

普通高等教育“十二五”规划教材

计算流体力学有限元 方法及其编程详解

JISUAN LIUTI LIXUE YOUXIANYUAN FANGFA
JIQI BIANCHENG XIANGJIE

毕超◎编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育“十二五”规划教材

计算流体力学有限元 方法及其编程详解

毕超 编著
朱红青 主审



机械工业出版社

有限元方法是计算流体力学的一个重要分支,在工程计算领域中的应用越来越广泛。本书内容从最基本的有限元基础知识讲起,难度逐渐加深,每一章都是针对一个计算实例进行理论讲解和公式推导的,在此基础上,每个实例都配置有十分清晰的程序代码。

本书共分8章,第1章以有限元方法求解常微分方程为例,讲解有限元方法求解微分方程的基础知识;第2章以理想流体流动为例,介绍有限元方法求解 Laplace 方程的方法;第3章讲述速度-压力有限元法和罚函数有限元法求解牛顿流体 Navier-Stocks (简记为 N-S) 方程组的方法,为后续章节奠定基础;第4章讲述非牛顿流体问题的求解方法;第5章讲解考虑惯性项时 N-S 方程组的求解方法;第6章讲述与时间有关的流体流动问题的求解方法;第7章讲述与时间有关的热传导问题的求解方法;第8章讲述速度与温度耦合问题的有限元求解方法。

本书采用 MATLAB 语言编写计算程序,以便于读者阅读。本书可作为本科生或研究生计算流体力学课程教材,也可作为相关课程的辅导教材。

图书在版编目 (CIP) 数据

计算流体力学有限元方法及其编程详解/毕超编著.

—北京:机械工业出版社,2013.7

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-42538-0

I. ①计… II. ①毕… III. ①计算流体力学-有限元法-高等学校-教材②计算流体力学-程序设计-高等学校-教材 IV. ①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 102011 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:姜凤 责任编辑:姜凤 李乐

版式设计:常天培 责任校对:李锦莉

封面设计:马精明 责任印制:张楠

北京京丰印刷厂印刷

2013 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷

184mm×260mm·15 印张·370 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-42538-0

定价:28.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066 教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010)68326294 机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010)88379649 机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010)88379203 封面无防伪标均为盗版

序

计算流体力学在目前工程计算领域应用越来越广泛，其中有限元法是计算流体力学的主要计算方法之一。国内大量相关领域的科研工作都是依托国外公司大型商业软件进行计算的，虽然能够得到各种各样问题的计算结果，但是科研人员无法从核心算法角度来考察计算结果的正确性，也无法根据自己的需要对这些软件进行二次开发，这限制了国内相关领域基础理论研究的发展。

作者毕超，北京化工大学一位年轻有为的副教授，中国塑料加工工业协会专家，曾荣获 2013 年北京市青年英才荣誉称号；主要从事聚合物混炼成型加工装备的开发研制，利用计算流体力学有限元方法分析聚合物在混炼、成型装备内的流动和混合机理。他将多年科研和教学工作内容进行了总结，完成了《计算流体力学有限元方法及其编程详解》一书，从基本理论和编程方法两个方面对有限元方法在计算流体力学和传热学方面的应用进行了详细的介绍。

该书采用新颖的理论讲解和实例编程相结合的撰写模式，讲述了计算流体力学有限元方法的基本理论。书中内容难度由浅入深，将计算实例、理论推导、编程逻辑、程序编写及结果分析有机结合，归纳简化了使用有限元方法求解计算流体力学和传热学问题的复杂烦琐过程，讲述了理想流体、牛顿流体、非牛顿流体流动问题的有限元求解方法，特别是还包括了考虑惯性项影响、非定常流动以及流热耦合等多种复杂非线性问题的求解方法。该书内容丰富、理论深入、逻辑清晰，有利于读者更加清晰地了解计算流体力学有限元方法的基本理论，不仅可以作为计算流体力学领域本科生和研究生的课程教材，而且书中内容还可以为开发具有自主知识产权的大型工程计算软件提供理论基础。该书是近些年来我国计算流体力学领域为数不多的理论和实践并重的专业性著作。

