# 大学数学

DAXUE SHUXUE

梁　涛◎主编

西南交通大學出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

# 大学数学

梁 涛 主编



西南交通大学出版社
·成 都·

## 内容简介

本书为“大学数学”课程的教材，适合于大学本科的经济、法律、哲学、历史、新闻、外语、中文、建筑学、艺术设计等人文艺术类专业的学生使用. 由于各校的不同专业方向对数学基础的要求有一定的差异，为此本书力求让学生了解或掌握微积分及线性代数有关的重要概念、理论与方法.

全书共九章，按章配备了适量习题，书末附有习题参考答案. 本书将数学基础课与数学实验内容融为一体，加强实验环节教学，使学生借助于数学软件，学习求解相关数学运算的方法，提高学数学和用数学的兴趣、意识和能力.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学 / 梁涛主编. —成都：西南交通大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5643-1930-4

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①梁… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 199062 号

大学数学

梁　涛　主编

*

责任编辑　张宝华

特邀编辑　孟秀芝

封面设计　墨创文化

西南交通大学出版社出版发行

成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031　发行部电话：028-87600564

http: //press.swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170 mm × 230 mm　　印张：15.875

字数：284 千字

2012 年 8 月第 1 版　　2012 年 8 月第 1 次印刷

**ISBN 978-7-5643-1930-4**

定价：29.00 元

# 前　　言

本书为针对高校“大学数学”课程编写的教材，适合于大学本科的经济、法律、哲学、历史、新闻、外语、中文、建筑学、艺术设计等人文艺术类专业的学生使用。由于各个高校的不同专业方向对数学基础的要求有一定的差异，为此本书力求在学时有限的情况下，让学生了解或掌握微积分及线性代数有关的重要概念、理论与方法。

在编写过程中，本书将数学基础课与数学实验内容融为一体，加强实验环节教学，使学生借助于数学软件，学习求解相关数学运算的方法，提高“学”数学和“用”数学的兴趣、意识和能力。

本书内容设计简明，结构体系上又不失完整。全书共九章，内容包括：极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、微分方程及无穷级数、行列式、矩阵及其运算、线性方程组。书稿按章配备了适量的习题，并书末附有习题参考答案，便于学生课后练习。

本书的编写人员全部为高校相关学科的一线老师，学科基础坚实，教学经验丰富。具体编写分工如下：梁涛编写第一章和第二章；韩玫编写第四章和第五章；马淑霞编写第三章和第六章；阳锐顺编写第八章和第九章；张红玲编写第七章；王璐编写计算机软件部分。全书由梁涛担任主编，由陈尚云教授担任主审。同时在本书编撰过程中，得到很多同行的热心指导和帮助，特别是胡成、秦应兵、范翠丽等数学学院教师提出了不少宝贵建议，对此我们表示衷心的感谢。

由于作者水平和时间所限，教材中难免存在不妥之处，希望广大读者批评指正。

作　者

2012 年 6 月

# 目　录

# 第一章　极　限

## 第一节　函数的概念

初等数学研究的是常量，高等数学是以函数为主要研究对象的一门数学课程. 1821 年，法国数学家柯西(Cauchy，1789—1857)提出："在某些变数间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值可随之而确定时，则将最初的变数叫自变量，其他各变数叫做函数." 1837 年德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859)指出："对于在某区间上的每一个确定的 $x$ 值，$y$ 都有一个或多个确定的值，那么 $y$ 叫做 $x$ 的函数." 本章将介绍高等数学中的基础概念——极限，为后面的学习奠定必要的基础.

我们在中学研究函数，大多是研究它的静态性质. 但作为数学模型的函数是代表实际问题的，而一个实际问题可不是一成不变的，恰恰相反，它是时刻都在变化的. 于是研究函数的动态性质的高等数学便应运而生.

