

高等院校教材同步辅导及考研复习用书


 燎原教育

张天德 彭辉 主编

高等数学辅导

(同济·六版 上下册合订)

教材习题全解 指导同步学习
考研真题精讲 剖析考研重点

全国百佳图书出版单位
 时代出版传媒股份有限公司
安徽人民出版社

高等数学辅导

(同济·六版 上下册合订)

主 编 张天德 彭 辉

副主编 叶 宏 张焕玲

娄万东 吕成军

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导：同济第6版 / 张天德主编. —
合肥：安徽人民出版社，2013.6
ISBN 978-7-212-06608-6

I. ①高… II. ①张… III. ①高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 123569 号

高等数学辅导(同济第6版)

张天德 主编

出版人：胡正义 责任编辑：杜宇民 吴筠
封面设计：燎原视觉设计中心
出版发行：时代出版传媒股份有限公司 <http://www.press-mart.com>
安徽人民出版社 <http://www.ahpeople.com>
合肥市政务文化新区翡翠路 1118 号出版传媒广场八楼
邮 编：230071
营销部电话：0551-63533258 0551-63533292(传真)
印 刷：淄博德恒印刷有限公司
(如发现印装质量问题，影响阅读，请与印刷厂商联系调换)

开本：880×1230 1/32 印张：24.5 字数：700 千
版次：2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷

标准书号：ISBN 978-7-212-06608-6 定价：32.80 元

版权所有，侵权必究

前言

高等数学是理工类专业一门重要的基础课程,也是硕士研究生入学考试的重点科目。为帮助、指导广大读者学好高等数学,我们编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)完全配套的《高等数学辅导》,以使读者加深对基本概念的理解,加强对基本解题方法与技巧的掌握,最终提高应试能力和数学思维水平。

本书章节的划分和内容设置与同济第六版教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识进行简要的概括,然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系,以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

讲解结构五大部分

一、本章教材全解先对每节所涉及得考研大纲解读,然后用网络结构图的形式揭示出本节内容之间的有机联系,最后对本节涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理,指出基本概念的理解和定理运用中的难点,解答学习过程中可能出现的疑难问题,并特别归纳出各类考试中经常考查的知识点。

二、典型例题解析这一部分是每一节讲解中的核心内容,也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题研究经验,将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点,归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出大量的精选例题深入讲解,使您对每一个知识点扎实掌握,并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破,从而获得实际应用能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”,更是巧妙点拨,让您举一反三、触类旁通。

三、本章知识总结对本章所学的知识进行系统的回顾,帮助读者更好的复习与总结。

四、本章同步自测精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年全国研究生入学考试试题),以此检测、巩固读者的学习效果,提高应试水平。

前言

五、教材习题详解：为了方便读者对本课本所学过的知识进行复习巩固，对教材里全部习题作详细解答，与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

全书内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步学习中完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

读者反馈表

姓名 _____ 院系 _____
地址 _____ 邮编 _____
E-mail _____ 电话 _____
老师姓名 _____ 邮箱 _____

高等数学辅导(同济六版)

1. 您是从何处购买到本书的?

- 校内及周边书店 民营书店
大型零售书店 新华书店
网上书城
其他 _____

2. 您购买此书的原因(可多选):

- 品牌信任 封面设计
正文内容 答案详尽
印刷质量 图书价格
网上书评
其他(请注明) _____

3. 您购买此书的目的是:

- 辅导课程学习 考研
应付作业考试
其他(请注明) _____

4. 您身边同学会购买同步辅导书的比例大约为:

- 20%以下 20%至50%

- 50%至80% 80%以上

5. 请根据您对本书的满意程度选择相应等级标准,填在括号内:

满意程度:A. 很满意 B. 比较满意
C. 一般 D. 不满意 E. 很不满意

- 封面设计[] 图书内文[]
图书版式[] 印刷质量[]
图书价格[] 图书纸张[]
图书总体评价[]

结合上述答案,请提出您对本书的改进建议

6. 您认为本书的哪些板块还需改进?(可多选)

- 知识结构 同步自测题
考点分析 本章内容小结
例题讲解 习题解答

您的改进建议_____

7. 您认为本书的优点和缺点是什么？

优点是_____

缺点是_____

8. 您还有哪些课程在市场上买不到相关辅导书,或者市面上现有的辅导书不能满足您的要求? 您希望这些辅导书包括哪些内容?

