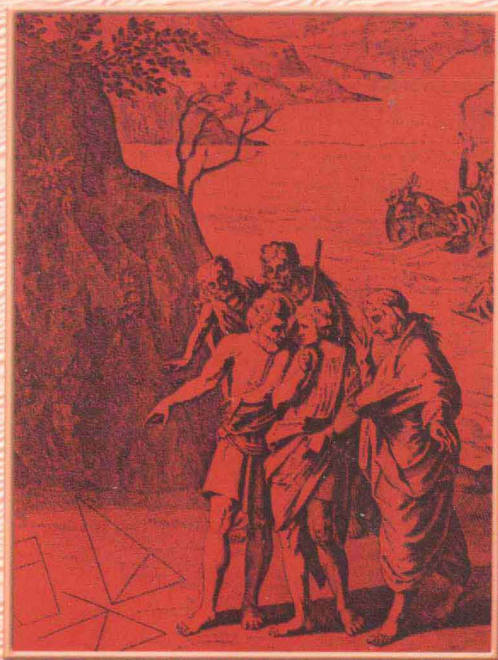


《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

贝蒂定理与拉姆贝克—莫斯尔定理

——从一个拣石子游戏谈起

刘培杰 编著



◎ 互补序列与可逆序列

◎ 贝蒂定理与一道第34届IMO试题

◎ 围棋盘上的游戏

◎ 两个《美国数学月刊》征解题

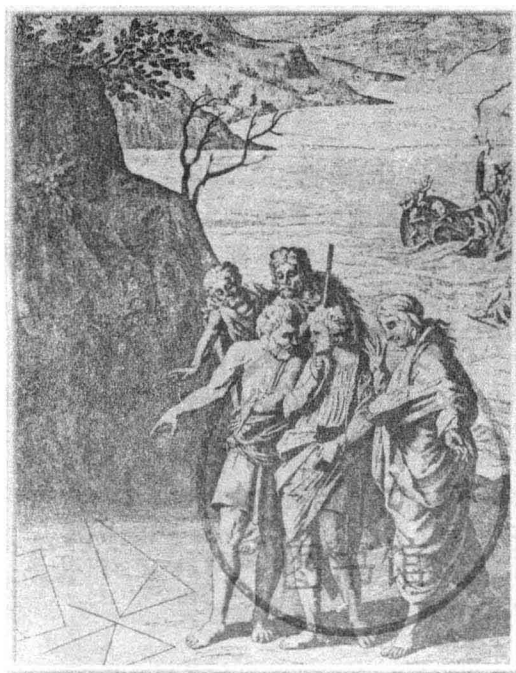
◎ 贝蒂定理的两个变形

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

贝蒂定理与拉姆贝克—莫斯尔定理

——从一个拣石子游戏谈起

刘培杰 编著



◎ 互补序列与可逆序列

◎ 贝蒂定理与一道第34届IMO试题

◎ 围棋盘上的游戏

◎ 两个《美国数学月刊》征解题

◎ 贝蒂定理的两个变形



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一个拣石子游戏开始来介绍贝蒂定理与拉姆贝
克-莫斯尔定理,并配有多道经典试题.

本书适合大中学生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

贝蒂定理与拉姆贝-莫斯尔定理:从一个拣石子
游戏谈起/刘培杰编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出
版社,2012.8

ISBN 978-7-5603-3770-8

I. ①贝… II. ①刘… III. ①贝蒂数-普及读物
IV. ①O189-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 197885 号

策划编辑 张永芹 李子江
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 7 字数 82 千字
版 次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3770-8
定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展观	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128
含参数的方程和不等式	2012-09	28.00	213

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009-01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
解析数论基础	2012-08	28.00	216
数论入门	2011-03	38.00	99
数论开篇	2012-07	28.00	194
解析数论引论	2011-03	48.00	100
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
初等数论经典例题	2012-07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012-01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012-01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012—08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012—08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012—07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012—04	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012—04	38.00	170

整函数	2012—08	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012—05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—05	78.00	165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012—02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009—05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
中国初等数学研究 2012 卷(第 4 辑)	2012—07	48.00	190
数阵及其应用	2012—02	28.00	164
绝对值方程—折边与组合图形的解析研究	2012—07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012—02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134,135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000 个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300 个日本高考数学题	2012-05	38.00	142
500 个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140, 141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	即将出版		
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-10	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	即将出版		
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-08	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克斯莫尔定理——从一个拣石子游戏谈起	2012-09	18.00	217
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012-08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	即将出版		
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	即将出版		
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012-08	28.00	214
代数几何中的贝祖定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	即将出版		
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考试谈起	即将出版		
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	2012-08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	即将出版		
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
李天岩-约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特-莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	193
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从忻数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址: <http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:

◎

目

录

§ 0	引子	1
§ 1	题目的证明	2
§ 2	题目的加强	4
§ 3	应用	9
§ 4	互补序列与可逆序列	15
§ 5	再谈数列的 N -互补性	19
§ 6	贝蒂定理与一道第 34 届 IMO 试题	25
§ 7	几种不同解法	31
§ 8	围棋盘上的游戏	61
§ 9	两个《美国数学月刊》征解题	70
§ 10	贝蒂定理与两道竞赛题	76
§ 11	互补序列的进一步研究及其在数学 竞赛中的应用	79
§ 12	贝蒂定理的两个变形	92
	编辑手记	95

§ 0 引 子

受普特南促进学术奖金基金会赞助并由美国数学协会主办的威廉·罗韦尔·普特南数学竞赛(The William Lowell Putnam Mathematical Competition),其试题由名家组成的命题委员会制定,背景深刻,极富独创性,为国际数学界所瞩目.

在第 20 届普特南数学竞赛中有一道试题为:

试题 1 设正无理数 α 与 β 满足下列等式

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \quad (1)$$

求证:两序列 $\{[n\alpha]\}, \{[n\beta]\}$ 合在一起恰好不重复地构成自然数集,记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

正如美国和加拿大数学奥林匹克的主教练 M. S. Klamkin 所指出:数学竞赛试题的一种产生方法就是“将某些不那么新的数学论文中的漂亮结果加以改造”.而上面的题目正是用此法炮制的.1926 年加拿大多伦多大学的 S·贝蒂(Sam Beatty)发现了如下的贝蒂定理:

贝蒂定理 设 x 是任何一个正的无理数, y 是它的倒数,那么两个序列 $\{n(1+x)\}, \{n(1+y)\}$ 合起来,恰好包含了每对相邻正整数构成的区间 $(n, n+1)$ 中的一个数.

显然前面的题目是贝蒂定理的一个推论,因为如

果设 $\alpha = 1 + x, \beta = 1 + y$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x} = 1\end{aligned}$$

§ 1 题目的证明

1927年, 由 A·奥斯特洛夫斯基 (Ostrowski) 与 A·C·艾特肯 (Aitken) 给出了贝蒂定理的一个简洁的证明, 仿此思路我们也给出前述竞赛题的一个证明.

证法 1 我们只需证: 任何自然数 k , 不在 $\{[n\alpha]\}$ 中出现一次, 就在 $\{[n\beta]\}$ 中出现一次, 二者必居其一.

显然 $[n\alpha] \in \mathbf{N}, [n\beta] \in \mathbf{N} (n=1, 2, \dots)$, 定义

$$p = \max\{n \mid [n\alpha] \leq k\}$$

$$q = \max\{n \mid [n\beta] \leq k\}$$

即 p, q 是两序列 $\{[n\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]\}$ 中不超过 k 的正整数的个数, 由式(1)有 $\alpha > 1, \beta > 1$, 所以

$$\begin{aligned}[p\alpha] \leq k \leq [(p+1)\alpha] &\Rightarrow p\alpha < k+1 < (p+1)\alpha \Rightarrow \\ p < \frac{k+1}{\alpha} &< p+1\end{aligned}\quad (2)$$

同理可得

$$q < \frac{k+1}{\beta} < q+1 \quad (3)$$

式(2)+式(3)并注意到式(1)有

$$\begin{aligned}p+q &< k+1 < p+q+2 \Rightarrow p+q-1 < k < \\ p+q+1 &\Rightarrow p+q=k\end{aligned}$$

这即是说,在 $\{[n\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]\}$ 中,不超过 k 的正整数恰好共有 k 个,但由 k 的任意性,可知,其中不大于 $k-1$ ($k > 1$)的正整数也恰好共有 $k-1$ 个,于是比较两者可知,在 $\{[n\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]\}$ 中大于 $k-1$ 而不大于 k 的正整数有且仅有一个,它正好是 k .

证法 2 我们只需证 $\{[n\alpha]\}, \{[n\beta]\}$ 两序列满足:

i) 严格单调递增; ii) 两序列的项不重复; iii) 两序列合起来后不漏掉任何一个自然数.

