应用型本科规划教材

主编 陆宜清

高等数学

Gaodeng Shuxue

（上册）

（第二版）

上海科学技术出版社

应用型本科规划教材

高等数学(上册)

(第二版)

主　编　陆宜清

副主编　林大志　徐香勤　张思胜　郑凤彩

参　编　张　慧　薛春明　刘玉军　王　茜

孔素真　刘　宇　谢振宇

上海科学技术出版社

内容提要

本书是根据教育部新制定的《应用型本科教育数学课程教学基本要求》，借鉴“教、学、做一体化”的教学模式，结合编者多年的教学经验而编写的。全书共十一章，分为上、下两册。本书为上册，主要内容有函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程六章，书末还附有初等数学常用公式、基本初等函数的图像与性质、高等数学常用公式(一)、习题答案与提示。

本书可以作为应用型本科教育、高等职业教育、成人教育以及其他学时较少的工科类和经济类专业的高等数学课程教材，也可作为教师及技术人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 陆宜清主编. —2 版. —上海：上海科学技术出版社，2015.7

应用型本科规划教材

ISBN 978-7-5478-2628-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陆… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 095105 号

高等数学(上册)(第二版)

主编 陆宜清

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版
(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.co
常熟市兴达印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 16.75
字数:380 千字
2011 年 7 月第 1 版
2015 年 7 月第 2 版 2015 年 7 月第 6 次印刷
ISBN 978-7-5478-2628-7/O·48
定价：35.00 元

第二版前言 Preface

由河南牧业经济学院、上海工程技术大学高等职业技术学院、河北师范大学职业技术学院编写的规划教材《高等数学》(上、下册),自 2011 年出版以来,受到广大读者的关注,得到许多兄弟院校的大力支持,在此首先对支持、帮助、鼓励我们工作的有关部门的领导、专家和读者表示诚挚的谢意。

为了进一步提高教材的质量,在已有的基础上逐步完善,更好地适应迅猛发展的应用型本科教育的需要,跟上大众化教育前进的步伐,保证应用型本科教育的质量,使教材更符合应用型本科培养目标的要求,更具有应用型本科的特色,我们认真总结了原教材在使用过程中存在的问题,听取了有关兄弟院校对教材的意见,根据编者参与应用型本科教育实践的亲身体会和感受,以"联系实际,深化概念,加强计算,注重应用,适度论证,提高素质"为特色,遵循教育部制定的《应用型本科教育数学课程教学基本要求》,重新修订编写了这套应用型本科教材。

新版教材与原教材的区别是:增加了难度,加强了应用。易于教,便于学,更加贴近应用型本科学生的实际水平,但也不乏体现高等数学的文化修养和实际应用的双重功能。

新版教材仍分上、下册。上册内容有函数、极限、连续,一元函数微积分及应用,微分方程;下册内容有向量代数与空间解析几何,多元函数微积分及应用,无穷级数等。

新版教材继续保留原教材特色,即高等数学与初等数学紧密衔接;基本概念、基本定理与实际相联系;数学知识与实际问题紧密结合;教材与学习指导融为一体,便于滚动复习;基本要求与拓宽知识相结合,适应于不同要求和不同层次的教学;高等数学与数学实验相结合;深入浅出,论证简明,系统性强等。

重视微积分的各部分内容的应用,从导数到积分,直至微分方程均给出了较多的应用实例,并尝试将数学建模的思想融入其中。

注重应用基本理论和基本方法去分析解决实际问题的思想方法的讲解,拓宽了应用的领域,增强了应用的趣味性。

虽然本书从整体框架而言保持了传统微积分的基本内容和结构,但上述特点体现了编者在应用型本科高等数学课程改革方面的一些思考与探索,同时也反映了高等数学课程的特色和定位。

新版教材主要增加和修订的部分如下：

1. 极限概念是高等数学的重点和难点，是否理解极限对于学好高等数学至关重要，为此新版教材对“函数、极限与连续”一章做了较大的修改，增加了数列极限的概念与性质、极限存在的两个准则、有关连续性的应用实例和简单的数学模型。