毕超博士的这本书，在继承与创新、理论与实践、主要问题与科学体系等诸多方面都取得了较为理想的成果。因此，我很高兴为本书作序，并谨向广大科技工作者和工程技术人员推荐此书。

水力学与山区河流开发保护国家重点实验室(四大大厦)

许明志

2013年7月

前 言

有限元方法是计算流体力学的一个重要分支，在工程计算领域中的应用越来越广泛。笔者从2005年博士在读阶段就开始从事这一领域的研究，目前已经有8年了，且留校任教后开设的研究生课程也是围绕这个内容。笔者与很多同学一样，在刚开始接触计算流体力学时，发现虽然计算流体力学的教材很多，但是大多数教材中的理论都很高深，需要费很大工夫才能理解其中的意思，编程就更是消耗精力了。于是笔者就想写一本能够让读者易懂的有关计算流体力学及其相关编程的书。经过8年的学习和教学积累，笔者在2008年开始着手撰写本书，目前已经有将近5年的时间了，终于在2013年年初完成了本书的书稿。

本书内容从最基本的有限元基础知识讲起，难度逐渐加深，每一章都是针对一个计算实例进行理论讲解和公式推导的，在此基础上，每个实例都配置有十分清晰的程序代码。本书共分8章，第1章以有限元方法求解常微分方程为例，讲解有限元方法求解微分方程的基础知识；第2章以理想流体流动为例，介绍有限元方法求解 Laplace 方程的方法；第3章讲述速度-压力有限元法和罚函数有限元法求解牛顿流体 Navier-Stokes（简记为 N-S）方程组的方法，为后续章节奠定基础；第4章讲述非牛顿流体问题的求解方法；第5章讲解考虑惯性项时 N-S 方程组的求解方法；第6章讲述与时间有关的流体流动问题的求解方法；第7章讲述与时间有关的热传导问题的求解方法；第8章讲述速度与温度耦合问题的有限元求解方法。

本书采用 MATLAB 语言编写计算程序，以便于读者阅读。本书可作为本科生或研究生计算流体力学课程教材，也可作为相关课程的辅导教材。

本书的原始资料来自于笔者参加北京化工大学江波教授开设的“聚合物加工数值计算”课程时所记的随堂笔记，在此特别感谢江波教授当年上课时对笔者的指导。

中国矿业大学（北京）朱红青教授担任本书主审，他提出的宝贵意见对本书的撰写具有很大的指导和帮助，在此表示感谢。

本书献给我的爱妻赵昕楠和刚刚出生的女儿安亿。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，欢迎广大读者对书中内容多提宝贵意见，可发邮件至笔者信箱 bichao@mail.buct.edu.cn 或 bichao812@sohu.com。

本书所有章节的配套程序可在诚睿研究室新浪博客 (<http://blog.sina.com.cn/13296676545>) 中下载，也欢迎广大读者通过诚睿研究室新浪微博 (weibo.com/13296676545) 与笔者沟通交流。