先证 i), 显然 $\alpha > 1, \beta > 1$, 所以

$$\begin{aligned} [(n+1)\alpha] &= [n\alpha + \alpha] \geq [n\alpha] + [\alpha] \geq \\ &[n\alpha] + 1 > [n\alpha] \end{aligned}$$

这说明 $\{[n\alpha]\}, \{[n\beta]\}$ 均严格单调上升.

ii) 用反证法: 假设存在 $k, l \in \mathbf{N}$, 使得 $[k\alpha], [l\beta]$ 表示同一个自然数 p , 于是注意到 α, β 是无理数, 可得 $p < k\alpha < p+1, p < l\beta < p+1$, 由此可得

$$\begin{aligned} \frac{k}{p+1} &< \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{p} \\ \frac{1}{p+1} &< \frac{1}{\beta} < \frac{1}{p} \end{aligned}$$

两式相加得

$$\frac{k+1}{p+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{k+1}{p} \Rightarrow p < k+l < p+1$$

后一不等式是不可能的, 因为在两连续自然数 $p, p+1$ 中不可能再“夹”一个自然数 $k+l$.

iii) 亦用反证法: 假设存在一个自然数 q 不在两序列中, 则也会找到两个 $k, l \in \mathbf{N}$, 使得

$$\begin{aligned} k\alpha &< q < q+1 < (k+1)\alpha \\ l\beta &< q < q+1 < (l+1)\beta \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{k}{q} + \frac{l}{q} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{k+1}{q+1} + \frac{l+1}{q+1}$$

所以有

$$k+l < q < q+1 < k+l+2$$

这相当于在两“间距”为2的自然数 $k+l$ 和 $k+l+2$ 中“夹”有两个自然数 q 和 $q+1$, 而这是不可能的.

综合 i)、ii)、iii) 可知命题成立.

§ 2 题目的加强

本节我们将 α, β 是无理数这一限制取消, 而代之以任意不等于1的实数, 也可得到和题目相同的结果. 我们首先引入一个记号 $[x]^-$, 其定义为: 当 x 不是整数时为 $[x]$; 当 x 是整数时为 $[x]-1$. 我们有如下的:

定理 1 若 $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$, 则每一正整数在下列两序列 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^-\}$ 中恰好出现一次的充要条件是

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

证明 1) 必要性. 若 $k \in \mathbb{Z}^+$, 则满足不等式

$$0 < m\alpha < k+1 \quad 0 < n\beta \leq k+1$$

的正整数 m 与 n 之和 M 为

$$M = \left[\frac{k+1}{\alpha} \right]^- + \left[\frac{k+1}{\beta} \right]$$

而显见

$$\frac{k+1}{\alpha} + \frac{k+1}{\beta} - 2 < M < \frac{k+1}{\alpha} + \frac{k+1}{\beta}$$

若 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \theta$, 则上式左、右两端的数分别为 $(k+1)\theta - 2$ 和 $(k+1)\theta$. 以下证 $\theta = 1$.

i) 若 $\theta < 1$, 则当 k 充分大时, $(k+1)\theta < k$, 即 $M < k$, 这表明在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^{-}\}$ 内不超过 k 的项不到 k 个, 亦即在前 k 个正整数之中至少有一个不在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^{-}\}$ 内, 与题设矛盾.

ii) 若 $\theta > 1$, 则当 k 充分大时, $(k+1)\theta - 2 = k + (\theta - 1)k + \theta - 2 > k$, 即 $M > k$, 故在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^{-}\}$ 的项中其值不超过 k 的项比 k 多, 由此可见, 在前 k 个正整数中至少有一个在 $\{[m\alpha]\}$ 和 $\{[n\beta]^{-}\}$ 中不止出现一次. 必要性得证.

2) 充分性: 设 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, 则

$$\begin{aligned} M &= \left[\frac{k+1}{\alpha} \right]^{-} + \left[k+1 - \frac{k+1}{\alpha} \right] = \\ &= \left[\frac{k+1}{\alpha} \right]^{-} + \left[k - \left(\frac{k+1}{\alpha} \right) \right] = \\ &= \left[\frac{k+1}{\alpha} \right]^{-} + k - \left[\frac{k+1}{\alpha} \right]^{-} = k \end{aligned}$$

故在 $\{[m\alpha]\}$, $\{[n\beta]^{-}\}$ 内其值不超过 k 的项数为 k , 同时由 k 的任意性中其值不超过 $k-1$ 的项数为 $k-1$, 故其值为 k 的项数是 1.

综合 1)、2) 命题得证.

我们还可以将上述定理推广为:

定理 2 (闵嗣鹤) 设 i) $\alpha(0) \geq 1, \beta(1) \geq 0$; ii) 当 $x \geq 1$ 时, $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是关于 x 的严格递增函数; iii) 若 $\alpha^{-1}(x)$ 和 $\beta^{-1}(x)$ 分别为 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 的反函数, 且 $\alpha^{-1}(x) + \beta^{-1}(x) = lx (l \in \mathbb{N})$, 则每一个正整数