2. 为便于联系实际、加强应用，增加了导数在经济分析中的应用、积分在经济上的应用、有关导数的应用实例和微分方程模型。

3. 根据教学的基本要求，考虑到有些专业的特殊需要，适当地增加了平面曲线的弧长、齐次方程、伯努利方程、方向导数和梯度、曲线积分与曲面积分等。

4. 为增强学生应用数学知识解决实际问题的能力，激发学生的兴趣，提高学生的素质，我们把简单的数学模型融入各章教学内容中，书后还附录了一些常见的数学模型，删除了原第十一章“数学建模初步”。

5. 为适应部分学生考研继续深造的需要，有些章节的内容略有加深。

参加新版修订工作的有：河南牧业经济学院的陆宜清、林大志、徐香勤、张思胜、张慧、薛春明、王茜、孔素真，河北师范大学职业技术学院的刘玉军、郑凤彩、刘宇、谢振宇等。由主编陆宜清教授负责总体规划及技术处理等工作。

本书在修订过程中，得到郑州大学、上海工程技术大学高等职业技术学院、河北师范大学职业技术学院等院校有关领导和教师的大力支持和帮助。首批国家级教学名师、郑州大学数学与统计学院李梦如教授对书稿完善提出了许多宝贵意见。在此我们一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中不足和考虑不周之处肯定不少，错误在所难免，我们敬请各位专家、同行和读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编者

目录 Contents

第一章

函数、极限与连续

学习目标

1. 理解函数的概念及特性，掌握函数的两要素，会求函数的定义域.
2. 了解函数的三种表示法及分段函数，熟练掌握基本初等函数的图像与性质.
3. 了解反函数、复合函数的概念，会求函数的反函数，掌握复合函数的复合和分解.
4. 理解初等函数的概念，能区分基本初等函数和初等函数.
5. 对简单的实际问题，会建立相应的函数关系.
6. 理解数列极限、函数极限的概念，掌握函数极限的性质与运算法则.
7. 了解极限存在的两个准则，掌握两个重要极限，并会用两个重要极限求某些函数的极限.
8. 了解函数左、右极限的概念及其与函数极限的关系.
9. 了解无穷小量、无穷大量的概念及无穷小量与无穷大量的关系，掌握无穷小量的比较.
10. 理解函数连续和间断的概念，会判断间断点的类型.
11. 了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质(最值定理、介值定理).
12. 掌握数学软件 MATLAB 的基本知识，会用 MATLAB 进行函数运算，求函数的极限.

初等数学的研究对象主要是常量，而高等数学的研究对象主要是变量.变量之间的相互依赖关系，就是我们所说的函数关系.函数是将实际问题数学化的基本工具；而极限是高等数学中最重要的概念之一，用以描述变量的变化趋势；极限的思想方法是高等数学中最重要的一种思想方法，极限理论贯穿于整个高等数学的全过程；连续是函数的一个重要性态.

本章将介绍函数、极限和函数连续性的基本概念、极限的运算以及它们的一些性质，这些知识是以后各章节的基础.

第一节 函数的概念与性质

一、函数的概念

1. 函数的定义

在工程技术、生产实践、自然现象以及人们的日常生活中，遇到的变量往往不止一个，并且这些变量之间存在着某种相互依赖的关系，且服从着一定的变化规律.为了揭示这些变量之间的联系以及它们之间所服从的规律，先来考察下面几个例子(以两个变量为例).

例 1 空调普快列车的票价和里程之间的关系，见表 1-1(截取其中的一部分).

表 1-1 空调普快列车票价表

里程	…	81～90	91～100	101～110	111～120	121～130	131～140	141～150	…
票价	…	12	13	14	16	17	18	20	…

从上表可以看出里程和票价之间存在着确定的对应关系.每给出一个里程，通过上表都可以找到唯一的一个票价与其对应，这一表格反映了空调普快列车票价与里程之间的关系.

例 2 某气象观测站的气温自动记录仪，记录了气温 T 与时间 t 之间在某一昼夜的变化曲线，如图 1-1 所示.