9. 其他建议或意见

请将本反馈表寄至:

山东省济南市高新开发区舜华路 2000 号舜泰广场 8 号楼 15 层

山东星火国际传媒集团 读者服务部(收)

邮编:250101 电话:400-623-1860

您也可以通过电子邮件的方式和我们的编辑直接交流,我们的邮箱地址是:
qxtp2008@sina.com

教材知识全解(上册)

第一章 函数与极限	(1)
第一节 映射与函数	(2)
第二节 数列的极限	(6)
第三节 函数的极限	(9)
第四节 无穷小与无穷大	(12)
第五节 极限运算法则	(14)
第六节 极限存在准则 两个重要极限	(16)
第七节 无穷小的比较	(22)
第八节 函数的连续性与间断点	(24)
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	(27)
第十节 闭区间上连续函数的性质	(29)
本章整合	(32)
第二章 导数与微分	(37)
第一节 导数概念	(38)
第二节 函数的求导法则	(43)
第三节 高阶导数	(47)
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	(49)
第五节 函数的微分	(53)
本章整合	(57)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(63)
第一节 微分中值定理	(64)
第二节 洛必达法则	(70)
第三节 泰勒公式	(75)
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	(79)
第五节 函数的极值与最大值最小值	(85)
第六节 函数图形的描绘	(89)
第七节 曲率	(91)
第八节 方程的近似解	(94)
本章整合	(96)
第四章 不定积分	(104)
第一节 不定积分的概念与性质	(105)
第二节 换元积分法	(110)
第三节 分部积分法	(119)
第四节 有理函数的积分	(127)

目 录

教材知识全解+教材习题详解

第五节 积分表的使用	(136)
本章整合	(137)
第五章 定积分	(144)
第一节 定积分的概念与性质	(145)
第二节 微积分基本公式	(151)
第三节 定积分的换元法和分部积分法	(154)
第四节 反常积分	(158)
第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数	(161)
本章整合	(163)
第六章 定积分的应用	(170)
第一节 定积分的元素法	(171)
第二节 定积分在几何学上的应用	(171)
第三节 定积分在物理学上的应用	(176)
本章整合	(179)
第七章 微分方程	(183)
第一节 微分方程的基本概念	(184)
第二节 可分离变量的微分方程	(185)
第三节 齐次方程	(190)
第四节 一阶线性微分方程	(191)
第五节 可降阶的高阶微分方程	(195)
第六节 高阶线性微分方程	(199)
第七节 常系数齐次线性微分方程	(201)
第八节 常系数非齐次线性微分方程	(204)
第九节 欧拉方程	(207)
第十节 常系数线性微分方程组解法举例	(209)
本章整合	(211)

教材习题详解(上册)

第一章 函数与极限	(218)
教材习题 1-1 解答	(218)
教材习题 1-2 解答	(223)
教材习题 1-3 解答	(224)
教材习题 1-4 解答	(227)
教材习题 1-5 解答	(229)
教材习题 1-6 解答	(231)
教材习题 1-7 解答	(233)

教材习题 1-8 解答	(234)
教材习题 1-9 解答	(237)
教材习题 1-10 解答	(238)
教材总习题一解答	(239)
第二章 导数与微分	(244)
教材习题 2-1 解答	(244)
教材习题 2-2 解答	(248)
教材习题 2-3 解答	(253)
教材习题 2-4 解答	(256)
教材习题 2-5 解答	(260)
教材总习题二解答	(263)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(267)
教材习题 3-1 解答	(267)
教材习题 3-2 解答	(270)
教材习题 3-3 解答	(272)
教材习题 3-4 解答	(275)
教材习题 3-5 解答	(281)
教材习题 3-6 解答	(287)
教材习题 3-7 解答	(291)
教材习题 3-8 解答	(294)
教材总习题三解答	(295)
第四章 不定积分	(302)
教材习题 4-1 解答	(302)
教材习题 4-2 解答	(305)
教材习题 4-3 解答	(311)
教材习题 4-4 解答	(315)
教材习题 4-5 解答	(319)
教材总习题四解答	(321)
第五章 定积分	(328)
教材习题 5-1 解答	(328)
教材习题 5-2 解答	(333)
教材习题 5-3 解答	(337)
教材习题 5-4 解答	(343)
教材习题 5-5 解答	(345)
教材总习题五解答	(347)
第六章 定积分的应用	(356)
教材习题 6-2 解答	(356)

