大学数学的内容、方法与技巧丛书

数学分析

内容、方法与技巧（下）

孙清华　孙　昊

Shuxue Fenxi Neirong Fangfa Yu Jiqiao

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

大学数学的内容、方法与技巧丛书

数学分析

内容、方法与技巧

（下）

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析 内容、方法与技巧(下)/孙清华 孙 昊
武汉:华中科技大学出版社,2003 年 11 月
ISBN 7-5609-3061-1

Ⅰ. 数…
Ⅱ. ①孙… ②孙…
Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材
Ⅳ. O17

数学分析 内容、方法与技巧(下) 孙清华 孙 昊

责任编辑:徐正达 李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:陈 骏 责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:15.25 字数:368 000
版次:2003 年 11 月第 1 版 印次:2005 年 12 月第 3 次印刷 定价:18.00 元
ISBN 7-5609-3061-1/O·295

内容简介

本书是学习数学分析课程的一本极好的指导书.本书的编写顺序与一般的数学教科书同步,本册内容包括级数、函数项级数与幂级数、傅里叶级数、多元函数微分学、隐函数定理及应用、向量函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分.读者可以通过学习它循序渐进地理解和掌握数学分析的概念和方法.本书在归纳内容、释疑解难的基础上,用大量、全面的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者可以更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法.因此,读者有必要认真学习本书,通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友,欢迎你选用本系列丛书.

前　言

数学分析是高等学校 数学专业的主要基础课程. 数学初学者来说,数学分析课程的概念难懂,方法抽象,解题难以入手,思维难以展开. 为了帮助大家学好数学分析,解决学习中的困难,指导学习的方法,提高学习的效率,我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进,扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧,我们采用与教材同步、以章节为序的方法,对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳,在提升知识、解析疑难的基础上,用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结,从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法,将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识,更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样,以问题归类来讨论方法. 因此希望读者学习以后,自己做一些归纳提高、整理加工的工作,以增强自己的实践能力.

数学分析的题目及其解法浩如烟海,编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者. 有些例题是为了举证方法而选用的,因此不一定是该例的最佳方法. 本书以较多的篇幅来讨论命题的论证,这是数学分析的理论基础,但也用了相当篇幅来叙述计算方法,希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮助,在此向他们表示衷心的感谢. 在本书写作中,曾参阅了一些作

者关于数学分析问题的著作,我们借此机会向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足和学识所限,本书的失误之处在所难免,望同行和读者热心指正.

孙清华　孙　昊

2003 年 11 月

目　录

第七章　级　　数

无穷级数是数学分析理论的重要组成部分，在应用数学与工程技术中有广泛的应用. 无穷级数又分为数项级数和函数项级数，本书着重研究数项级数中的正项级数、一般项级数以及函数项级数中的幂级数.

第一节　级数的敛散性与正项级数

主要内容

一、级数的敛散性

1. 给定一个数列 $\{u_n\}$，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为数项级数或无穷级数. u_n 称为级数的一般项.

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为上述数项级数的第 n 个部分和，简称部分和.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. S 称为无穷级数的和，记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad \text{或} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

若$\{S_n\}$没有极限,则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

3. 柯西(Cauchy)审敛原理　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件为:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N$ 时,对任意的自然数 p 均有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

推论　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

4. 收敛级数的基本性质

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S,k 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛,其和为 kS.

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于 S 和 T,c,d 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)$ 也收敛,其和为 $cS+dT$.

(3) 去掉、增加或改变级数的有限个项,不改变级数的敛散性.

(4) 对收敛级数的项任意加括号,不改变级数的敛散性,也不改变级数的和.

若加括号后的级数发散,则原级数也发散.

5. 常用结论

(1) 等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+\cdots+aq^n+\cdots\ (a\neq 0)$,当$|q|<1$ 时收敛,当$|q|\geqslant 1$ 时发散.

(2) 调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$是发散的.

二、正项级数

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项 $u_n\geqslant 0$,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数.负项级

数可以化为正项级数来研究.

1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

2. 正项级数的比较原则　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果存在某个 $N > 0$，对一切 $n > N$ 都有 $u_n \leqslant v_n$，则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

3. 比较原则的极限形式　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$，则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

4. 达朗贝尔(D'Alembert) 比式判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且存在某自然数 N_0 及常数 q $(0 < q < 1)$，则

(1) 若对一切 $n > N_0$，有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若对一切 $n > N_0$，有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5. 比式判别法的极限形式　若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$，则：

(1) 当 $q < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

6. 柯西根式判别法　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且存在某正数 N_0 及常数 $l > 0$，则

(1) 若对一切 $n > N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n} \leqslant l < 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若对一切 $n > N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

7. 根式判别法的极限形式　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$，则：

(1) 当 $l < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $l > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

8. 对极限不存在，而上、下极限存在情形，有以下结论.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则

(1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \bar{q} < 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \underline{q} > 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

9. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = l$，则当 $l < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $l > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

10. 积分判别法　设 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上的非负单调减少函

数，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与非正常积分 $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

11. 拉贝(Raabe)判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且存在极限 $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$，则

(1) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $r<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

疑难解析

1. 怎样理解无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛？

答　无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 是无穷多项的和，可能是有限数，也可能是无限数，或者是不确定的数. 如

有限数　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$,

无限数　$1+2+3+\cdots+n+\cdots=+\infty$,

不确定数　$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$.

当和是有限数 S 时，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S. 否则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

特别要注意的是，级数的和是无限项的和(简称无限和)与有限项的和(简称有限和)有本质区别. 有限和是一定存在的，但无限和不一定存在. 然而，两者又有十分密切的联系，即无限和可以通过有限和的极限表示. 一般地，级数求和要先求部分和 S_n(有限

和)，再求部分和的极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，确定级数的和 S(无限和)是否存在.

2. 判别正项级数敛散性的条件是否都是充分必要的条件?

答 一切判别正项级数敛散性的条件都是充分条件，但不一定是必要条件.

如对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛，反之则不一定收敛. 例如

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

是一个收敛的正项级数，但$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$有两种情形：

$$\frac{1}{3^n}\Big/\frac{1}{2^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

$$\frac{1}{2^{n+1}}\Big/\frac{1}{3^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$不存在.

方法、技巧与典型例题分析

一、级数的敛散性问题

数项级数敛散性问题是级数研究中的一个基本问题. 由级数的敛散性定义知，判别级数的敛散性实质上是判别级数部分和数列的敛散性，求级数的和就是求级数部分和数列的极限. 因此，研究级数的基本思想方法就是将级数的问题转化为其部分和数列的相应问题. 同时，在实际问题中，我们还需利用已知敛散性的级数和级数的性质来帮助确定级数的敛散性及推断级数的一些性质.

例 1 一弹性小球从高 h_0 处落下，落地后弹起的高度为前次下落高度的一半. 如此往复起落，问小球的起落是否会停止.