毕超

2013 年于北京

目 录

序	
前言	
第 1 章 有限元方法的基本思路	1
1.1 一维一次常微分方程的有限元数值求解	1
1.1.1 方程及精确解	1
1.1.2 有限元方法求解	1
1.1.3 程序编写	8
1.2 一维二次常微分方程的有限元数值求解	10
1.2.1 方程及精确解	10
1.2.2 有限元方法求解	11
1.2.3 程序编写	15
第 2 章 理想流体势流的有限元求解	21
2.1 求解实例和数学方程	21
2.1.1 求解实例	21
2.1.2 理想流体的特征及流动方程	21
2.1.3 边界条件	21
2.2 有限元方法求解二维拉普拉斯方程	22
2.2.1 计算区域的离散	22
2.2.2 插值函数及相关计算	24
2.2.3 加权余量方程	24
2.2.4 单元方程的建立	25
2.2.5 总体方程的组合	27
2.2.6 编程计算流程	28
2.3 程序编写	28
2.3.1 主程序	28
2.3.2 网格划分程序	33
2.3.3 网格图形显示程序	35
2.4 计算结果	36
第 3 章 牛顿流体流动的有限元求解	37
3.1 求解实例和数学方程	37
3.1.1 求解实例	37
3.1.2 数学方程	37
3.1.3 边界条件	37
3.2 速度-压力有限元求解	38
3.2.1 计算区域的离散	38
3.2.2 插值函数及其相关计算	41
3.2.3 加权余量方程	43
3.2.4 单元方程的建立	45
3.2.5 总体方程的组合	48
3.2.6 求解流程	49
3.3 速度-压力有限元程序	50
3.3.1 网格离散程序	50
3.3.2 主程序	54
3.3.3 单元 B_i^s 子块计算程序	59
3.3.4 单元 C_i^s 子块计算程序	61
3.3.5 单元 D_i^s 子块计算程序	63
3.3.6 单元 F_i^s 子块计算程序	65
3.3.7 网格细化程序	68
3.3.8 压力插值程序	69
3.3.9 矩形网格绘制程序	70
3.3.10 计算结果	71
3.4 罚函数有限元求解	72
3.4.1 计算区域的离散	72
3.4.2 插值函数及其相关计算	73
3.4.3 加权余量方程	73
3.4.4 单元方程的建立	73
3.4.5 总体方程的组合	74
3.4.6 压力的计算	74
3.4.7 求解流程	75
3.5 罚函数有限元程序	76
3.5.1 主程序	76
3.5.2 单元 DP_i^s 子块计算程序	81
3.5.3 单元内结点压力计算程序	83
3.5.4 其他程序	85
3.5.5 计算结果	85
第 4 章 非牛顿流体流动的有限元求解	86
4.1 计算实例及数学方程	86
4.1.1 计算实例	86
4.1.2 数学方程	86
4.2 有限元方法求解方程	87
4.2.1 计算区域的离散	87

4.2.2 插值函数及其相关计算	87	6.1.1 求解实例	140
4.2.3 加权余量方程	87	6.1.2 数学方程	140
4.2.4 单元方程的建立	87	6.1.3 边界条件	141
4.2.5 总体方程的组合	88	6.2 有限元求解	141
4.2.6 迭代求解流程	88	6.2.1 计算区域的离散	141
4.3 程序编写	90	6.2.2 插值函数及其相关计算	141
4.3.1 网格生成程序	90	6.2.3 加权余量方程	141
4.3.2 主程序	90	6.2.4 单元方程的建立	142
4.3.3 单元结点黏度计算程序	101	6.2.5 总体方程的组合	142
4.3.4 单元 D_{ij}^e 子块计算程序	103	6.2.6 非定常问题非线性方程组的求解方法	143
4.3.5 其他程序	105	6.3 相关程序编写	145
4.4 计算结果分析	105	6.3.1 网格生成程序	145
4.4.1 网格数量对计算精度的影响	105	6.3.2 主程序	146
4.4.2 求解问题的速度、压力、剪切速率和黏度分布	105	6.3.3 单元方程子块计算程序	158
4.4.3 物性参数对出口速度分布的影响	106	6.3.4 Bird-Carreau 本构模型的单元内结点黏度计算程序	160
4.4.4 入口压力对出口流量的影响	107	6.3.5 单元内速度积分程序及单元面积计算程序	162
第5章 考虑惯性项影响的牛顿流体流动有限元求解	108	6.3.6 其他程序	164
5.1 求解实例和数学方程	108	6.4 结果分析	164
5.1.1 求解实例	108	第7章 与时间有关的热传导问题的有限元求解	167
5.1.2 数学方程	108	7.1 求解实例和数学方程	167
5.1.3 边界条件	109	7.1.1 求解实例	167
5.2 有限元求解	109	7.1.2 数学方程和边界条件	167
5.2.1 计算区域的离散	109	7.2 热传导方程的有限元求解	168
5.2.2 插值函数及其相关计算	109	7.2.1 计算区域的离散	168
5.2.3 加权余量方程	109	7.2.2 插值函数及其相关计算	168
5.2.4 单元方程的建立	110	7.2.3 加权余量方程	168
5.2.5 总体方程的组合	111	7.2.4 单元方程的建立	169
5.2.6 非线性方程组的求解方法	112	7.2.5 总体方程的组合	170
5.3 相关程序编写	114	7.2.6 代入边界条件及迭代求解	170
5.3.1 “速度项提出法”+“Newton-Raphson 迭代法”相关程序	114	7.3 相关程序编写	172
5.3.2 “直接推导法”+“线性化交替迭代法”相关程序	127	7.3.1 网格生成程序	172
5.4 结果分析	136	7.3.2 主程序	175
5.4.1 两组程序计算结果对比	136	7.3.3 单元温度积分计算程序	183
5.4.2 惯性项影响分析	138	7.3.4 单元面积计算程序	184
第6章 非牛顿流体非定常流动的有限元求解	140	7.3.5 热传导项 CD^e 子块计算程序	186
6.1 求解实例和数学方程	140	7.3.6 时间项 CD^e 子块计算程序	188
		7.3.7 热传导边界项 CDB^e 子块计算程序	190
		7.3.8 其他程序	192

