微微对偶不等式及应用

张运筹

湖南大学出版社

微微对偶不等式及应用

张 运 筹

湖 南 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书主要内容是，微微对偶不等式的内容、形式、证明及应用。全书用全新方法处理了25个高难竞赛题，40个书刊征解题，16个著名不等式，制造了10个新不等式，留下了25个练习题（附解答）；主要方法是，把一些不等式的证明，归结为巧妙地构造一矩阵，恰当地乱出一个矩阵。该书所选例题、习题都是人们所关注的名题、难题，处理方法却是新的。值得注意的是，在此新法下，名题更美了，难题不难了。

广大数学爱好者和中学数学教师，特别是中学数学竞赛培训教师和他的培训对象，钻研该书选题和处理方法，定会得到有益的启示。

微微对偶不等式及应用

张 运 筹

责任编辑：朱 华

☆

湖南大学出版社出版发行

（长沙岳麓山）

湖南省新华书店经销　　湖南省气象局印刷厂印刷

☆

787×1092　32开　3.125印张　70千字

1989年3月第1版　1989年3月第1次印刷

印数：00001—10500册

ISBN 7-314-00313-0/O·20

定价：1.30元

因为美的主要形式就是秩序、匀称和确定性，这些就是数学所研究的原则。所以数学和美不是没有关系的。

——亚里斯多德

数学美主要表现为对称性、简单性、统一性和奇异性。

——徐利治

前　　言

在数学里，不等式的内容比起等式来显得更丰富了，不等式的处理方法自然也越来越发展了，“序”也就越来越引人关注。有一种有关“序”的向量控制理论，也正在得到广泛应用。

本书试图引起更多的中学师生也来关注“序”，尽量避开高等数学中的内容来介绍一种处理不等式的方法。

微微对偶不等式是许多重要不等式的来源。微微对偶不等式在追溯老不等式，制造新不等式，处理高难竞赛题方面都具有特殊的效力。

为了让读者有更多的机会掌握各种各样的矩阵设计，对新方法发生兴趣，本书尽可能每题重新制造矩阵，很少用一个题去作另一个题，尽可能少用常规方法。

这本小册子着重介绍了微微对偶不等式的应用。但这只是一个起步，作者希望有更多的人写出更多的续篇。

在这本小册子的写作过程中，得到了欧阳录教授的大力支持，还有叶军同志为此书的完稿作了大量具体工作，作者在此一并感谢。

作　　者

目　　录

一、微微对偶不等式……………………………………（1）
1.内容和形式……………………………………………（1）
2.证明……………………………………………………（3）
3.两行的情形……………………………………………（4）
4.一些简单例子…………………………………………（6）
二、微微对偶不等式的应用…………………………（10）
1.处理一些数学竞赛题…………………………………（10）
2.处理一些书刊征解题…………………………………（29）
3.处理一些著名不等式…………………………………（55）
4.处理一些其他不等式…………………………………（71）
三、练习题……………………………………………（81）
四、练习题解答………………………………………（83）

一、微微对偶不等式

1. 内容和形式

微微对偶不等式是指以下两个不等式，简 称S-不等式和T-不等式。

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a'_{ij}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (S)$$

$$\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a'_{ij}\geqslant\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (T)$$

此处，$0\leqslant a_{i1}\leqslant a_{i2}\leqslant\cdots\leqslant a_{in}$，$a'_{i1}$ $a'_{i2}\cdots a'_{in}$是a_{i1}、a_{i2}、…、a_{in}的任意排列，$i=1$，2，…，m。

为了便于理解、记忆和应用微微对偶不等式，我们考虑$m\times n$个数摆成的两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\leqslant a_{12}\leqslant\cdots\leqslant a_{1n}\\ a_{21}\leqslant a_{22}\leqslant\cdots\leqslant a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}\leqslant a_{m2}\leqslant\cdots\leqslant a_{mn}\end{pmatrix},$$

$$A'=\begin{pmatrix} a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in}\\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in}\end{pmatrix},$$

