

高等学校教材

控制工程基础

KONGZHI GONGCHENG JICHU



● 祝守新 主编

● 徐中 韩连英 副主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等学校教材

控制工程基础

主 编 祝守新
副主编 徐 中 韩连英
参 编 唐树森 盖克荣 孙 伟 邢英杰
主 审 赵立国



机械工业出版社

本书介绍工程上广为应用的经典控制论中信息处理和系统分析与综合的基本方法。全书共分九章：分别介绍了系统的数学模型、时间特性分析法、频率分析法、根轨迹法、控制系统的稳定性分析、控制系统的误差分析与计算、系统的设计与校正、计算机采样控制系统等。

本书的特点是在论述上注意深入浅出，精讲多练，简洁实用，每章都采用 MATLAB 软件对系统进行分析 and 计算。

本书适于高等学校机械工程及自动化、机械设计制造及其自动化等专业的大学本科生物用作教材，也可供有关专业工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

控制工程基础/祝守新主编. —北京：机械工业出版社，2003.7

ISBN 7-111-12435-9

I. 控… II. 祝… III. 控制系统—系统工程
IV. 0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 048184 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑：李艳霞 责任校对：张莉娟 责任印制：侯新民

北京京丰印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2003 年 8 月第 1 版 · 第 1 次印刷

787mm×1092mm¹/₁₆ · 12.75 印张 · 300 千字

0 001—3 000 册

定价：21.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

前 言

本书是高等学校机械工程及自动化（机械设计制造及其自动化）专业系列教材之一，适应教学计划 40~50 学时的“控制工程基础”课程。

本书是在编者廿十几年教学和科研工作的基础上，总结同类教材的编写经验，并吸收国内有关本课程领域内最新的教学和科研成就，精心组织编写而成的。

本书作为一门技术基础课教材，力求在阐述控制工程论的基本概念、基本知识和基本方法的基础上，密切结合工程实际，突出重点，使读者对经典控制论有较全面的了解。在论述上力求做到概念准确，层次清晰，深入浅出，易教易学。全书取材新颖，舍弃陈旧的内容。每章都尽量采用 MATLAB 等先进的分析和计算软件，给出分析和计算的程序和实例，使读者通过这些软件和实例，加深对经典控制理论的理解。

全书共分九章，包括绪论、数学模型、时间特性分析、频率特性分析、根轨迹法、稳定性分析、误差分析、系统设计与校正和计算机采样控制系统等。

本书适用于普通工科院校机械类各专业，也适用于其他各类成人高校、职业技术学院、电大和自学考试有关专业，并可供从事自动控制和控制工程的科技工作者参考。

全书由大连轻工业学院祝守新任主编，大连理工大学徐中、长春工业大学韩连英任副主编。参加本书编写的有：祝守新（第一章、第二章和第三章）、韩连英（第四章、第六章）、大连轻工业学院唐树森（第五章）、长春工业大学盖克荣（第七章）、大连理工大学徐中、孙伟、邢英杰（第八章、第九章）。

全书由大连理工大学赵立国教授主审。在本书的编写过程中，引用了书后有关文献中的材料和思想，谨向这些文献的作者表示谢意。

由于编者的水平，书中的缺点和错误在所难免，恳切希望读者和专家批评指正。

编者

2003 年 5 月

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 控制工程研究的对象与任务	1
第二节 系统的基本概念	2
第三节 对控制系统的基本要求	7
第四节 本课程特点及学习方法	8
习题	8
第二章 系统的数学模型	9
第一节 引言	9
第二节 线性微分方程的建立	11
第三节 非线性系统的线性化	12
第四节 拉普拉斯变换	15
第五节 传递函数	25
第六节 框图及其应用	30
第七节 信号流程图及梅逊公式	37
第八节 用 MATLAB 语言进行部分分式展开	40
习题	42
第三章 时间特性分析法	45
第一节 时间响应与典型输入信号	45
第二节 一阶系统的瞬态响应	48
第三节 二阶系统的瞬态响应	51
第四节 高阶系统的瞬态响应	62
第五节 用 MATLAB 语言计算时间特性	64
习题	68
第四章 频率分析法	70
第一节 频率特性的基本概念	70
第二节 频率特性表示法	75
第三节 典型环节的频率特性	76
第四节 控制系统开环波德图	87
第五节 闭环频率特性	90
第六节 由实测频率特性曲线确定系统传递函数	91
第七节 用 MATLAB 语言计算频率特性	94
习题	97