7.4 计算结果分析	192	8.3 相关程序	204
7.4.1 区域温度变化	192	8.3.1 网格生成程序	204
7.4.2 加热热流密度对升温过程的 影响	194	8.3.2 主程序	208
7.4.3 空气温度对升温过程的影响	194	8.3.3 单元结点黏度计算程序	220
第8章 速度与温度耦合问题的有限 元求解	195	8.3.4 单元 D_{ij}^e 子块计算程序	221
8.1 求解实例和数学方程	195	8.3.5 单元 C_i^e 子块计算程序	221
8.1.1 求解实例	195	8.3.6 单元 B_i^e 子块计算程序	222
8.1.2 数学方程	195	8.3.7 单元 F_i^e 子块计算程序	222
8.1.3 边界条件	196	8.3.8 单元 CD^e 子块计算程序	222
8.1.4 与剪切速率和温度有关的本构 方程	197	8.3.9 单元 DL^e 子块计算程序	222
8.2 能量方程的有限元求解	197	8.3.10 单元 NH^e 子块计算程序	224
8.2.1 计算区域的离散	197	8.3.11 单元 CDB^e 子块计算程序	226
8.2.2 插值函数及其相关计算	198	8.4 计算结果分析	226
8.2.3 加权余量方程	198	8.4.1 计算结果	226
8.2.4 单元方程的建立	200	8.4.2 入口压力对温度分布的影响	227
8.2.5 总体方程的组合	202	8.4.3 流动区域收敛比对温度分布 的影响	227
8.2.6 能量方程与 N-S 方程组耦合时 的求解流程	203	8.4.4 黏性耗散对温度分布的影响	229
		参考文献	231

第 1 章 有限元方法的基本思路

本章将以简单的常微分方程为例，介绍有限元方法数值求解过程的基本思路，从而让读者对有限元方法的基本概念和求解过程具有一定了解。本章分为两节，分别为一维一次常微分方程的有限元数值求解和一维二次常微分方程的有限元数值求解。1.1 节中的实例计算相对简单，希望读者能亲手逐步推导，体会计算过程。1.2 节的内容较 1.1 节复杂，讲述以编程思路为主，希望读者能把程序逐行输入 MATLAB，体会编程思路。

1.1 一维一次常微分方程的有限元数值求解

1.1.1 方程及精确解

求解如下微分方程：

$$\frac{du}{dx} - 1 = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.1)$$

边界条件为

$$x = 0 \text{ 时, } u = 0 \quad (1.2)$$

值得注意的是，微分方程的边界条件主要分为两类：第一类边界条件，又称为本质边界条件，即已知边界处场量的数值，如式 (1.2) 所示；第二类边界条件，又称自然边界条件，即已知边界处场量导数的数值，如 $x = 0$ 时， $\frac{du}{dx} = g$ 。带有第二类边界条件的微分方程的求解，我们将在 1.2 节中介绍。