譬如，对于一个确定的函数

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}, x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

我们不仅关心该函数在某一点的取值，更关心这个函数当自变量 $x$ 无限制地增大时的变化趋势如何，它将导致这个函数所代表的那条曲线的"水平式渐近线"的确定；尽管这函数在 $x=1$ 点处是没有定义的，我们无法获得函数在该点的函数值，但我们可以研究当 $x$ 无限制地逼近 $x=1$ 时函数的变化趋势，它将导致这个函数所代表的那条曲线的"铅直式渐近线"的确定. 而对于函数

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},\quad x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

该函数在 $x=1$ 点也是没有定义的，它在 $x=1$ 点竟然成为"$\frac{0}{0}$"形式，更不必

谈获得函数在该点的函数值. 但当牛顿关心自变量 $x$ 无限制地逼近 $x=1$ 时的变化趋势如何的时候，竟然得出了震惊世界的结果：导数(牛顿称之为流数)，于是我们所说的高等数学的主要研究内容——微积分诞生了，数学从此进入一个研究变化莫测现象的崭新的时代.

我们在中学已经学习过函数的概念，这里仅作回顾性说明.

**定义 1.1** 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，变量 $x$，$y$，如果对于 $x$ 在其变化范围 $D$ 内的每一个确定的取值，按照某个对应法则 $f$，变量 $y$ 都有唯一确定的值与之相对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记为

$$y=f(x)\text{，}\ x\in D$$

其中：$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量，$f$ 称为对应法则，$D$ 称为函数的定义域.

注意：

（1）由定义可知，因为值域完全由函数的定义域和对应关系确定，故函数的定义域和对应关系是函数的两个基本要素.我们规定：两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 相等，记作 $f(x)=g(x)$，其充要条件是：两函数的定义域相同，对应法则也相同.

（2）函数的定义域通常按照以下两种情形来确定：① 对于有实际背景的函数，根据其实际意义确定.譬如，在自由落体运动中，若设物体下落距离为 $s$，下落时间为 $t$，下落开始和落地的时间分别为 $t=0$，$t=T$，则下落距离与时间的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2\text{，}\ t\in[0,T]$$

这个函数的定义域就是区间 $[0,T]$. ②对于用算式表达的函数，通常约定其定义域是使得算式有意义的一切实数的集合.

（3）函数定义中，对每一个 $x\in D$，只能有唯一的一个 $y$ 值与它对应，这样定义的函数称为“单值函数”.若对同一个 $x\in D$，对应多于一个的 $y$ 值，则称这种函数为多值函数. 对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将其化为单值函数. 除非特殊声明，本课程只讨论单值函数.

（4）函数的表示方法主要有三种：表格法、图形法和解析法(公式法).多年的中学教育往往会使我们形成思维定势，每当提到函数，头脑中便会立即浮现出一堆解析式子. 其实函数的表格法、图形法的表示是很常见的.

（5）以上说明都是对于只有一个自变量和一个因变量的情形，即所谓的一元函数. 实际中常见到具有多个自变量和一个因变量情形的函数关系，即多元函数.

下面再举几个函数的例子，这些例子很特殊，却将在以后的讨论中反复用到.

【例 1】 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

该函数之所以称为符号函数，自然是因为它具有“符号”的功能：

$$x=\operatorname{sgn}(x)\cdot|x| \quad \text{或} \quad |x|=\operatorname{sgn}(x)\cdot x$$

利用符号函数可以去掉绝对值符号.

【例 2】 取整函数 $y=[x], x\in\mathbf{R}$，其中 $[x]$ 表示“不大于 $x$ 的最大整数”，这相当于对变量 $x$ 取整，故称之为取整函数. 如 $[3.6]=3$，$[4]=4$，$[-3.1]=-4$ 等.