目录

教材知识全解+教材习题详解

教材习题 6-3 解答	(365)
教材总习题六解答	(368)
第七章 微分方程	(371)
教材习题 7-1 解答	(371)
教材习题 7-2 解答	(373)
教材习题 7-3 解答	(376)
教材习题 7-4 解答	(381)
教材习题 7-5 解答	(387)
教材习题 7-6 解答	(391)
教材习题 7-7 解答	(395)
教材习题 7-8 解答	(398)
教材习题 7-9 解答	(404)
教材习题 7-10 解答	(407)
教材总习题七解答	(413)

教材知识全解(下册)

第八章 空间解析几何与向量代数	(421)
第一节 向量及其线性运算	(422)
第二节 数量积 向量积 *混合积	(425)
第三节 曲面及其方程	(430)
第四节 空间曲线及其方程	(434)
第五节 平面及其方程	(437)
第六节 空间直线及其方程	(440)
本章整合	(445)
第九章 多元函数微分法及其应用	(451)
第一节 多元函数的基本概念	(452)
第二节 偏导数	(457)
第三节 全微分	(463)
第四节 多元复合函数的求导法则	(467)
第五节 隐函数的求导公式	(473)
第六节 多元函数微分学的几何应用	(476)
第七节 方向导数与梯度	(482)
第八节 多元函数的极值及其求法	(484)
第九节 二元函数的泰勒公式(略)	(489)
第十节 最小二乘法(略)	(489)
本章整合	(489)

第十章 重积分	(500)
第一节 二重积分的概念与性质	(501)
第二节 二重积分的计算法	(503)
第三节 三重积分	(512)
第四节 重积分的应用	(519)
第五节 含参变量的积分	(524)
本章整合	(525)
第十一章 曲线积分与曲面积分	(537)
第一节 对弧长的曲线积分	(538)
第二节 对坐标的曲线积分	(541)
第三节 格林公式及其应用	(546)
第四节 对面积的曲面积分	(553)
第五节 对坐标的曲面积分	(556)
第六节 高斯公式 * 通量与散度	(559)
第七节 斯托克斯公式 * 环流量与旋度	(563)
本章整合	(565)
第十二章 无穷级数	(580)
第一节 常数项级数的概念和性质	(581)
第二节 常数项级数的审敛法	(583)
第三节 幂级数	(591)
第四节 函数展开成幂级数	(596)
第五节 函数的幂级数展开式的应用	(599)
第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	(601)
第七节 傅里叶级数	(604)
第八节 一般周期函数的傅里叶级数	(608)
本章整合	(610)

教材习题详解(下册)

第八章 空间解析几何与向量代数	(620)
教材习题 8-1 解答	(620)
教材习题 8-2 解答	(622)
教材习题 8-3 解答	(624)
教材习题 8-4 解答	(626)
教材习题 8-5 解答	(628)
教材习题 8-6 解答	(631)
教材总习题八解答	(634)