第五章 根轨迹法	100
第一节 绘制根轨迹的基本条件	100
第二节 以 K_1 为参数变量的根轨迹的绘制	102
第三节 增加开环零点根对根轨迹的影响	112
第四节 用 MATLAB 语言绘制系统的根轨迹	115
习题	116
第六章 控制系统的稳定性分析	118
第一节 控制系统稳定性的基本概念	118
第二节 劳斯稳定判据	120
第三节 奈奎斯特稳定判据	123
第四节 用 MATLAB 语言分析稳定性	130
习题	132
第七章 控制系统的误差分析与计算	134
第一节 控制系统的稳态误差概念及系统类型	134
第二节 稳态误差计算	135
第三节 减小稳态误差的方法	141
第四节 用 MATLAB 语言计算系统的稳态误差	143
习题	146
第八章 系统的设计与校正	148
第一节 系统的性能指标及校正方式	148
第二节 调整增益的校正	155
第三节 串联超前校正	155
第四节 串联滞后校正	162
第五节 滞后-超前校正	167
第六节 反馈校正	172
习题	173
第九章 计算机采样控制系统	175
第一节 概述	175

第二节	信号的采样与保持	177
第三节	z 变换和 z 反变换	181
第四节	采样控制系统的数学模型	185
第五节	采样控制系统的性能分析	189

第六节	用 MATLAB 语言设计数字控制 系统	193
习题		195
参考文献		197

第一章 绪 论

在科学技术日新月异发展的今天,自动控制在工业、农业、国防和科学技术的现代化中起着重要的作用,除了在宇宙飞船系统、导弹制导系统和机器人系统等领域中,自动控制具有特别重要的作用之外,它已成为现代机器制造业和工业生产过程中的重要而不可缺少的组成部分。例如,在制造工业的数控机床的控制、航空和航天工业的自动驾驶仪系统设计中,以及在汽车工业的小汽车和大卡车设计中,自动控制都是必不可少的。此外,在过程控制工业中,对压力、温度、粘度和流量的控制这样一些工业操作过程,自动控制也是不可缺少的。

自动控制理论和实践的不断发展,为人们提供了获得动态系统最佳性能的方法,提高了生产率,并且使人们从繁重的体力劳动和大量重复性的手工操作中解放出来。因此,自动控制理论是大多数工程技术人员和科学工作者的必备知识。

自动控制理论主要由经典控制理论、现代控制论和智能控制论组成。

经典控制理论是在复数域中以传递函数概念为基础的理论体系,主要研究单输入、单输出、线性定常系统的分析与设计。

现代控制理论是在时间域中以状态变量方程概念为基础的理论体系,主要研究具有高性能、高精度的多输入—多输出系统的分析与设计。系统可以是线性的或非线性的、定常的或时变的、连续的或离散的、确定型的或随机型的。

经典控制理论是自动控制理论的基础,又称为控制理论基础。经典控制理论在工业和运输领域,包括机械、化工、能源、交通、轻工以及国防的大多数实际工程中是较为重要的,相当多的工程问题还是用它来解决。经典控制论仍不失为解决工程问题的基本方法,因此本书将主要介绍经典控制理论即控制工程基础。

在实际工程问题上,机械、电气、液压和计算机被广泛采用,而且常常互相渗透、相互配合,向机电液一体化发展,这就需要结合机电液系统阐述工程上共同遵循的基本控制规律,即控制理论基础。

学习控制理论基础要解决两个问题:一是如何分析某个给定控制系统的工作原理、稳定性和过渡过程品质;二是如何根据实际需要来进行控制系统的设计。前者主要是分析系统,后者是综合与设计。

第一节 控制工程研究的对象与任务

控制工程实质上是研究工程中系统动态特性的一门科学。

所谓系统,就其物理形态来说,可为机械、电气、液压及光学等等工程上的系统,也有可能为社会上的、生物学上的系统。但无论如何,它们的动态行为都可以用微分方程描述。这种系统在外界条件作用下所表现出来的动态历程,说明了系统输入、模型与输出的内在关系。

下面就以大家熟悉的质量—阻尼—弹簧的机械系统为例加以说明,如图 1-1 所示。图中, m 、 k 及 B 分别代表系统的质量、弹性系数及阻尼系数。如果输入 $x(t)$ 代表外力,而输出 $y(t)$ 代表系统的位移响应,那么系统的数学模型可由如下微分方程描述:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = x(t) \quad (1-1)$$

所谓系统的动态性能,主要归为三类:

- 1) 已知系统的 m 、 k 、 B 及输入 $x(t)$, 确定输出 $y(t)$;
- 2) 已知输入 $x(t)$ 及输出 $y(t)$, 确定系统的参数 m 、 k 及 B ;
- 3) 已知系统的参数 m 、 k 及 B , 给定输出 $y(t)$ 时, 确定输入 $x(t)$ 。

