高等学校教材

线性代数

主编/华一明 恽平南

XIANXINGDAISHU

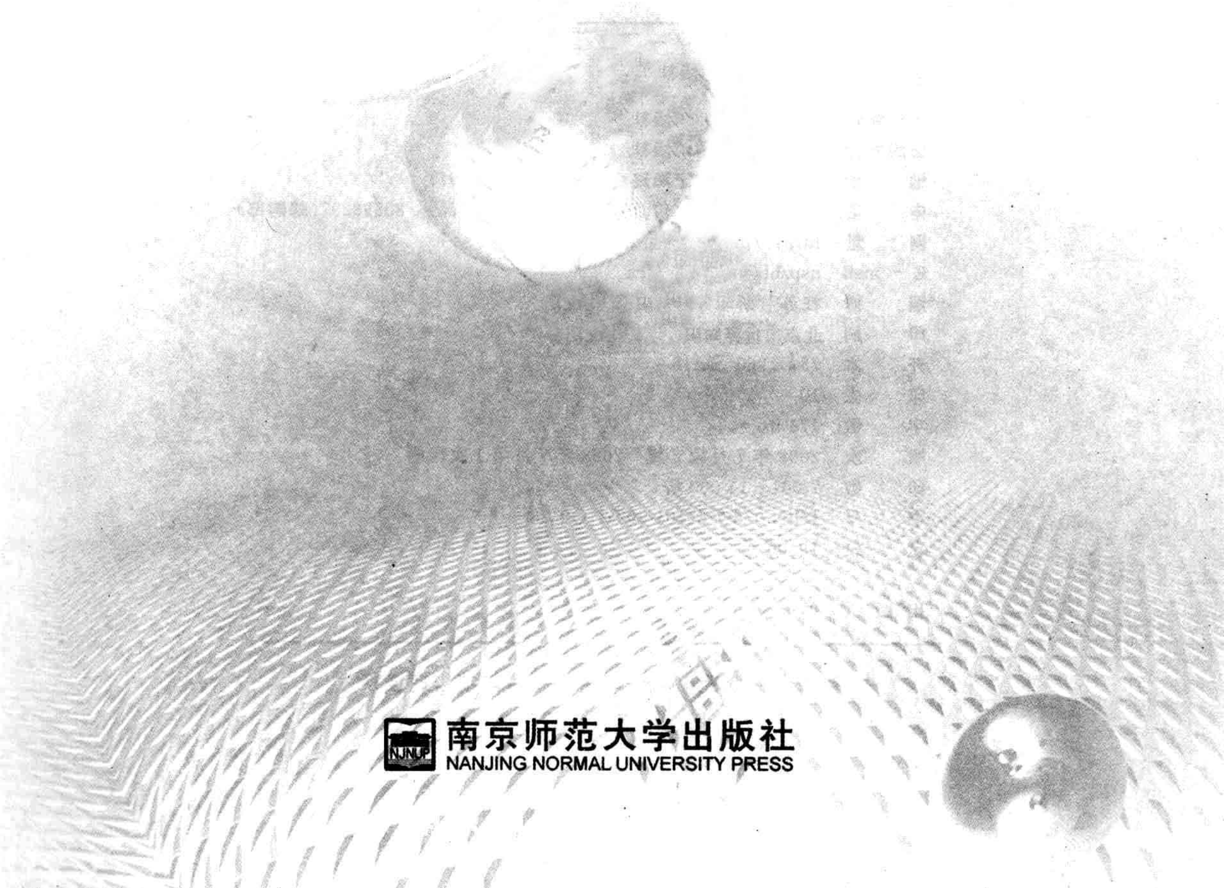
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

高等学校教材

线性代数

主编/华一明 恽平南



南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/华一明，恽平南主编．—南京：南京师范大学出版社，2007.6

ISBN 978-7-81101-609-3/O・28

Ⅰ．线...　Ⅱ．①华...②恽...　Ⅲ．线性代数—高等学校—教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 086054 号

书　　名	线性代数
主　　编	华一明　恽平南
责任编辑	王　瑾
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编 210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://press njnu. edu cn
E－mail	nspzbb@njnu. edu cn
照　　排	江苏兰斯印务发展有限公司
印　　刷	北京市世界知识印刷厂马鞍山分厂
开　　本	787×960　1/16
印　　张	10
字　　数	174 千
版　　次	2008 年 7 月第 2 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	7 001－14 000 册
书　　号	ISBN 978-7-81101 609 3/O・28
定　　价	19 00 元

出 版 人　闻玉银

《线性代数》编委会

主　编　华一明　恽平南

主　审　曹菊生

副主编　刘维龙　曹菊生

编　委　华一明　恽平南　刘维龙

曹菊生　刘　琪　张世唯

杨　阳　金锡嘉

前　言

本书由江南大学理学院的教师们结合多年教学实践编写而成.按照教育部下达的线性代数课程教学基本要求,介绍了线性代数的一些基本知识,突出了矩阵的运算变换及用矩阵方法处理问题这个主题,特别是向量组的线性相关、线性无关的处理方式,阐述力求深入浅出,降低抽象性,减轻初学者的困难.