目 录

教材知识全解+教材习题详解

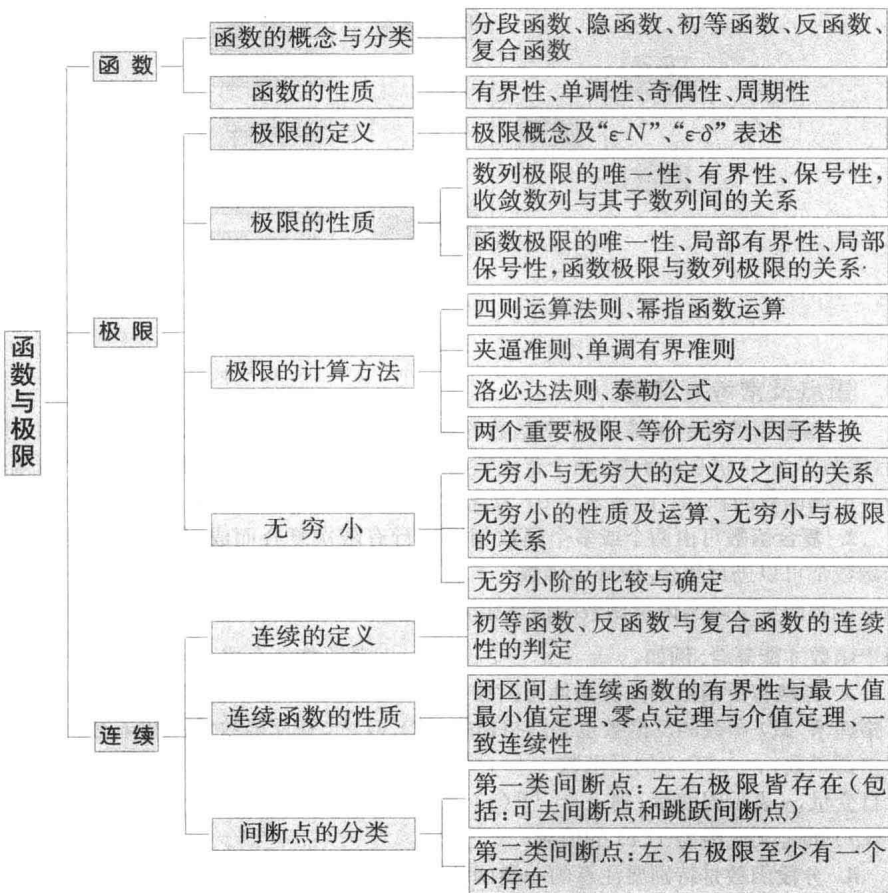
第九章 多元函数微分法及其应用	(639)
教材习题 9-1 解答	(639)
教材习题 9-2 解答	(641)
教材习题 9-3 解答	(643)
教材习题 9-4 解答	(646)
教材习题 9-5 解答	(651)
教材习题 9-6 解答	(654)
教材习题 9-7 解答	(658)
教材习题 9-8 解答	(661)
教材习题 9-9 解答	(665)
教材习题 9-10 解答	(667)
教材总习题九解答	(668)
第十章 重积分	(674)
教材习题 10-1 解答	(674)
教材习题 10-2 解答	(676)
教材习题 10-3 解答	(689)
教材习题 10-4 解答	(695)
教材习题 10-5 解答	(702)
教材总习题十解答	(704)
第十一章 曲线积分与曲面积分	(712)
教材习题 11-1 解答	(712)
教材习题 11-2 解答	(714)
教材习题 11-3 解答	(718)
教材习题 11-4 解答	(724)
教材习题 11-5 解答	(727)
教材习题 11-6 解答	(729)
教材习题 11-7 解答	(731)
教材总习题十一解答	(734)
第十二章 无穷级数	(741)
教材习题 12-1 解答	(741)
教材习题 12-2 解答	(744)
教材习题 12-3 解答	(747)
教材习题 12-4 解答	(748)
教材习题 12-5 解答	(751)
教材习题 12-6 解答	(756)
教材习题 12-7 解答	(758)
教材习题 12-8 解答	(761)
教材总习题十二解答	(765)

第一章 函数与极限

本章内容概览

函数是高等数学讨论的主要对象,它以极限理论为基础,在研究函数时我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数的性质,所以应用运动变化的观点来掌握函数,极限与函数的连续性理论是高等数学的基础,如何用已知来逼近未知,用有限来逼近无限,在无限变化的过程中考查变量的变化趋势,从有限过渡到无限,这是本章需掌握的基本思想.

本章知识图解



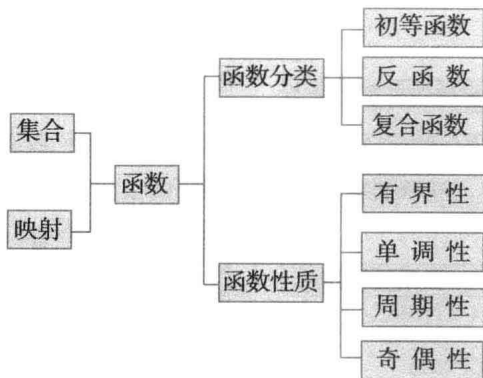
第一节 映射与函数

教材知识全解

考研大纲要求解读

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

本节知识结构图解



重点及常考点突破

1. **函数奇偶性的运算**:两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数;两个奇函数的积或商(除数不为0)为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.