式 (1.1) 和式 (1.2) 构成的微分方程的精确解为

$$u = x \quad (1.3)$$

稍后我们会对比有限元方法计算得到的数值解与该精确解的差别。

1.1.2 有限元方法求解

1. 计算区域的离散

(1) 单元类型的选择

在进行有限元计算之前，需要将计算区域进行离散化，也就是通常所说的网格划分。本节研究的是一维问题，使用一维线性单元对计算区域进行等间距离散，离散结果如图 1-1 所示。图中 n 为结点序号， e 为单元序号，共有 N 个结点、 E 个单元，且 $N = E + 1$ 。

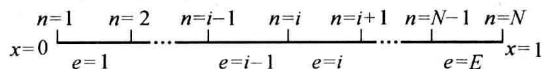


图 1-1 一维线性单元离散结果

(2) 结点序号

结点序号共分为两类，即单元内部结点序号和总体结点序号。单元内部结点序号就是各

个结点在单元内部的序号，与离散时所选单元类型及插值函数构造有关；总体结点序号是结点在整个离散区域内统一排列的结点序号。同一个结点可能属于多个单元，该结点在不同的单元内总体结点序号是唯一的，而内部结点序号可能是不同的。

(3) 离散数据的存储

选择单元类型后，便可以建立离散数据，供有限元计算使用。离散结果通常包括以下数据：

单元信息数据 JM：存储单元所包含的结点序号，其行数等于总单元数，列数与单元内结点个数一致，本节实例取 2，第 i 行存储内容为第 i 个单元所包含的所有结点序号。

结点坐标数据 JX：存储结点的坐标，其行数等于总结点数，列数与所研究问题的维数一致，本节实例取 1，其第 i 行存储内容为第 i 个结点的坐标数据。

第一类边界条件数据 JB1：存储第一类边界条件的相关数据。其行数等于处于第一类边界条件的总结点数，列数与边界条件的分类及所研究问题的维数有关，本节实例取 2，第一列为处于第一类边界上的结点序号，第二列为处于第一类边界上的结点对应的边界值。

第二类边界条件数据 JB2：存储第二类边界条件的相关数据。其行数等于处于第二类边界条件的总单元边数，列数与所研究问题的维数及离散单元类型密切相关，应包括边界单元序号、单元内边界边序号、边界边的外法线方向余弦（二维、三维问题）及边界上各个结点的边界值。本节不涉及该类边界条件，相关内容见 1.2 节。

以图 1-1 所示一维线性单元离散结果为例取单元数 $E = 5$ 、结点数 $N = 6$ ，上述数据分别见表 1-1 ~ 表 1-3。

表 1-1 JM 数据表

1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

表 1-2 JX 数据表

0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

表 1-3 JB1 数据表

1	0
---	---

2. 插值函数和权函数

网格离散完成后，单元的插值函数也就随之确定。对于一维线性单元，插值函数包括 Φ_1 和 Φ_2 ，具体表达式为

$$\begin{cases} \Phi_1 = 1 - \xi \\ \Phi_2 = \xi \end{cases} \quad (1.4)$$

式中， ξ 为局部坐标，取值范围为 $\xi \in [0, 1]$ 。以第二个单元为例（图 1-2），分析局部坐标 ξ 与笛卡儿坐标 x 的对应关系：

$$\xi = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x - x_1^e}{\Delta x^e} \quad (1.5)$$

式中， Δx^e 为单元长度； x_1^e 为单元第一结点坐标； x_2^e 为单元第二结点坐标。

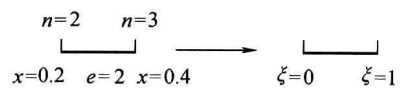


图 1-2 一维线性单元的坐标映射

在已知单元结点处函数值 u_i^e 的前提下, 可通过与插值函数 Φ_i 的结合, 近似地描述单元内部各结点处的函数值 u^e , 即

$$u^e = \sum u_i^e \Phi_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (1.6)$$