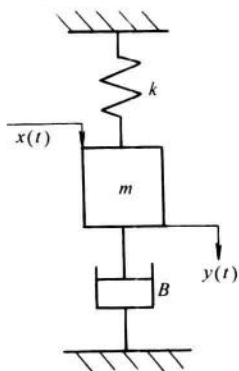


图 1-1 质量—阻尼—弹簧系统

因此,就系统及其输入、输出三者之间的动态关系而言,控制工程主要研究并解决如下几个方面的问题:

- 1) 系统已定,并且输入已知时,求出系统的输出(响应),并通过输出来研究系统本身的有关问题,即系统分析;
- 2) 系统已定,且系统的输出也已给定,要确定系统的输入,应使输出尽可能符合给定的最佳要求,即系统的最优控制。
- 3) 输入已知,且输出也是给定时,确定系统应使得输出尽可能符合给定的最佳要求,即最优设计。
- 4) 当输入与输出均已知时,求出系统的结构与参数,即建立系统的数学模型,此即系统的识别或系统辨识。
- 5) 当系统已定时,以识别输入或输入中的有关信息,此即为系统的预测。

从本质上看,问题 1) 是已知系统与输入求输出;问题 2) 是已知系统和输出求输入;问题 3) 和 4) 是已知输入与输出求系统;问题 5) 是已知系统求输入与输出。

本书主要是以经典控制理论来研究问题 1), 同时也以适当篇幅来研究其他问题。

第二节 系统的基本概念

一、自动控制系统工作原理

在各种生产过程和生产设备中,常常需要使其中某些物理量(如温度、压力、位置、速度等)保持恒定,或者让它们按照一定的规律变化,要满足这种需要,就应该对生产机械或设备进行及时的控制和调整,以抵消外界的扰动和影响。下面介绍自动控制系统如何对这些物理量实现自动控制。

首先研究恒温系统这个例子。实现恒温控制有两种方法:人工控制和自动控制。图 1-2 所示为人工控制的恒温箱。恒温箱的温度靠通过改变调压器的电压来达到控制温度的目的。箱内温度是由温度计测量的。人工控制恒温的过程可归结如下:

- 1) 观测由测量元件(温度计)测出的恒温箱(被控制元件)的温度;
- 2) 与要求的温度值(给定值)进行比较,得出偏差的大小和方向;

3) 根据偏差大小和方向再进行比较控制：当温度高于所要求的给定温度值时，就调节调压器动触头使电压减小，温度降低；若温度低于给定的值，则调节调压器动触头，使电压增加，温度升高。

4) 如温度还达不到要求时，要反复进行上面的步骤操作。

因此，人工控制的过程就是测量、求偏差、再控制以纠正偏差的过程。也就是“检测偏差用以纠正偏差”的过程。

对于这样简单的控制形式，如果能找到一个控制器来代替人的职能，这样人工控制系统就变成自动控制系统了。图 1-3 所示的就是恒温箱自动控制系统。其中，恒温箱的温度是由给定信号电压 u_1 控制的。当外界因素引起箱内温度变化时，作为测量元件的热电偶，把温度转换成对应的电压信号 u_2 ，并反馈回去与给定信号 u_1 相比较，所得结果即为温度的偏差信号 $\Delta u = u_1 - u_2$ 。经过电压、功率放大后，用以改变电动机的转速和方向，并通过传动装置带动调压器动触头。当温度偏高时，动触头向着减小电压的方向运动，反之加大电压，直到温度达到给定值为止，即只有在偏差信号 $\Delta u = 0$ 时，电动机才停转。这样就完成了所要求的控制任务。而所有这些装置便组成了一个自动控制系统。