其中A'的第1、2、…、m行的数，还分别是A的第1、2、…、m行的数，只是改变了排列次序。A是同序矩阵，A'是

A的乱序矩阵。

S-不等式就是

A'的列积和$\leqslant A$的列积和，

记作 $$S(A')\leqslant S(A);$$

T-不等式就是

A'的列和积$\geqslant A$的列和积，

记作 $$T(A')\geqslant T(A)。$$

为了应用方便起见，我们对一般矩阵再作一些说明。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

可简记为$A=[a_{ij}]_{m\times n}$。

A中每行的数在该行任意交换位置，可乱出$(n!)^m$个矩阵，都叫A的乱序矩阵，其中有一个矩阵，每行都是从左到右由小到大的排列，这个矩阵叫A的同序矩阵，若矩阵A的乱序阵可经行行交换或列列交换变出A的同序矩阵，则这个矩阵叫A的可同序矩阵。显然，A的列积和或列和积与A的行行交换或列列交换无关。

下面的等式显然成立。

$$S([\alpha_i a_{ij}])=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m S([a_{ij}]),$$

$$T([\alpha_j a_{ij}])=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m T([a_{ij}])。$$

A的有限个乱序矩阵的列积和中，必有一个最大者，就是A的同序阵的列积和。A的有限个乱序阵的列和积中，必有一个最小者，就是A的同序阵的列和积。

设$A=[a_{ij}]$中，每一个$a_{ij}\geqslant 0$，微微对偶不等式就是

$$S(A\text{的乱序阵}) \leqslant S(A\text{的可同序阵});$$

$$T(A\text{的乱序阵}) \geqslant T(A\text{的可同序阵})。$$

2.证明

若A'是A的可同序阵，则

$$S(A')=S(A),\ T(A')=T(A)。$$

否则，可令A'中有$i<j$,

$$a'_{k\,i} > a'_{k\,j},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ l;$$

$$a'_{k\,i} \leqslant a'_{k\,j},\ k=l+1,\ \cdots,\ m。$$

则可经A'改造出$A''=[a''_{i\,j}]$，其中

$$a''_{k\,i}=a'_{k\,j}<a'_{k\,i}=a''_{k\,j},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ l。$$

其余 $a''_{s\,t} = a'_{s\,t}$。

令 $a'_{1\,i}\cdots a'_{l\,i}=a>b=a'_{1\,j}\cdots a'_{l\,j}$,

$$a'_{l+1\,i}\cdots a'_{m\,i}=c\leqslant d=a'_{l+1\,j}\cdots a'_{m\,j},$$

$$a'_{1\,i}+\cdots+a'_{l\,i}=x>y=a'_{1\,j}+\cdots+a'_{l\,j},$$

$$a'_{l+1\,i}+\cdots+a'_{m\,i}=z\leqslant\omega=a'_{l+1\,j}+\cdots+a'_{m\,j}。$$

则

$$\begin{aligned}S(A'')-S(A') &= (ad+bc)-(ac+bd)\\ &= (a-b)(d-c)\geqslant 0。\end{aligned}$$

$$T(A'')-T(A')$$

$$=[(x+\omega)(y+z)-(x+z)(y+\omega)]\prod_{\substack{r=1\\ i\neq r\neq j}}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a'_{k\,r}\right)$$

$$=(x-y)(z-\omega)\prod_{\substack{r=1\\ i\neq r\neq j}}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a'_{k\,r}\right)\leqslant 0。$$

$\therefore\quad S(A')\leqslant S(A'')$，$T(A')\geqslant T(A'')$。

这就是说，A'可经过有限次“保乱规”的改造到A，且保向：

$$S(A')\leqslant S(A'')\leqslant\cdots\leqslant S(A^{x})=S(A);$$

$$T(A')\geqslant T(A'')\geqslant\cdots\geqslant T(A^{y})=T(A)。$$

得证。

注意，证明中“$a>b$，$c\leqslant d$”必须用$a_{ij}\geqslant0$，但当$m=2$时，不必用$a_{ij}\geqslant0$。因此，当$m=2$时，S-不等式中a_{ij}的非负条件可以取消。在T-不等式中，虽然“$x>y$，$z\leqslant\omega$”不必用$a_{ij}\geqslant0$，但要涉及另一个因子的符号，因此，在T-不等式中，一般来说，不宜取消a_{ij}的非负性条件。因此，在两行阵中，如无特别申明，总是不加非负条件去研究S-不等式，而附加非负条件去研究T-不等式，不再一一强调。