# 第二节 数列的极限

## 一、数列极限的定义

首先介绍刘徽的“割圆术”，设有一半径为 1 的圆，在只知道直边形的面积计算方法的情况下，要计算其面积 $A$. 为此，先作圆的内接正六边形，其面积记为 $A_1$，再作内接正十二边形，其面积记为 $A_2$，内接二十四边形的面积记为 $A_3$，如此将边数加倍，当 $n$ 无限增大时，$A_n$ 无限接近于圆面积，他计算到内接 3 072 边形，即 $6\times 2^9$ 边形，利用不等式

$$A_{n+1}<A<A_{n+1}+(A_{n+1}-A_n)$$

得到圆周率为 $\dfrac{3\,927}{1\,250}$，约等于 3.141 6. 实际上刘徽得到一个无穷数列 $A_1, A_2, \cdots, A_n\cdots$，当 $n$ 无限增大时，$A_n$ 无限接近于某个常数. 那么什么叫无限接近呢？即当 $n$ 足够大时，$A_n$ 与某常数的距离要多小就有多小.

**定义 1.2** 设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数 $A$，对于任意给定的正数$\varepsilon$(不论它多么小)，总存在正整数 $N$，使得当 $n>N$ 时，不等式$|x_n-A|<\varepsilon$都成立，那么就称常数 $A$ 是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于 $A$. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A(n\to\infty)$$

**【例 3】** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{5n-1}=\dfrac{3}{5}$.

**证** 对任意的正数$\varepsilon$(不论它多么小)，由于

$$\left|\frac{3n+1}{5n-1}-\frac{3}{5}\right|=\frac{8}{25n-5}<\frac{2}{5n-1}$$

要$|x_n-A|<\varepsilon$，只需$\dfrac{2}{5n-1}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{2}{5\varepsilon}+\dfrac{1}{5}$即可.

取$N=\left[\dfrac{2}{5\varepsilon}+\dfrac{1}{5}\right]$，则当$n>N$时，有

$$\left|\frac{3n+1}{5n-1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon$$

由定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n-1}=\frac{3}{5}$$

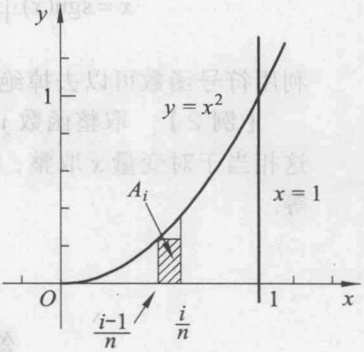


图 1.1

**【例 4】** 求由曲线 $y=x^2$，$x=1$ 及 $x$ 轴所围成的图形的面积(见图 1.1).

**解** 将区间[0，1]等分成 $n$ 个小区间$\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$，$\left[\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right]$，…，$\left[\dfrac{n-1}{n},1\right]$，依次作 $n$ 个内接小矩形，其面积分别为：

$$A_1=\frac{1}{n}\cdot 0,\quad A_2=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdots,\quad A_i=\frac{1}{i}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\cdots$$

所有这 $n$ 个小矩形的面积之和 $S_n$ 为：

$$S_n=A_1+A_2+\cdots A_n=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

当 $n$ 无限增大时，$S_n$ 无限接近于一个数 1/3，即所求图形面积为 1/3.

## 二、数列极限的性质及运算法则

数列极限有四个基本性质：

（1）**唯一性**：若数列的极限存在，则极限值是唯一的；

（2）**有界性**：如果一个数列收敛(有极限)，那么这个数列有界. 但是，如果一个数列有界，这个数列未必收敛.

如数列$\{(-1)^n\}$有界，但极限不存在.

（3）**保号性**：如果一个数列$\{x_n\}$收敛于 $A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

（4）改变数列的有限项，不改变数列的极限.

**定理 1.1**　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在，则

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\quad(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^m=(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^m$.

## 三、函数极限的定义

**定义 1.3**　$R$ 的子集 $\{x \mid |x-a|<\delta, \delta>0\}$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记为 $U(a,\delta)$. 特别地，去掉点 $a$ 时集合 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta, \delta>0\}$ 称为点 $a$ 的去心邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$.