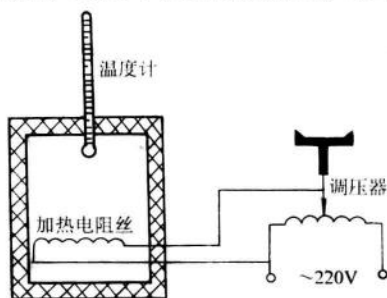


图 1-2 人工控制的恒温箱

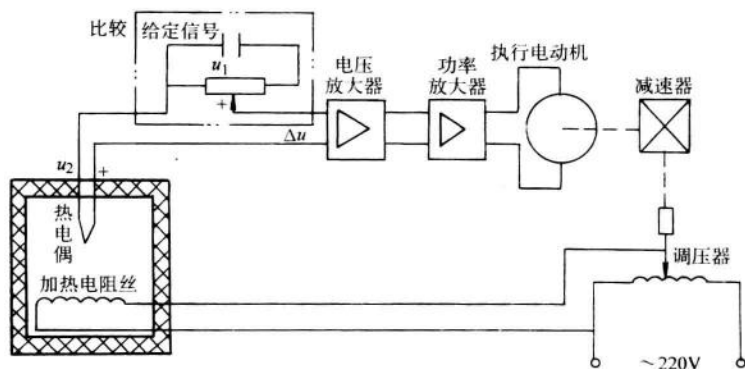


图 1-3 恒温箱的自动控制系统

图 1-4 所示为发动机的瓦特式速度调节器的基本原理。允许进入到发动机内的燃料数量，根据希望的发动机速度与实际的发动机速度之差进行调整。

该系统的工作过程如下：速度调节器的调节原理是当工作于希望的速度时，高压油将不进入动力油缸的任何一侧。如果由于扰动，使得实际速度下降低于希望值，则速度调节器的离心力下降，导致控制阀向下移动，从而对发动机的燃料供应增多，发动机的速度增大，直到达到希望的速度时为止。另一方面，如果发动机的速度增大，以至于超过了希望的速度值，则速度调节器的离心力增大，从而导致控制阀向上移动。这样就会减少燃料供应，导致发动机的速度减小，直至达到希望的速度时为止。

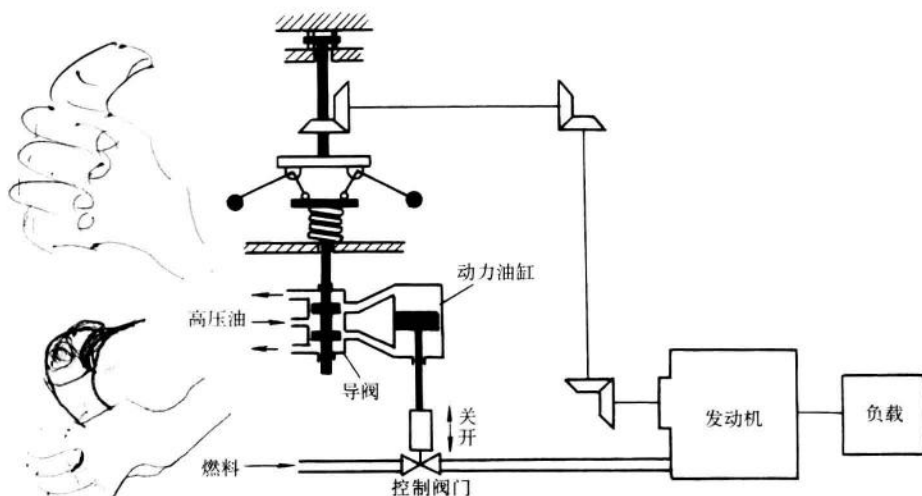


图 1-4 速度控制系统

上述例子有一个共同的特点，就是都要检测偏差，并用检测到的偏差去纠正偏差，可见没有偏差便没有调节过程。在自动控制系统中，这一偏差是通过反馈建立起来的。给定量也叫控制系统的输入量，被控制量称为系统的输出量。反馈就是指输出量通过适当的测量装置将信号全部或一部分返回输入端，使之与输入量进行比较。比较的结果叫偏差。因此，基于反馈基础上的“检测偏差用以纠正偏差”的原理又称为反馈控制原理。利用反馈控制原理组成的系统称为反馈控制系统。实现自动控制的装置可各不相同，但反馈控制的原理却是相同的，可以说，反馈控制是实现自动控制最基本的方法。

二、系统的分类

工程中的系统，按其物理结构来说，虽属多种多样，大小与复杂程度也不尽相同，但可以人为地将其分类，以利于研究。

1. 按输入输出的关系分类

工业上用的控制系统，根据有无反馈作用，又可分为两类：开环控制系统与闭环控制系统。

(1) 开环控制系统 当构成系统每一环节的输入不受系统的输出影响时，这样的系统称为开环控制系统。图 1-5 所示的数控机床进给系统采用步进电动机直接驱动时，其系统就属于开环控制系统。这一系统中，系统的输出不对系统的输入有任何影响。

(2) 闭环控制系统 当构成系统的任一环节的输入受到系统的输出影响时，这样的系统称为闭环控制系统。图 1-6 所示数控机床进给系统采用检测装置控制时，其系统就属于闭环控制系统。

这一系统中，由于工作台位移（输出）经检测装置测出实际的位移后与给定的位移指令比较，从而产生控制作用，达到控制工作台位移的目的。因此，如果实际的位移没达到指令要求时，这种控制作用始终作用于工作台，直到工作台达到所要求的位置。图 1-3 所示恒温箱自动控制系统和图 1-4 所示速度控制系统都是闭环控制系统。它们的输出都通过反馈作用到输入端。