用向量形式表示为

$$u^e = (1 - \xi \quad \xi) \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \Phi^T u_j^e \quad (1.7)$$

式中, I 为单元内结点总数。

插值函数具有两个特性, 简述如下:

- 1) 插值函数的个数与单元结点的个数一致;
- 2) 单元内, 插值函数只在其对应结点局部坐标处取值为 1, 其余结点处取值为 0。

如果需要详细了解上述内容请参阅参考文献 [1]。

3. 加权余量方程的建立

设 \hat{u} 为方程 (1.1) 的一个近似解, 即有

$$\frac{d \hat{u}}{dx} - 1 = r \quad (1.8)$$

式中, r 为残差。用任意权函数 u^* 乘以残差 r , 并在方程定义域 $[0, 1]$ 内进行积分:

$$\int_0^1 u^* r dx = \int_0^1 u^* \left(\frac{d \hat{u}}{dx} - 1 \right) dx \quad (1.9)$$

数值方法求解方程 (1.1) 的根本出发点就是要使得残差 $r \rightarrow 0$ 。式 (1.9) 中 u^* 又称为权函数。有限元方法中, 权函数的选择具有任意性。本书介绍内容为 Galerkin 有限元方法, 该方法规定权函数等于插值函数, 即

$$u^* = \Phi \quad (1.10)$$

为了简化表达式, 将式 (1.9) 中 \hat{u} 用 u 代替得到

$$\int_0^1 \Phi \left(\frac{du}{dx} - 1 \right) dx = 0 \quad (1.11)$$

即得到式 (1.1) 的加权余量方程。

4. 单元有限元方程的建立

将式 (1.11) 的积分区域转换到单元内, 有

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} \Phi \left(\frac{du}{dx} - 1 \right) dx = 0 \quad (1.12)$$

写成局部坐标形式:

$$\int_0^1 \Phi \left(\frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} - 1 \right) \frac{dx}{d\xi} d\xi = 0 \quad (1.13)$$

由式 (1.5) 求导, 有

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\Delta x^e} \quad (1.14)$$

则

$$\frac{dx}{d\xi} = \Delta x^e \quad (1.15)$$

将式 (1.7)、式 (1.14) 和式 (1.15) 代入式 (1.13), 有

$$\int_0^1 \Phi \left(\frac{d(\Phi^T \mathbf{u}_l^e)}{d\xi} \frac{1}{\Delta x^e} - 1 \right) \Delta x^e d\xi = 0 \quad (1.16)$$

化简后得到

$$\frac{1}{\Delta x^e} \int_0^1 \Phi \left(\frac{d\Phi^T}{d\xi} \right) d\xi \mathbf{u}_l^e = \int_0^1 \Phi d\xi \quad (1.17)$$

写成矩阵形式:

$$\frac{1}{\Delta x^e} \int_0^1 \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{1\xi} & \Phi_{2\xi} \end{pmatrix} d\xi \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} d\xi \quad (1.18)$$

式中, $\Phi_{1\xi}$ 和 $\Phi_{2\xi}$ 分别为 Φ_1 和 Φ_2 对 ξ 的导数, 由式 (1.4) 求导, 可得

$$\Phi_{1\xi} = -1 \quad (1.19a)$$

$$\Phi_{2\xi} = 1 \quad (1.19b)$$

将式 (1.19) 代入式 (1.18) 得到

$$\frac{1}{\Delta x^e} \int_0^1 \begin{pmatrix} -\Phi_1 & \Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix} d\xi \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} d\xi \quad (1.20)$$

由式 (1.4) 积分得到

$$\int_0^1 \Phi_1 d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) d\xi = \left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad (1.21)$$

$$\int_0^1 \Phi_2 d\xi = \int_0^1 \xi d\xi = \frac{1}{2}\xi^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad (1.22)$$