全书共分七章,内容涉及行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与矩阵的对角化、二次型及其标准形、线性空间与线性变换等.本书重视例题和习题的设计、选配.例题概括面广,习题区分有层次,书末附有习题的答案,可供读者核对、参考.

本书可作为高等学校各专业本科、专科的教材或教学参考书,也可用于自学,使用比较灵活:本科 32～36 学时可讲授 1～6 章,本科 42～54 学时可授完全书.

本书第一章由刘维龙编写,第二章由恽平南编写,第三章由刘琪编写,第四章由张世唯编写,第五、六章由华一明编写,第七章由杨阳编写,全部习题由金锡嘉同志审核,全书由曹菊生统稿并仔细地审阅.

由于编者学识所限,谬误和疏漏之处在所难免,敬请广大读者斧正.

编　者

2007 年 5 月

内容提要

本书主要内容为:行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与矩阵的对角化、二次型及其标准形、线性空间与线性变换.全书突出了矩阵的初等变换及用矩阵方法处理问题这个主题,并对线性相关性、极大无关组和秩等难点作了深入浅出的叙述.考虑到循序渐进的教学规律及读者对象的不同需求,本书在结构及例题习题的设计编排方面也作了适当的安排,书末附有习题答案.

本书可作为高等学校各专业本科、专科的教材或教学参考书,也可作为高等教育自学考试的教材,还可供科技工作者阅读.

目　录

第一章　n 阶行列式

行列式是线性代数中最基本的概念.在初等数学中讨论过二阶、三阶行列式，并且可用它们来解二元、三元线性方程组.为了研究 n 元线性方程组，需要把行列式推广到 n 阶，即讨论 n 阶行列式，为此，先介绍全排列、逆序、对换等知识，然后列出 n 阶行列式的概念.

§1　逆序与对换

在初等数学中已经讨论过，把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的一个全排列. n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示，$P_n=n!$.

对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序(例如，n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

例 1　求 2143 的逆序数.

解　有逆序 2,1;4,3.

于是逆序数为 2.

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的过程叫做对换.将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设排列 $a_1\cdots a_l\,a\,b\,b_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l\,b\,a\,b_1\cdots b_m$.显然，当 $a<b$ 时，经对换后逆序数增加 1；$a>b$ 时，经对换后逆序数减少 1，所以排列 $a_1\cdots a_l\,a\,b\,b_1\cdots b_m$ 与 $a_1\cdots a_l\,b\,a\,b_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l\,a\,b_1\cdots b_m\,b\,c_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换成 $a_1\cdots a_l\,a\,b\,b_1\cdots b_m\,c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l\,b\,b_1\cdots b_m\,a\,c_1\cdots c_n$，总之经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l\,a\,b_1\cdots b_m\,b\,c_1\cdots c_n$ 对换成 $a_1\cdots a_l\,b\,b_1\cdots b_m\,a\,c_1\cdots c_n$. 所以，这两个排列的奇偶性相反. 证毕.

因为标准排列的逆序数为 0，由以上定理立即得出以下推论.

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

§2　n 阶行列式定义

初等数学中，三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其中每一项均可表示为 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}$，而 p_1, p_2, p_3 为 1，2，3 的一个全排列，所以总项数为 1，2，3 全排列的总数，即 3！＝6 项. 各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

仿此，我们可以把行列式推广到一般情形.

定义 1　设有 n^2 个数，排列成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1}$$

的项，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，由于这样的排列共有 $n!$ 个，因此，形如(1)式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式. 记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$的元素.

当 $n=1$ 时，$|a|=a$(注意不要与绝对值记号相混淆).

按此定义的二阶、三阶行列式，与初等数学中的二阶、三阶行列式定义显然一致.

由行列式定义立即得到：

对角行列式(其中对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素都是 0)

$$D_1=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2　设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -3 & 0 & x \\ 2 & 1 & 3 & x \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，求 $f(x)$中 x^2 项的系数.

解　记 $f(x)=D_4$，则 D_4 中含 x^2 的项仅为$(-1)^3a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$，即$-4x^2$，

于是 x^2 项的系数为 -4.

例 3 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & O & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明：$D=D_1D_2$.

证 记 $D=\det(d_{ij})$，其中 $d_{ij}=a_{ij}(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,k)$，$d_{k+i,k+j}=b_{ij}$，$d_{k+i,j}=c_{ij}$，$d_{i,k+j}=0(i=1,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$，

D 的一般项 $(-1)^l d_{1r_1}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}}$ 中可能不为零的项记作 $(-1)^l a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}$.

这里，$p_i=r_i$，$q_i=r_{k+i}-k$，而 l 为排列 $p_1\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$ 的逆序数，以 t、s 分别表示排列 $p_1\cdots p_k$ 及 $q_1\cdots q_n$ 的逆序数，应有 $l=t+s$，于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{t+s}a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}\Big[\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\Big] \\ &= \sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}D_2 = D_1D_2. \end{aligned}$$

证毕.