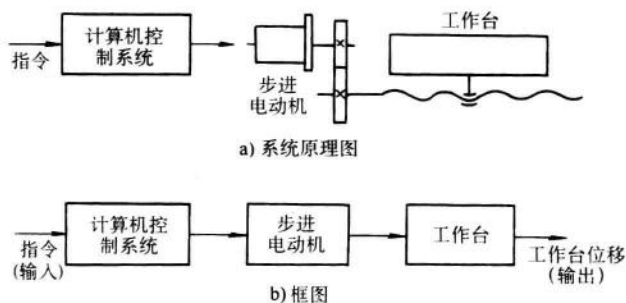


图 1-5 数控机床开环进给系统

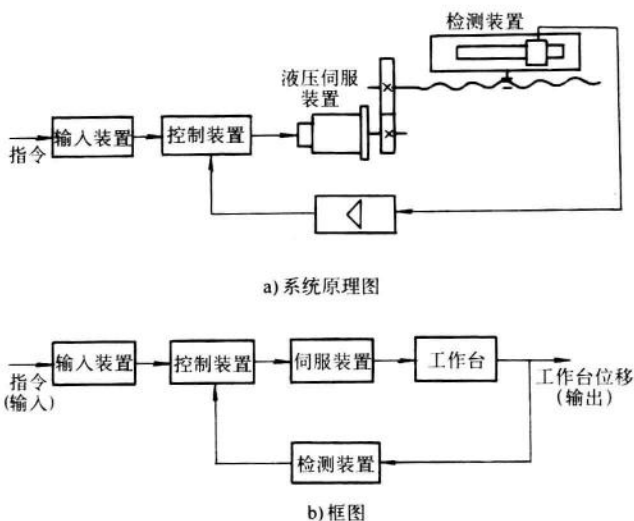


图 1-6 数控机床闭环进给系统

开环控制系统的优点是结构简单、调试方便，且造价低廉；缺点是精度较低。

闭环控制系统突出的优点是精度高，不管出现什么干扰，只要被控制量的实际值偏离给定值时，闭环控制就会产生控制作用来减小这一偏差。

闭环系统也有缺点，这类系统是检测偏差用以纠正偏差，或者说是靠偏差进行控制。在工作过程中，系统总会存在偏差，由于元件的惯性（如负载的惯性），很容易引起振荡，使系统不稳定。因此精度和稳定性是闭环系统存在的一对矛盾。

从稳定性的角度看，开环系统比较容易构造，结构也比较简单，因为开环系统一般不存在稳定性问题。

2. 按输出的变化规律分类

(1) 恒值系统 在外界作用下，系统的输出能基本保持为常值的系统称为恒值系统，如恒温、恒压及恒速系统。

(2) 随动系统 系统的输出能相应于输入在广阔范围里按任意规律变化的系统称为随动

系统。如仿形车床的液压仿形刀架，靠模为给定的系统输入，刀架仿形运动为系统的输出。

(3) 程序控制系统 在外界作用下，系统的输出按预定程序变化的系统称为程序控制系统。如前面曾介绍过的数控机床的进给系统，都属于程序控制系统。

3. 连续系统与采样系统

如果系统每个环节之间所传递的信息都是时间的连续信号，这样的系统称为连续系统。如果在系统中，计算机参与工作时，环节之间所传递的信息除了有连续信号外，还有离散信号，这样的系统称为采样系统或离散系统。

4. 定常系统与时变系统

描述系统微分方程的系数不随时间而变化的系统称为定常系统。其系数随时间变化的系统，称为时变系统。

三、反馈控制系统的基本组成

图 1-7 就是一个典型的反馈控制系统，该图表示了这些元件在系统中的位置及其相互间的关系。由图可以看出，作为一个典型的反馈控制系统应该包括反馈元件、给定元件、比较元件、放大元件、执行元件及校正元件等。

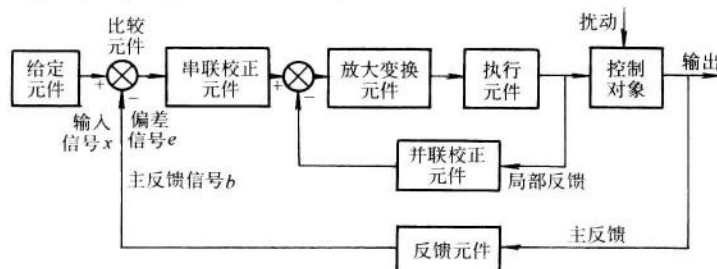


图 1-7 典型的反馈控制系统框图

(1) 给定元件 主要用于产生给定信号或输入信号。例如，调速系统中的给定电位器。

(2) 反馈元件 它测量被控量或输出量，产生主反馈信号，该信号与输出量存在着确定的函数关系（通常为比例关系）。例如，调速系统中用于测速的测速发电机。

(3) 比较元件 用来比较输入信号和反馈信号之间的偏差，可以是一个差接的电路，它往往不是一个专门的物理元件，有时也叫比较环节。自整角机、旋转变压器、机械式差动装置都是物理的比较元件。