将式 (1.21) 和式 (1.22) 代入式 (1.20), 且单元长度 $\Delta x^e = 1/5$, 得到

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

写成简化矩阵形式:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}_l^e = \mathbf{b}^e \quad (1.24)$$

5. 总体方程的组合

建立单元有限元方程后, 进行总体方程的组合。总体方程形式为

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_l = \mathbf{b} \quad (1.25)$$

式中, \mathbf{K} 为 $N \times N$ 矩阵; \mathbf{u}_l 为 $N \times 1$ 向量; \mathbf{b} 为 $N \times 1$ 向量; N 为总体结点数。

(1) \mathbf{K} 矩阵的组合

就本节研究实例来讲, 第 $i-1$, i 和 $i+1$ 个单元的系数矩阵 \mathbf{K}^e 可写成:

$$\mathbf{K}^{e(i-1)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{e(i-1)} & K_{12}^{e(i-1)} \\ K_{21}^{e(i-1)} & K_{22}^{e(i-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{i-1,i-1}^{e(i-1)} & K_{i-1,i}^{e(i-1)} \\ K_{i,i-1}^{e(i-1)} & K_{ii}^{e(i-1)} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{K}^{e(i)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{e(i)} & K_{12}^{e(i)} \\ K_{21}^{e(i)} & K_{22}^{e(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii}^{e(i)} & K_{i,i+1}^{e(i)} \\ K_{i+1,i}^{e(i)} & K_{i+1,i+1}^{e(i)} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{K}^{e(i+1)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{e(i+1)} & K_{12}^{e(i+1)} \\ K_{21}^{e(i+1)} & K_{22}^{e(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{i+1,i+1}^{e(i+1)} & K_{i+1,i+2}^{e(i+1)} \\ K_{i+2,i+1}^{e(i+1)} & K_{i+2,i+2}^{e(i+1)} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

三个系数矩阵中第二项表达式内 \mathbf{K}^e 的下标为单元内部结点序号，第三项表达式内 \mathbf{K}^e 的下标为总体结点序号。将每个单元的单元方程系数矩阵 \mathbf{K}^e ，按照总体结点序号对应的位置放置到总体方程的系数矩阵 \mathbf{K} 中。如图 1-1 所示，第 i 个结点共用于第 $i-1$ 和 i 个单元，所以 $\mathbf{K}^{e(i-1)}$ 和 $\mathbf{K}^{e(i)}$ 中均出现下标为 (ii) 的项，在 \mathbf{K} 的 (ii) 位置要进行 $K_{ii}^{e(i-1)}$ 和 $K_{ii}^{e(i)}$ 的求和，即

$$K_{ii} = K_{ii}^{e(i-1)} + K_{ii}^{e(i)} \quad (1.29)$$

对于编写程序完成上述组合时，需要利用 JM 数据进行对位求和。对于第 i 个单元来说，进行双层循环求和，第一层循环指标 m 等于 1 到 JM 的列数（本例为 2），第二层循环指标 n 也是由 1 到 JM 的列数（本例为 2），对于一组 m 和 n ，查找 JM (i, m) 和 JM (i, n) 对应数值，并完成如下累加计算：

$$\mathbf{K}(\text{JM}(i, m), \text{JM}(i, n)) = \mathbf{K}(\text{JM}(i, m), \text{JM}(i, n)) + \mathbf{K}_{(m, n)}^{e(i)} \quad (1.30)$$

值得注意的是， m 和 n 就是第 i 个单元系数矩阵各个元素对应的单元内部结点序号，JM (i, m) 和 JM (i, n) 对应数值即为第 i 个单元系数矩阵各个元素对应的总体结点序号。组合后，总体方程系数矩阵 \mathbf{K} 可写成：