2. **复合函数**可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成.但是并不是任意两个函数都可以进行复合.设外层函数 $y = f(u)$, $u \in D$, 内层函数 $u = g(x)$, $x \in E$ 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时,即 $E^* = \{x | g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$ 时,两个函数才能复合.例如, $y = \sqrt{u^2 - 2}$, $u = \sin x$ 就不能复合成 $y = \sqrt{\sin^2 x - 2}$.

3. **函数有反函数的充要条件**为函数是一一对应的.严格单调函数必有反函数,且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减).反之,有反函数的函数未必一定是严格单调函数, $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 表示同一条曲线,若用 x 表示自变量, y 表示因变量,则 $y = f^{-1}(x)$ 及 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, $f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域.

4. **分段函数**是特别要注意的一类函数,它用几个不同解析式“分段”表示一个函数.所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域.定义域的各段最多只能

在端点处重合,重合时对应的函数值应该相等.图像分段的函数不一定是分段函数,分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

5. 本节的难点是复合函数,重点是复合函数及分段函数.考研中常出现的题型是求复合函数,特别是求分段函数的复合函数,方法主要有3种:代入法、分析法和图示法.

典型例题解析

基本题型 I :求函数定义域

【例1】 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}; (2) y = \sqrt{1-2x} + \sqrt{e - e^{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2}}.$$

解:(1) 由 $x \neq 0, 1 + \frac{1}{x} \neq 0, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \neq 0$, 得 $x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$.

故函数定义域为 $\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}\right\}$.

(2) 由已知条件知

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 \leq 1 \end{cases}, \quad \text{即} \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ -1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1 \end{cases}.$$

解得 $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$, 因此定义域为 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

☛ 方法点击:求初等函数的定义域有下列原则:

- (1) 分母不能为零.
- (2) 偶次根式的被开方数不能为负数.
- (3) 对数的真数不能为零或负数.
- (4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x| \leq 1$.
- (5) $\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- (6) $\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

求复合函数的定义域,通常将复合函数看成一系列初等函数的复合,然后考查每个初等函数的定义域和值域,得到对应的不等式组,通过联立求解不等式组,就可以得到复合函数的定义域.

【例2】 设 $f(x) = e^{x^2}, f(\varphi(x)) = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 的定义域. (考研题)

【思路探索】 由题目条件设法求出 $\varphi(x)$ 的函数表达式,然后再求出 $\varphi(x)$ 的定义域.

解:由 $f(x) = e^{x^2}$, 知 $f(\varphi(x)) = e^{\varphi^2(x)}$, 又 $\because f(\varphi(x)) = 1-x$.

$\therefore e^{\varphi^2(x)} = 1-x$, 于是 $\varphi^2(x) = \ln(1-x)$, 再根据 $\varphi(x) \geq 0$,

可知: $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ 或 $\varphi(x) = -\sqrt{\ln(1-x)}$.

因此 $\varphi(x)$ 的定义域为: $\ln(1-x) \geq 0$, 即 $x \in (-\infty, 0]$.

基本题型 II: 求初等函数的表达式

【例3】 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, 求 $f(x)$.

解: 因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$,

所以 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$.

基本题型 III: 求分段函数的表达式

【例4】 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] = (\quad)$. (考

研题)

$$(A) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

解: $g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0, \\ x^2+2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

故应选(D).

方法点击: 本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程. 先将 $g[f(x)]$ 表示为 $f(x)$ 的函数, 再解不等式 $f(x) \leq 0$ 与 $f(x) > 0$, 最后将 $g[f(x)]$ 表示为 x 的函数.

【小结】 复合函数的求解方法主要有三种:

- ① 代入法: 将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替, 适用于初等函数的复合.
- ② 分析法: 抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.
- ③ 图示法: i. 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图像; ii. 将 $y = f(u)$ 的分界点在 xu 坐标平面上画出; iii. 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间; iv. 将 iii 所得的结果代入 $y = f(u)$ 中, 便得到复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应的变化区间. 适用于两分段函数的复合.

基本题型 IV: 求反函数

【例5】 函数 $y = \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 - \sqrt{1-x}}$ 的反函数为_____.

解: 令 $t = \sqrt{1-x}$, 则 $y = \frac{1+t}{1-t}$, 所以 $t = \frac{y-1}{y+1}$, 即 $\sqrt{1-x} = \frac{y-1}{y+1}$,