(4) 放大元件 对偏差信号进行放大和功率放大的元件，例如伺服功率放大器、电液伺服阀等。

(5) 执行元件 直接对控制对象进行操作的元件，例如执行电动机、液压马达等。

(6) 控制对象 控制系统所要操纵的对象，它的输出量即为系统的控制量，例如机床工作台等。

(7) 校正元件 也称为校正装置，用以提高控制系统动态性能，有反馈校正和串联校正等形式。

四、名词术语

(1) 输入信号（又称输入量、控制量或给定量） 它是控制输出量变化规律的信号。而

输入量则又广义地泛指输入到控制系统中的信号，如扰动信号，也包括给定信号。

(2) 输出信号（又称输出量、被控制量或被调整量） 它的变化规律是要加以控制的，应保持与输入信号之间有一定的函数关系。

(3) 反馈信号（或称反馈） 从系统（或元件）输出端取出信号，经过变换后加到系统（或元件）输入端，这就是反馈信号。当它与输入信号相同，即反馈结果有利于加强输入信号的作用时叫正反馈。反之，符号相反而抵消输入信号作用时叫负反馈。直接取自系统最终输出端的反馈叫主反馈。主反馈一定是负反馈，否则偏差越来越大，直至使系统失去控制。除主反馈外，有的系统还有局部反馈，这主要是用来对系统进行校正、补偿或线性化而加入的。

(4) 偏差信号（或称偏差） 它是控制信号与主反馈信号之差，有时也称为作用误差。

(5) 误差信号（或称误差） 它是指系统输出量的实际值与希望值之差。在很多情况下，希望值就是系统的输入量。

这里要注意，误差和偏差不是同一概念。只有在单位反馈系统中，误差才等于偏差。

(6) 扰动信号（又称扰动或干扰） 除控制信号以外，对系统输出量产生影响的因素都叫扰动。如果扰动产生在系统内部，称为内扰；产生在系统外部，则称为外扰。外扰动也是系统的一种输入量。

第三节 对控制系统的基本要求

· 自动控制系统用于不同的目的，要求也往往不一样。但自动控制技术是研究各类控制系统共同规律的一门技术，对控制系统有一个共同的要求，一般可归结为稳定、准确、快速三方面。

1. 稳定性

由于系统存在着惯性，当系统的各个参数匹配不妥时，将会引起系统的振荡而失去工作能力。稳定性就是指动态过程的振荡倾向和系统能否恢复平衡状态的能力。稳定性的要求是系统工作的首要条件。

2. 准确性

是指在调整过程结束后输出量与给定量之间的偏差，或称为静态精度，这也是衡量系统工作性能的重要指标。例如数控机床精度越高，则加工精度也越高。而一般恒温 and 恒速系统的精度都可在给定值的 1% 以内。

3. 快速性

这是在系统稳定的前提下提出的。快速性是指当系统输出量与给定量之间产生偏差时，消除这种偏差过程的快速程度。

综上所述，对控制系统的基本要求是在稳定的前提下，系统要求稳、准、快。

由于受控对象的具体情况不同，各种系统对稳、准、快的要求各有侧重，例如，随动系统对快速性要求较高，而调速系统则对稳定性提出较严格的要求。

同一系统稳、准、快是相互制约的。快速性好，可能会有强烈振荡；改善稳定性，控制过程可能又过于迟缓，精度也可能变坏。分析和解决这些矛盾，也是本学科讨论的重要内容。对于机械动力学系统的要求，首要的也是稳定性，因为过大的振荡将会使部件过载而损坏，此外还要降低噪声、增加刚度等，这些都是控制理论研究的主要问题。

第四节 本课程特点及学习方法

本课程是机械设计制造及其自动化专业的技术基础课，是一门比较抽象、理论性较强的课程，它起着为自动控制的基础理论与专业课程之间搭设桥梁的作用。

没有控制理论作为基础，机械设计制造及其自动化专业的一些后续课，如测试技术、液压与气压传动等一些要求，将无法实现。

本课程用到了本专业所学的全部数学知识，甚至在某些方面还需加深。因此掌握所学的数学知识是十分必要的。但是，倒不一定要过分地追求数学论证中的严密性。由于本课仅是技术基础课，在尽可能联系专业知识时，不应该忽略本课程的系统性与理论性。