**定义 1.4**　设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-a)\cup(a,\ +\infty)$内有定义，如果当 $x$ 的绝对值$|x|$无限增大即 $x$ 趋于无究大（记作 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近一个确定的常数 $A$，则称 $A$ 为当 $x$ 趋于无穷大时函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

**定义 1.5**　设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 左右近旁都有定义，当 $x$ 无限趋近 $x_0$ 时(记作 $x\to x_0$)，函数值无限接近一个确定的常数 $A$，则称 $A$ 为当 $x$ 无限趋近 $x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

即对函数 $y=f(x)$，当自变量 $x$ 发生一种变化时，函数 $f(x)$ 的变化趋势是无限接近某一个常数，则称该常数为函数 $y=f(x)$ 在 $x$ 发生这种变化时的极限. 那么何谓无限接近呢？下面我们给出定义 1.5 的另一种方式.

**定义 1.6** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 $A$，对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论它多么小)，总存在正数 $\delta$，使得当 $x$ 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 $A$ 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限.

类似可得到函数在自变量不同变化趋势时极限的两种定义. 下面特别给出函数的左右极限的定义.

**定义 1.7** 如果当 $x$ 从点 $x=x_0$ 的左侧(即 $x<x_0$)无限趋近于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 $A$，就说 $A$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

如果当 $x$ 从点 $x=x_0$ 右侧(即 $x>x_0$)无限趋近于点 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 $A$，就说 $A$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

注：一个函数是否在 $x_0$ 处存在极限，与它在 $x_0$ 处是否有定义无关，只要求 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 附近有定义即可.

**【例 5】** 证明极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

**证** 因为

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|$$

$\forall\varepsilon>0$，欲使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只要 $|x-1|<\varepsilon$ 即可. 取 $\delta=\varepsilon$，则对任意 $0<|x-1|<\delta$，有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-1\right|<\varepsilon$$

所以
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

## 四、函数极限的运算法则

在下面的讨论中，记号“lim”下面没有标明自变量的变化过程，表示对 $x \to x_0$ 及 $x \to \infty$ 都成立.

**定理 1.2**　若 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 都存在，则

（1）$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$；

（2）$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$；

（3）$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\ (\lim g(x) \neq 0)$；

（4）$\lim(f(x))^m = (\lim f(x))^m$.

注：以上 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 都存在时才成立.

**定理 1.3**　一个函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋于某个常数 $x_0$ 时的极限存在的充分必要条件是其左、右极限都存在且相等，即有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

上述结论对于分段函数来说，在讨论其分段点的极限是否存在问题时，是十分要紧的. 这是因为，在分段点两侧的函数表达式不同，因此在讨论分段点的极限问题时，不可避免地需求其左右极限. 当两者相等时，该点极限存在，否则就不存在.

**【例 6】**　设函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x+1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

试求极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

**解**　由于在 $x = 0$ 左右两侧的函数表达式不同，故需要求其单侧极限(见图 1.2). 由于

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1$$

即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处左右极限都存在且相等，故 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在且有

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

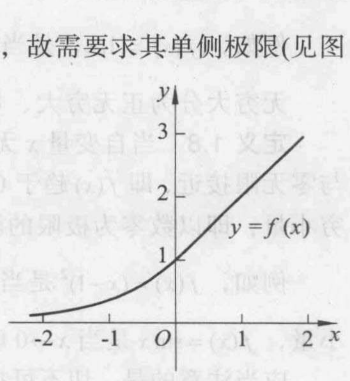


图 1.2

注：从图 1.2 看，这个结果导致函数图像在 $x=0$ 处连续变化而不产生间断.

【例 7】　设函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

试求极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ .

**解**　由于在 $x=0$ 左右两侧的函数表达式不同，有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

即其左右极限都存在但不相等，故极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

# 第三节　无穷大和无穷小

## 一、无穷大量与无穷小量

外行人通常把零和无穷大理解为“什么都没有”和“很多”的同义词. 其实零是一个数，是一个有奇特作用的整数，而无穷大是一个概念，它不是实数系统中的一部分. 我们说当 $x$ 趋向于零时，$1/x$ 是无穷大，只是说当 $x$ 趋向于零时，$1/x$ 无限地增大. 也就是说无穷大就是在自变量的某个变化过程中绝对值无限增大的变量或函数.