3.两行的情形

设 $A=\begin{pmatrix}a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\\ b_0\leqslant b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n\end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix}a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\\ b_{i_0}\ b_{i_1}\ \cdots\ b_{i_n}\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\\ b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant b_0\end{pmatrix}$，

其中 $i_0\,i_1\cdots i_n$ 是0、1、…、n的一个排列。

A是同序两行阵，B是A的乱序阵，C叫A的全反序阵。

A、B、C间有如下不等式

$$S(A)\geqslant S(B)\geqslant S(C),$$

即 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_k\geqslant\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{i_k}\geqslant\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$。

若$a_j+b_{i_j}\geqslant0$，i，$j=0$，1，…，n，则

$$T(A)\leqslant T(B)\leqslant T(C),$$

即 $\prod\limits_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\leqslant\prod\limits_{k=0}^{n}(a_k+b_{ik})\leqslant\prod\limits_{k=0}^{n}(a_k+b_{n-k})$。

$S(A)\geqslant S(B)$，$T(A)\leqslant T(B)$ 上面已证，下面类似地证明

$S(B)\geqslant S(C)$，$T(B)\leqslant T(C)$。

可令B中有子阵 $\begin{pmatrix} a_k \leqslant a_r \\ b_{ik}\leqslant b_{ir}\end{pmatrix}$，在$B$中把$b_{ik}$与$b_{ir}$换位，其余不动，这样把$B$改造出一个$B'$，则

$$S(B')-S(B)=(a_kb_{ir}+a_rb_{ik})-(a_kb_{ik}+a_rb_{ir})$$
$$=(a_k-a_r)(b_{ir}-b_{ik})\leqslant 0。$$

$$T(B')-T(B)=(a_k-a_r)(b_{ik}-b_{ir})\prod_{\substack{t=0\\ k\neq t\neq r}}^{n}(a_t+b_{it})\geqslant 0。$$

∴ $S(B)\geqslant S(B')$，$T(B)\leqslant T(B')$。

∴ B可经有限次“保乱规”的改造到C，且保向：

$S(B)\geqslant S(B')\geqslant\cdots\geqslant S(B^x)=S(C)$；

$T(B)\leqslant T(B')\leqslant\cdots\leqslant T(B^y)=T(C)$。

得证。

因为S-不等式在两行阵中无a_{ij}的非负条件，所以可直接利用$S(A)\geqslant S(B)$来证明$S(B)\geqslant S(C)$。

事实上，令

$$B'=\begin{pmatrix} a_0 & \leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n \\ -b_{i0} & -b_{i1}\cdots -b_{in}\end{pmatrix},$$

则 $$C'=\begin{pmatrix} a_0\leqslant & a_1 & \leqslant\cdots\leqslant & a_n \\ -b_n\leqslant & -b_{n-1} & \leqslant\cdots\leqslant & -b_0\end{pmatrix}$$

是B'的同序阵，

∴ $S(C')\geqslant S(B')$，

即　$-S(C) \geqslant -S(B)$，

∴　$S(B) \geqslant S(C)$。

按照上述证明思路，不难用以下6个两行三列阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \\ b_1 \quad b_3 \quad b_2 \end{pmatrix},$$

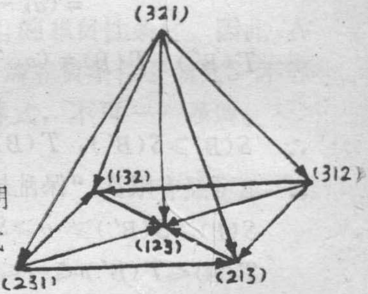
$$A_3 = \begin{pmatrix} a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \\ b_2 \quad b_1 \quad b_3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \\ b_2 \quad b_3 \quad b_1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \\ b_3 \quad b_1 \quad b_2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \\ b_3 \geqslant b_2 \geqslant b_1 \end{pmatrix},$$

构造26个（13个S的，13个T的）不等式，可用箭头图示如右：其中a_i，$b_i > 0$，$i=1, 2, 3$；

$(i\ j\ k)$ 表示矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_i & b_j & b_K \end{pmatrix}$。