本门课程主要是研究数学模型的建立方法。并在此基础上分析系统的动态特性。因此，在学习本课程时，注意力要放在基础理论上，而不要过分追求系统的原理与实际工作的情况。

为对基础理论有较好的理解，必须重视习题与实验环节，以加深理论的理解与深化，培养正确的思维能力与实际解决问题的能力。

习 题

1-1 分析比较开环控制系统与闭环控制系统的特征、优缺点和应用场合的不同。

1-2 指出下列系统中哪些属于开环系统控制，哪些属闭环系统控制？

家用电冰箱 家用空调机 家用洗衣机 抽水马桶 普通车床 电饭煲 多速电风扇
高楼水箱 调光台灯 自动报时电子钟

1-3 组成控制系统的主要环节有哪些？它们各有什么特点，起什么作用？

1-4 图 1-8 表示一个水箱水位控制系统，试说明其工作原理并画出系统原理框图。

1-5 图 1-9 是一个带测速反馈的位置随动系统。图中，1 为控制电位器，2 为反馈电位器，A 为电压与功率放大器，SM 为伺服电动机，TG 为测速发电机，试说明其工作原理并画出系统原理框图。

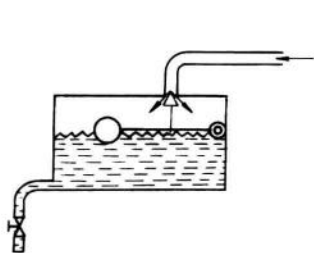


图 1-8 题 1-4 图

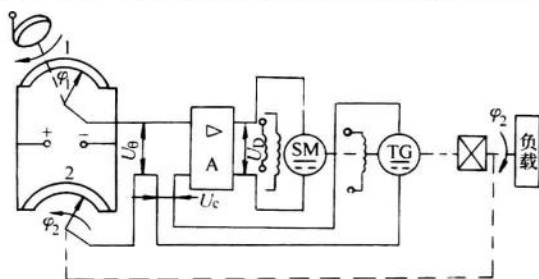


图 1-9 题 1-5 图

第二章 系统的数学模型

所谓系统的数学模型就是描述系统输入输出关系的数学表达式。建立起控制系统的数学模型,并在此基础上对控制系统进行分析、设计、综合,是控制系统的基本研究方法。

对于我们在工程上所遇到的系统,如机械、电气、液压系统,其输入输出的关系都可以用微分方程来描述。而要了解系统对输入量的动态响应,按古典的方法就必须解微分方程,但对高阶系统,这是很麻烦的工作。为了解决这一问题,控制工程采用了传递函数的概念,应用拉普拉斯变换与反变换的数学工具,得到系统的动态响应。

本章主要介绍线性微分方程的建立及微分方程线性化的方法,然后在拉普拉斯变换的基础上,介绍传递函数概念,并通过系统框图和信号流程图的概念,得出系统的传递函数。在本章最后,将介绍用 MATLAB 语言求取传递函数的部分分式展开式以及拉普拉斯反变换。

第一节 引言

一、系统的数学模型

数学模型就是系统的输出与输入间的数学表达式。数学模型分为静态模型和动态模型,在静态条件下得到的方程称为静态模型,一般用代数方程来表示。在动态条件下得到的方程称为动态模型,一般用微分方程来描述。

工程上常用的数学模型包括微分方程、传递函数和状态方程,微分方程是基本的数学模型,是列写传递函数的基础。

系统的数学模型可以从理论分析和试验的方法来获取,两种方法是相辅相成的。理论分析可以大致确定数学模型的阶次、参数与结构,而试验的方法可以最终确定数学模型的形式。

从理论上建立系统的数学模型,常称为理论建模。

二、线性系统

如果系统的数学模型是线性的,这种系统称为线性系统。一个系统,无论是用代数方程还是用微分方程来描述,其组成项的最高指数称为方程的次数。一次微分方程叫做线性微分方程;除此以外,非一次的微分方程称为非线性微分方程。

当系统的动态特性可由线性微分方程来描述时,该系统称为线性系统。

$$(1) 3y = 2x + 4$$

$$(2) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 6 \frac{dx}{dt} + 3x$$

$$(3) \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 4x$$

$$(4) 3y = x^2 + 3xy + x$$

$$(5) \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y = x$$

上面的方程中，(1)、(2)、(3) 为线性方程，(4)、(5) 为非线性方程。

线性系统最重要的特性，就是叠加原理。叠加原理说明，两个不同的输入函数，同时作用于系统的响应，等于两个输入函数单独作用的响应之和。因此，线性系统对几个输入量的响应，可以一个一个地处理，然后对它们的响应结果进行叠加。

三、非线性系统

用非线性方程表示的系统，叫做非线性系统。

虽然许多物理关系常以线性方程来表示，但是在大多数情况下，实际的关系并非真正线性的。事实上，对物理系统进行仔细研究后可以发现，即使对所谓的线性系统来说，也只是在一定的工作范围内或忽略那些影响较小的非线性因素所引起的误差，工程上又允许的话，这一系统就可以作为线性系统来处理。图 2-1 为常见的非线性特性曲线。