定理 2 n 阶行列式也可定义为：

$$D=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}, \tag{2}$$

其中 s 为行标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

证 D 中任一项元素进行对换，其值不变. 设 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 是 D 中任一项，若 s 是奇数，则 $q_1q_2\cdots q_n$ 是奇排列，则由定理 1 推论知，经奇数次对换，把 $q_1q_2\cdots q_n$ 对换成 $123\cdots n$，而相应的列标从 $12\cdots n$ 经过奇数次对换成 $p_1p_2\cdots p_n$，即 $p_1p_2\cdots p_n$ 也是奇排列. 即

$$(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}=(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

当 s 是偶数时，同理可证. 于是

$D=\sum(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$，$s$ 是 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数. 证毕.

§3　行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　设 $D=\det(a_{ij})$,

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,

按定义, $D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$.

由定理 2,有 $D=D^{\mathrm{T}}$. 证毕.

由性质 1 知,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然. 因此后面列出的性质,对列同样适用.

性质 2　互换行列式的两行,行列式变号.

证　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换 i,j(设 $i<j$)两行得到的,即当 $k\neq i,j$ 时 $b_{kp}=a_{kp}$,当 $k=i,j$ 时 $b_{ip}=a_{jp}$, $b_{jp}=a_{ip}$,于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$.

于是 $D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D$. 证毕.

交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零.

由行列式定义，可以得出以下性质.

性质 3 行列式的某一行中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

该性质也表示行列式中某一行的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面. 当然，由性质 2 推论，容易得出行列式中如果有两行元素成比例，则此行列式为零.

第 i 行乘以 k，记作 $r_i\times k$；第 i 行提出公因子 k，记作 $r_i\div k$.

性质 4 如果行列式的第 i 行的元素 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n)$，那么此行列式等于两个行列式之和，其中一个行列式的第 i 行的元素为 b_{ij}，而另一个行列式的第 i 行的元素为 c_{ij}，其余各行与原行列式的对应行相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 3、4 可以得到以下性质 5.

性质 5 如把行列式的某一行的各元素乘以同一个数加到另一行的对应元素上去，则此行列式的值不变. 用数 k 乘以第 j 行加到第 i 行，记作 r_i+kr_j.

即 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{j1} & c_{j2} & \cdots & c_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\xlongequal{r_i+kr_j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+kc_{j1} & a_{i2}+kc_{j2} & \cdots & a_{in}+kc_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{j1} & c_{j2} & \cdots & c_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用以上性质可以把行列式化为三角行列式，再计算出行列式的值.

例 4　计算 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.　$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

解　$D \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4.$

例 5　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

这个行列式的主对角线元素都为 a，其余元素都为 b.

解　这个行列式的特点是各列元素之和均为 $a+(n-1)b$，因此将原行列式后 $n-1$ 行都加到第一行上，并提出公因数 $a+(n-1)b$，得

$$D=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1,c_3-c_1,\cdots,c_n-c_1}$$

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b].$$

例 6　计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解　$D \xlongequal[r_2-r_1]{r_4-r_3,r_3-r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

§4 行列式按行(列)展开

对于高阶行列式,用定义计算,其计算量很大(如 4 阶行列式有 4! =24 项),即使像前面所说的化为对角阵,一般来说也不会很简便.但是对于低阶行列式,显然计算量要小很多.因此我们自然想到能否用低阶行列式来表示高阶行列式的问题,下面先引进余子式和代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}.

又记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

中元素 6 的代数余子式为 $(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

为给出 n 阶行列式与元素代数余子式之间的关系,先给出以下结论.

引理 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零,则该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积.

即
$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证 若 $a_{ij}=a_{11}$,即 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

则由例 3 结果,易知 $D=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}$.

一般地,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行，第 $i-2$ 行，…，第 1 行对调（$i-1$ 次行交换），再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，…，第 1 列对调（$j-1$ 次列交换），则 a_{ij} 就调到第 1 行第 1 列的位置，经这样交换后的行列式记为 D_1，注意到 D_1 中的 M_{11} 与 D 中的 M_{ij} 相同，因此

$$D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{11}=a_{ij}A_{ij}.\text{ 证毕.}$$

由引理，将 D 的第 i 行分别表示成 $a_{i1}+0+\cdots+0,0+a_{i2}+0+\cdots+0,\cdots,0+0+\cdots a_{in}$，利用性质 4，可得到以下定理（读者自证）.

定理 3　行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

定理 3 称为行列式按行（列）展开法则，利用这一法则，可帮助我们简化行列式计算.

把行列式 D 中第 j 行的元素 a_{jk} 换成 $a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$ 得到 $D_1(D_1=0)$，再把 D_1 按第 j 列展开，得到 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$. 因此得出推论.

推论　行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

例 7　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$

解　$D\xlongequal[c_4-2c_1]{c_3+3c_1}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 12 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 12 & -3 \\ 1 & 8 & -4 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$