每个箭头显示一个S—不等式（朝箭头方向增大）和一个T—不等式（朝箭头方向减小）。



4.一些简单例子

例1　求证（1）$a^2+b^2 \geqslant 2ab$；（2）$4ab \leqslant (a+b)^2$。

证　∵ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$是可同序阵，$B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$是乱序阵，

∴　$S(A) \geqslant S(B)$，即（1）；$T(A) \leqslant T(B)$，即（2）。

例2　求证（1）$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$；

（2）$8xyz \leqslant (x+y)(y+z)(z+x)$。

证　∵ $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$可同序，

$$B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}\text{是}A\text{的乱序阵，}$$

∴ $S(A)\geqslant S(B)$，即（1）；

$T(A)\leqslant T(B)$，即（2）。

例3 某电报房有固定坐席$n+1$个：A_0，A_1，…，A_n，每坐席A_i有一个收报机用来收城市B_i发来的电报。收报机需将每份来报自动放到传送带上，传到集中分发台，再按需要发到所去的地方。今知坐席A_0，A_1，…，A_n将来报传到集中分发台所需时间为：$a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$；城市$B_0$，$B_1$，…，$B_n$的来报量为：$b_0\leqslant b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n$。试问那个坐席收哪个城市的报，可使到集中分发台的总秒份t最小？

解 设A_i收B_{ik}的报，则

$$t=S\begin{pmatrix} a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n \\ b_{i0}\ \ b_{i1}\ \ \cdots\ \ b_{in} \end{pmatrix}\geqslant S\begin{pmatrix} a_0\leqslant\ a_1\ \leqslant\cdots\leqslant a_n \\ b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant b_0 \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\text{。}$$

∴ 所需时间少的坐席收来报量多的城市的报最好。

例4 若$\triangle A_1A_2A_3$三边长a_k，相应高h_k，$k=1$，2，3，面积$\triangle$，$i_1i_2i_3$是1，2，3的排列，则

$$\sum_{k=1}^{3}a_k h_{ik}\geqslant 6\triangle\text{。}$$

证 考虑

$$A=\begin{pmatrix} a_1\leqslant a_2\leqslant a_3 \\ h_1\geqslant h_2\geqslant h_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_1\leqslant a_2\leqslant a_3 \\ h_{i1}\ \ h_{i2}\ \ h_{i3} \end{pmatrix},$$

由 $S(B)\geqslant S(A)$得证。

例5 在$\triangle ABC$中，求证

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C\geqslant h_a+h_b+h_c\text{。}$$

证 $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ sinA & sinB & sinC \end{pmatrix}$可同序，$M'=\begin{pmatrix} a & b & c \\ sinC & sinA & sinB \end{pmatrix}$是$M$的乱序阵。

由$S(M)\geqslant S(M')=h_a+h_b+h_c$得证。

例6 若a、b、$c>0$，则

(1) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$；

(2) $(a+b+c)^3\geqslant 27abc$；

(3) $a^3+b^3+c^3\geqslant a^2b+b^2c+c^2a$；

(4) $(2a+b)(2b+c)(2c+a)\geqslant 27abc$。

证 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$可同序，$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$是$A$的乱序阵。

$\therefore$ $S(A)\geqslant S(B)$，即（1）；

$T(B)\geqslant T(A)$，即（2）；

$S(A)\geqslant S(C)$，即（3）；

$T(C)\geqslant T(A)$，即（4）。

例7 若a，b，$c>0$，α，β，γ是长方体对角线与其同一端点出发的三条棱的夹角，则

$$abc\leqslant(a\cos^2\alpha+b\cos^2\beta+c\cos^2\gamma)\cdot$$
$$\cdot(a\cos^2\gamma+b\cos^2\alpha+c\cos^2\beta)\cdot$$
$$\cdot(a\cos^2\beta+b\cos^2\gamma+c\cos^2\alpha)。$$

证 $A=\begin{pmatrix} a\cos^2\alpha & b\cos^2\alpha & c\cos^2\alpha \\ a\cos^2\beta & b\cos^2\beta & c\cos^2\beta \\ a\cos^2\gamma & b\cos^2\gamma & c\cos^2\gamma \end{pmatrix}$ 可同序，

$B=\begin{pmatrix} a\cos^2\alpha & b\cos^2\alpha & c\cos^2\alpha \\ b\cos^2\beta & c\cos^2\beta & a\cos^2\beta \\ c\cos^2\gamma & a\cos^2\gamma & b\cos^2\gamma \end{pmatrix}$ 乱序，