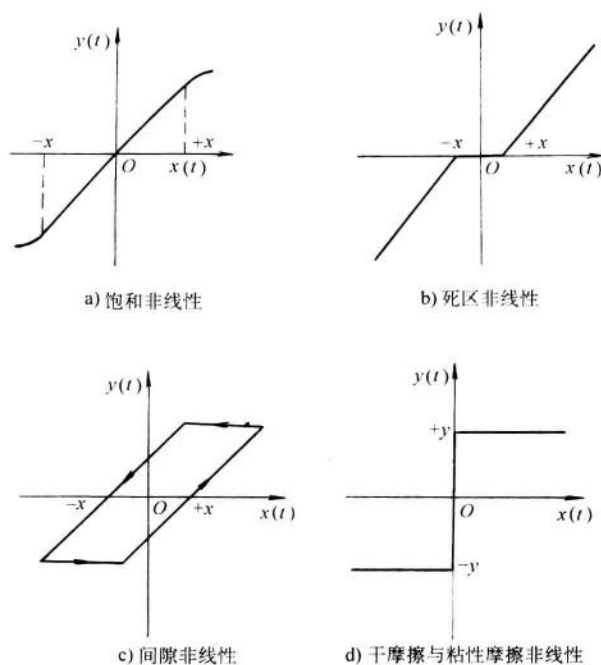


图 2-1 常见的非线性特性曲线

非线性系统重要的特性，是不能应用叠加原理。因此，对包含非线性系统的问题求解，其过程通常是非常复杂的。为了绕过由非线性系统而造成的数学上的难关，常需引入“等效”线性系统来代替非线性系统。图 2-1 中的饱和非线性和死区非线性，当采用等效线性系统时，仅在一定的工作范围内是正确的，而对于那些本质的非线性，则用线性化处理的数学模型来近似地表示非线性系统。在第三节中，将介绍线性化处理的方法。

第二节 线性微分方程的建立

一、建立线性微分方程的步骤

1) 首先将系统划分为若干个环节, 确定每一个环节的输入信号和输出信号。确定输入信号和输出信号时, 应使前一个环节的输出信号是后一个环节的输入信号。

2) 写出每一环节(或元件)输出信号和输入信号相互关系的运动方程, 找出联系输出量与输入量的内部关系, 并确定反映这种内在联系的物理规律。而这些物理定律的数学表达式就是环节(或元件)的原始方程。在此同时再做一些数学上的处理, 如非线性函数的线性化, 忽略一些次要因素等。

3) 消去中间变量, 列出各变量间的关系式。设法消去中间变量, 最后得到只包含输入量和输出量的方程。

4) 化成标准形式, 即输出量放在方程的左端, 而输入量放在方程的右端, 且各阶导数项其阶次依次按幂排列。

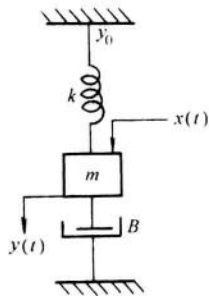
下面, 通过一些常见的例子, 说明微分方程式的列写方法。

二、举例

1. 机械系统的微分方程

机械系统设备大致分为两类: 平移的和旋转的。它们之间的区别在于前者施加的是力, 而产生的是位移; 而后者施加的是扭矩, 产生的是转角。牛顿定律和虎克定律等物理定律是建立机械系统数学模型的基础。

(1) 机械平移系统 图 2-2 为一个具有质量 m 、弹性系数为 k 的弹簧和阻尼系数为 B 的阻尼器组成的机械系统。施加以外力 $x(t)$, 研究外力 $x(t)$ 与位移 $y(t)$ 的关系。假设参考坐标 y_0 是静止的。



系统的原始方程的建立: 根据牛顿第二定律, 外力 $x(t)$ 应该与质量 m 产生的惯性力 $x_1(t)$ 、弹簧产生的弹性力 $x_2(t)$ 以及阻尼器产生的阻尼力 $x_3(t)$ 相平衡, 即

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = x(t) \quad (2-1)$$

式中

$$\begin{aligned} x_1(t) &= m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \\ x_2(t) &= ky(t) \\ x_3(t) &= B \frac{dy(t)}{dt} \end{aligned}$$

因而式 (2-1) 可写成

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = x(t) \quad (2-2)$$

(2) 机械旋转系统 图 2-3 所示的转动惯量为 J 的转子与弹性系数为 k 的弹性轴和阻尼系数为 B 的阻尼器连接。假设外部施加扭矩 $m(t)$, 则系统产生一个偏离平衡位置的角位移 $\theta(t)$ 。现研究外扭矩 $m(t)$ 和角位移

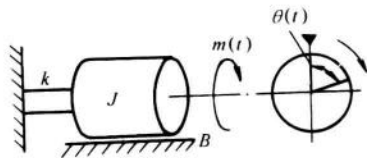


图 2-3 具有惯性矩、扭矩和阻尼器的旋转系统