头行的三个字："大明历"。

祖冲之，是范阳郡遒县（今河北涞源县北）人。他的祖父、父亲都很喜爱数学，对于文学也很有研究。在家学的熏陶下，祖冲之从小就喜爱数学和天文历法，后来又进入华林学省学习并从事科学研究。南朝刘宋于元嘉二十二年（445年）颁用何承天制定的《元嘉历》。使用过几年后，祖冲之发现《元嘉历》比古代前十一家历法严密一些，但祖冲之认为还是有疏漏之处，于是从23岁起他就决心修订历法。为此，祖冲之每天正午时刻都要测量圭表上的日影，来验证历法的精确度。经过整十年的观察、测算，他发现"冬至所在，岁岁微差"，于是他就把岁差的存在应用到历法的编制中去。祖冲之测定岁差为45年11月差1度（这与现代天文学测算的结果相比，只差50.2秒，真是惊人!）。祖冲之还测定旧历法19年7闰不够精确，那样编历每隔220年就会出现1天的误差。于是，他认为应该采用新闰周，即391年安排144个闰年，按新闰周每隔1739年才会产生1天的误差。祖冲之还测算出：木星（古代称为岁星）每84年超辰一次，即求出木星公转周期为11.858年；回归年长度为365.2428日，与当今测值只差万分之六日……经过数十年不间断的观测，祖冲之终于制定了自己的历法。现在他决定把这历法上呈给皇帝，并要求改用新历，因为该历法完成于孝武帝大明六年，故署名为《大明历》。年幼的祖暅之所看到的，正是祖冲之写给孝武帝的奏章。

祖冲之请求改颁《大明历》的奏章放在孝武帝刘骏的案头已

经好几天了。孝武帝一直决断不了，最后他决定在朝廷上作一次廷议，实际上是让群臣们作一次辩论，再行决断。

廷议时，开始是祖冲之讲述制定新历的经过，并详尽讲述《大明历》处理岁差、采用新闰周的好处。祖冲之因是烂熟于心、深思熟虑，所以讲得简明精要，很能说服人。

祖冲之刚讲完，主管历法的大臣戴法兴就猛地站起来，以权威的姿态说："太阳运动，时慢时快，无规律可循，所以用什么历法都行。再则，现行历法为古代圣贤所创，已经沿用了多少年，我看没有必要改历。"他还列举了《大明历》与古代历书不同之处，指责祖冲之攻击先贤。

祖冲之针锋相对地说："戴大人开口古历、闭口古历，似乎古人的历法已十全十美，不可变丝毫。我也认真研究过古历，阅过唐篇、商典，它们也是经过不断修正的，既承袭尊重古人的成就，又发扬光大古人的传统。这说明前人有疏漏之处，才要修正，古人自己都不迷信古人，我们何必还要迷信古人呢?"

戴法兴恼怒起来："放肆！即便要改历，可这天上的日月星辰的快慢变化，也决不是凡夫俗子可以推算出来!"

祖冲之胸有成竹地答："大人不必发怒。你说过太阳冬至日的位置在建星，年年如此，没有差异。据我考证，这种说法是战国、秦汉时的伪造，戴大人可曾验证过吗？至于太阳现在的位置在哪里，我们可以按月食时月亮所在的位置来推算。"说着，他翻开《太史令》上的月食记录，对戴法兴说："这四次月食，月亮所在的位置都有记录。月食时，月亮在太阳相对应的位置上，这样便可准确地推算出太阳的位置，与我的新历法完全相符。可见，太阳每年冬至日的位置都会有一些小小的差异。我们岂能迷

信古书，而不管事实呢?”

无话可说的戴法兴干脆蛮横地讲：“历法是古人制定的，代代相传，万世不能更改。即使有差错，也应该永远照用!”

对此，祖冲之用轻蔑的眼光看了看戴法兴，接着面向孝武帝说：“十九年七闰法已沿用几百年了，与天象愈来愈不相符。在我之前，已有人发现过它的差错。如果古历永不能改，即使有差错，不合天象，也不能改。那么岂不是说先帝改颁何承天的《元嘉历》也不必要了吗？那现在何不还是用汉代的历法呢?”

祖冲之举出先帝刘义隆改颁《元嘉历》的例证，使得戴法兴哑口无言，再也不敢狡辩。孝武帝见自己宠臣戴法兴的狼狈模样，感到左右为难，便缓和一下气氛，转而问另一位大臣巢尚文：“爱卿，你的意见如何?”