注意到 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

由 $T(A)\leqslant T(B)$得证。

例8 在$\triangle ABC$中，求证

(1) $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 2+\sin A\sin B\sin C$；

(2) $\sin A+\sin B+\sin C$

$$\leqslant\frac{1}{9}(2+\sin A)(2+\sin B)(2+\sin)。$$

证 $A=\begin{pmatrix} \sin A & 1 & 1 \\ \sin B & 1 & 1 \\ \sin C & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 同序，

$A'=\begin{pmatrix} \sin A & 1 & 1 \\ 1 & \sin B & 1 \\ 1 & 1 & \sin C \end{pmatrix}$ 是A的乱序阵，

∴ $S(A')\leqslant S(A)$，即 (1)；

$T(A)\leqslant T(A')$，即 (2)。

二、微微对偶不等式的应用

1. 处理一些数学竞赛题

例1 若a、b、$c>0$，则

（1）$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$；

（2）$a^{2a} b^{2b} c^{2c} \geqslant a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$。

注：（1）是1974年美国第三届中学数学竞赛题2；(2)是1978年上海市中学数学决赛题3。

证 $\because A=\begin{pmatrix} \ln a & \ln b & \ln c \\ a & b & c \end{pmatrix}$可同序，

$B=\begin{pmatrix} \ln a & \ln b & \ln c \\ c & a & b \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} \ln a & \ln b & \ln c \\ b & c & a \end{pmatrix}$是$A$的乱序阵，

$\therefore\ S(A)\geqslant S(B)$，$S(A)\geqslant S(C)$，

$\therefore\ 3S(A)\geqslant S(A)+S(B)+S(C)$，

$\therefore\ \ln(a^a b^b c^c)^3 \geqslant \ln(abc)^{a+b+c}$，

$\therefore\ (a^a b^b c^c)^3 \geqslant (abc)^{a+b+c}$。（1）得证。

由 $2S(A)\geqslant S(B)+S(C)$得

$$(a^a b^b c^c)^2 \geqslant a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$$。（2）得证。

例2 设有10人各拿提桶一只同到一水笼头前打水，设水笼头注满第i人的提桶需T_i分钟，$i=1, 2, \cdots, 10$。应如何安排此10人次序，才能使他们的总耗时间T最小？

（1978年我国中学数学联赛决赛题5）

解 设$A=\begin{pmatrix} 10\geqslant 9 \geqslant \cdots \geqslant 1 \\ T_1 \quad T_2 \cdots T_{10} \end{pmatrix}$乱，

$$A'=\begin{pmatrix}10 \geqslant & 9 \geqslant \cdots \geqslant 1 \\ T'_1 \leqslant T'_2 \leqslant \cdots \leqslant T'_{10}\end{pmatrix}$$ 是A的全反序阵，

则 $T=S(A)\geqslant S(A')$。

$\therefore$ 应安排需时少的人先打水，T最小。

例3 已知 x_1、x_2、$\cdots$、$x_n>0$，求证

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n。$$

（1984年我国中学数学联赛题5）

证 $\because$ $A=\begin{pmatrix}x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^{-1} & x_2^{-1} & \cdots & x_n^{-1}\end{pmatrix}$可全反序，

$B=\begin{pmatrix}x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_2^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_1^{-1}\end{pmatrix}$是$A$的乱序阵。

由 $S(B)\geqslant S(A)$得证。

一般地有，

若x_1、x_2、$\cdots$、$x_n>0$，α、β异号，则

$x_1^{\alpha+\beta}+x_2^{\alpha+\beta}+\cdots+x_n^{\alpha+\beta}$

$\leqslant x_1^{\alpha}x_{i_1}^{\beta}+x_2^{\alpha}x_{i_2}^{\beta}+\cdots+x_n^{\alpha}x_{i_n}^{\beta}$。

其中 $i_1i_2\cdots i_n$是1，2，$\cdots n$的一个排列。

当$\alpha=2$，$\beta=-1$，

$i_1i_2\cdots i_n=23\cdots n1$，

即上述竞赛题。

例4 $\triangle ABC$中，外半径$R=1$，面积$\triangle=\frac{1}{4}$，则

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$。