例如，$f(x)=1/x$，是当 $x\to 0$ 时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$ .

无穷大分为正无穷大、负无穷大和无穷大，分别记作 $+\infty$、$-\infty$以及$\infty$.

**定义 1.8**　当自变量 $x$ 无限接近 $x_0$ (或 $x$ 的绝对值无限增大)时，函数值 $f(x)$ 与零无限接近，即 $f(x)$ 趋于 0，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$)时的无穷小量. 无穷小量，即以数零为极限的函数.

例如，$f(x)=(x-1)^2$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小量，$f(n)=\dfrac{1}{n}$ 是当 $n\to\infty$时的无穷小量，$f(x)=\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小量.

应当注意的是，切不可把很小的数与无穷小量混为一谈，无穷小量是函数

的极限为 0 而非数量为 0，是指自变量在一定变化方式下其极限为数量 0. 称一个函数是无穷小量，需说明自变量的变化趋势. 例如 $x^2-4$ 是 $x\to 2$ 时的无穷小量，而不能笼统说 $x^2-4$ 是无穷小量.

**定理 1.4**　（1）有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

（2）有限个无穷小量之积仍是无穷小量.

（3）有界函数与无穷小量之积为无穷小量.

例如，当 $x\to 0$ 时，$x^2$ 是无穷小量，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界量，故由定理 1.4 得

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

函数 $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 的图像如图 1.3 所示.

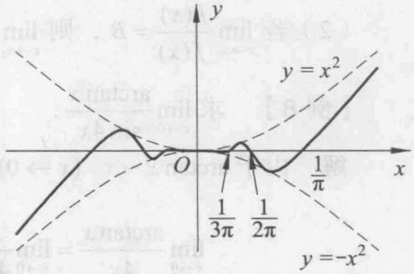

图 1.3

## 二、无穷小量阶的比较

无穷小量是以 0 为极限的函数，而不同的无穷小量收敛于 0 的速度有快有慢. 为此，我们考察两个无穷小量的比，以便对它们的收敛速度作出判断.

**定义 1.9**　设当 $x\to x_0$ 时，$f$ 与 $g$ 均为无穷小量. 则

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f$ 为 $g$ 的高阶无穷小量，或称 $g$ 为 $f$ 的低阶无穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$.

（2）当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$ 时，则称 $f$ 与 $g$ 为当 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量.

（3）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f$ 与 $g$ 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量. 记作

$$f(x)\sim g(x)\ \ (x\to x_0)$$

例如，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\tan\dfrac{x}{2}=0$，故有 $1-\cos x=o(\sin x)\quad (x\to 0)$.

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 $x^2$ 皆为无穷小量. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $1-\cos x$ 与 $x^2$ 为当 $x\to 0$ 时的同阶无穷小量.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故有 $\sin x\sim x(x\to0)$. 又由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$，故有 $\arctan x\sim x\ (x\to0)$.

下述定理显示了等价无穷小量在求极限问题中的作用.

**定理 1.5** (等价无穷小量代换)　设函数 $f,g,h$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，且有

$$f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$$

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$；

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=B$.

**【例 8】**　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{\sin 4x}$.

**解**　由于 $\arctan x\sim x\quad(x\to0)$，$\sin 4x\sim 4x\quad(x\to0)$. 故由定理 1.5 得

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$$

**【例 9】**　利用等价无穷小量代换求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

**解**　由于

$$\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)$$

而

$$\sin x\sim x\ (x\to0),\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to0),\quad \sin x^3\sim x^3\ (x\to0)$$

故有

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

注：在利用等价无穷小量代换求极限时，应注意只有对所求极限式中相乘或相除的因式才能用等价无穷小量来替代，而对极限式中的相加或相减部分则不能随意替代. 如在例 9 中，若因有

$$\tan x\sim x\quad(x\to0),\quad \sin x\sim x\quad(x\to0)$$

推出

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{\sin x^3}=0$$

则得到的是错误的结果.