巢尚文很钦佩祖冲之的学识，见孝武帝询问他的意见，他躬身施礼后说：“皇上，臣以为祖冲之的《大明历》是有道理的，比古历有许多好处。我还知道，祖冲之确实用新历法计算过以往23年的日月食发生的时间，每次计算结果都与史书记载的实情相符。今天祖冲之话急了一些，冲撞了戴大人，但他也是为国为民呀!”

巢尚文一席话实际上是希望孝武帝采用《大明历》，百官也大都称是。但戴法兴一伙大臣硬不改口，孝武帝也不好当场表态，便对祖冲之说：“祖冲之，回去把你的理由写来，送朕一阅，再定。”

退朝后，祖冲之心潮难平，连夜写成《辩戴法兴难新历奏章》一文，呈上孝武帝。但是深受皇上宠信的戴法兴竭力反对，所以《大明历》便一直被扣压，不能颁用。祖冲之只有陷于长期

的等待之中。

虽然岁月没按祖冲之的《大明历》来计算，但是祖冲之却以新的成就来计算这等待的时日。自大明六年之后，祖冲之又干出许多成就。他仿照前朝的巧匠鲁班、马钧制造出新型指南车，并用铜齿轮代替木齿轮；他制成一种水碓磨，利用水力来舂米磨粉；他发明一种千里船，可以日行百余里；为了天文测量计时的准确，他改制了漏壶。更有哲理意味的是，祖冲之按孔子的解释重新仿制了“攲器”。攲器空时侧倒，满时也侧倒，不多不少时就稳稳正正。这可给人以一种启示，如饮酒时，若放一个攲器于座右边，它将提醒你不要过与不及，古人又将攲器称为“宥坐之器”。这足见祖冲之在机械制方面的才干与巧思。祖冲之还精通音律，有许多文史论著，如《易老庄义》、《论语考经释》等，甚至写过小说《述异记》10 卷。然而，祖冲之最著名的论著是数学方面的，有《缀术》、《九章算术注》。《缀术》曾被隋唐国子监用作算学课本，并传入朝鲜、日本诸国使用，其中最有世界影响的，就是祖冲之对圆周率的推算。

祖冲之先后在南北朝的刘宋朝和南齐朝中担任过南徐州（今镇江市）从事史、公府参军、娄县（今昆山县东北）令、谒者仆射、长水校尉等官职。他是在就任谒者仆射之职时着手运算圆周率的。这个职位要每天清晨进宫，直到晚上才回家，负责引见臣下，传达命令。所以祖冲之只能利用晚上的时间，在书房里精心运算。

圆周率，在数学中称为 π 值。我国的数学家，从古代起就开始研究圆周率。公元前 100 多年的《周髀算经》中记载：“周三径一”即是说圆周率了。西汉末年，刘歆得出圆周率是 3. 1547；

东汉时，张衡算出圆周率是3.1622；三国时，东吴天文学家王蕃算出圆周率为3.1556。

到魏晋时期，著名数学家刘徽发明了“割圆术”，指出圆内接正多边形的周长逼近圆周长，这圆内接正多边形的边数越增加就越逼近圆周长，其极限就是圆周长。运用这一方法，刘徽将圆周率算到3.1416，这已是相当精确的数据了。面对前人这些成果，祖冲之做了更精确的运算。

祖冲之是借鉴了刘徽的割圆术来推算圆周率的。起初，祖冲之画了一个直径1丈的大圆，然后在圆内画了一个内接正12边形。用尺一量，每边长2尺6寸多。为求精确，祖冲之采用勾股法来测算。因为从圆心到每边的两点正好构成一个等腰三角形。经过运算，祖冲之得出圆内接正12边形，每边长0.258819丈，12边总长3.105828丈。

为了加快运算的速度，祖冲之叫来儿子祖暅之。祖暅之已长大成人，也继承了家学，成为祖冲之得力的帮手。他们无限加大圆内接正多边形的边数，从48边形、96边形、192边形一直到12288边形。这时，在那直径1丈的圆形图上要画出12288边形，已经只能用针尖来标点了，可以说这一内接正12288边形已经接近于圆形了。在此基础上，祖冲之运算出圆周率的不足近似值是3.1415926，圆周率的过剩近似值是3.1415927，即：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

圆周率已精确到小数点之后7位。

祖冲之还确定了圆周率的两个分数形式的近似值：

$$\text{约率}\ \pi = \frac{22}{7} \approx 3.14$$