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

(2) \mathbf{b} 向量的组合

对于第 $i-1$, i 和 $i+1$ 个单元，单元右边向量可写成 \mathbf{b}^e ：

$$\mathbf{b}^{e(i-1)} = \begin{pmatrix} b_1^{e(i-1)} \\ b_2^{e(i-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i-1}^{e(i-1)} \\ b_i^{e(i-1)} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

$$\mathbf{b}^{e(i)} = \begin{pmatrix} b_1^{e(i)} \\ b_2^{e(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i^{e(i)} \\ b_{i+1}^{e(i)} \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{b}^{e(i+1)} = \begin{pmatrix} b_1^{e(i+1)} \\ b_2^{e(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i+1}^{e(i+1)} \\ b_{i+2}^{e(i+1)} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

三个 \mathbf{b}^e 向量的第二项表达式内 \mathbf{b}^e 的下标为单元内部结点序号，第三项表达式内 \mathbf{b}^e 的下标为总体结点序号。同样，对于第 i 个结点共用于 $i-1$ 和 i 个单元来说， \mathbf{b} 向量相应位置也要体现两个结点的共同作用：

$$b_i = b_i^{e(i-1)} + b_i^{e(i)} \quad (1.35)$$

对于编写程序完成上述组合时，需要利用 JM 数据进行对位求和。对于第 i 个单元来说，进行循环求和时，循环指标 m 等于 1 到 JM 的列数（本例为 2），查找 JM (i, m) 对应数值，并完成如下累加计算：

$$\mathbf{b}(\text{JM}(i, m), 1) = \mathbf{b}(\text{JM}(i, m), 1) + \mathbf{b}_{(m,1)}^{e(i)} \quad (1.36)$$

值得注意的是， m 为第 i 个单元右边向量各个元素对应的单元内部结点序号，JM (i, m) 对应数值即为第 i 个单元右边向量各个元素对应的总体结点序号。组合后得到

$$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{10} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \right)^T \quad (1.37)$$

总体方程最终可以写成：

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

6. 代入边界条件求解

这一步将第一类边界条件数据 JB1 代入到式 (1.38)，第一类边界条件的数据见表 1-3。查表 1-3，可知结点 1 处于第一类边界条件上，且边界数值为零。这里先介绍消行移列法，具体代入步骤为：

1) 将已知场值结点对应行删除，即

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

2) 将其他行中与有已知结点对应的项与已知数值相乘并移动到等号右边, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0$$

则式 (1.38) 变为

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

计算结果为

$$(u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6) = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1) \quad (1.40)$$

这一方法能够让方程降阶, 对于结点较少的求解问题, 适合于读者手工求解。但是当结点个教较多时, 手工求解就无法实现了, 同时由于方程降阶, 也不适合编程, 所以这里给大家介绍一种适合于编程的代入 JBI 的方法——对角线归一代入法。该方法的代入步骤为:

- 1) 将已知 $u_i = \hat{u}_i$ 对应的系数矩阵的列与 \hat{u}_i 相乘, 并移动到方程等号右边;
- 2) 将已知 $u_i = \hat{u}_i$ 对应的系数矩阵的行全部置零;
- 3) 将已知 $u_i = \hat{u}_i$ 对应的系数矩阵的列全部置零;
- 4) 将已知 $u_i = \hat{u}_i$ 对应的系数矩阵的对角线元素置 1;
- 5) 将已知 $u_i = \hat{u}_i$ 对应的右边向量元素置为 \hat{u}_i 。

使用这一方法处理式 (1.38) 后, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

求解结果为

$$\mathbf{u}_I = (u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6) = (0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1) \quad (1.42)$$

图 1-3 给出了本节实例的有限元数值解与精确解的对比, 数据点与曲线完全重合, 可见有限元方法求解正确。

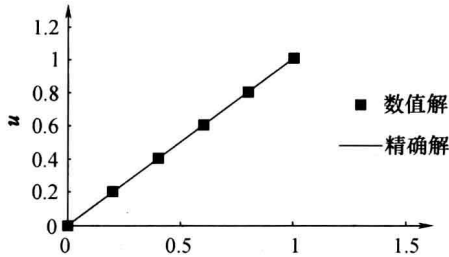


图 1-3 数值解与精确解的对比

1.1.3 程序编写

```
clc
clear
format short
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% 网格离散数据 %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%
```