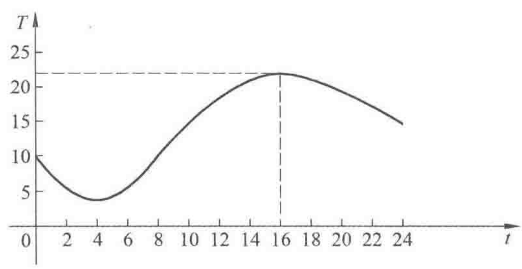

图 1-1

由图可知，对于一昼夜内的每一时刻 t，都有唯一确定的温度 T 与之对应，这个图像反映了一昼夜中温度与时刻变化之间的关系.

以上两个例子虽然涉及的问题各不相同，但它们都表达了两个变量之间的一种对应关

系，当一个变量在它的变化范围内任取一个确定的数值时，另一个变量按照一定法则就有一个确定的数值与之对应. 把这种变量之间确定的依赖关系抽象出来，就是函数的概念.

定义 1　设 x 和 y 是某一变化过程中的两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于 D 中的每一个 x，按照某种对应法则 f，都有唯一确定的数值 y 与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为**函数的定义域**.

当 x 在 D 中取某一定值 x_0 时，与其对应的 y 的值，称为**函数在点 x_0 的函数值**，记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的所有值时，与之对应的所有函数值的全体组成的集合称为**函数的值域**. 即 $M=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$.

根据函数的定义，例 1 中列车票价是里程的函数，例 2 中气温是时间的函数.

对于函数的概念，应注意以下几点：

(1) 函数的概念中包含五个要素，即自变量、因变量、定义域、值域和对应法则；但是确定函数的关键要素是定义域和对应法则. 因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时，这两个函数才是同一个函数，与自变量及因变量用什么字母表示没有关系.

(2) 关于函数定义域的确定可分为两种情况，对于实际问题，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如例 1、例 2；未标明实际意义的函数，其定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围，例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,\ 1]$.

(3) 这里给出的函数定义只有一个自变量，因此称为**一元函数**，并且对于自变量 x 在定义域内的每一个值，因变量 y 总有唯一确定的值与其对应，这样的函数称为**单值函数**. 以后，在没有特别说明的情况下，本书讨论的函数均为一元单值函数.

(4) 函数的表示方法常用的有三种，即解析法、表格法(例 1)和图像法(例 2). 这三种表示方法各有其特点：解析法易于计算，表格法和图像法直观明了. 在处理实际问题中可以综合使用.

例 3　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$；　　(2) $y=\sqrt{2-x}+\log_2(x-1)$.

解　(1) 要使函数表达式有意义，分母不能为零. 令 $x^2-3x-4=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=4$，所以函数的定义域为

$$D=(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 4)\cup(4,\ +\infty).$$

(2) 要使函数表达式有意义，x 必须满足 $\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ x-1>0\end{cases}$，解之，得 $1<x\leqslant 2$，所以函数的定义域为 $D=(1,\ 2]$.

例 4　下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，$g(x)=\sin x$；

(3) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$，$g(x)=|x-1|$.

解　(1) 不相同. 因为函数的定义域不同，前者的定义域是 $x\neq 0$，而后者的定义域是 $x>0$.

(2) 不相同.因为函数的对应法则不同,$\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|=\pm\sin x$.

(3) 相同.因为函数的定义域和对应法则均相同.

例 5 一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 180 元,每千米收费 12 元.写出租用这种汽车一天的租车费(元)与行车路程(km)之间的函数关系;若某人一天交了 600 元租车费,问他行驶了多少千米?

解 设一天的租车费用为 y 元,行程为 x km,则 $y=180+12x$.

令 $y=600$,解得 $x=35$.即若某人一天交了 600 元租车费,他行驶了 35 km.

例 6 生物学中在稳定的理想状态下,细菌的繁殖按指数模型增长:$Q(t)=a\mathrm{e}^{kt}$,其中 $Q(t)$ 表示 t min 后细菌数量.假设在一定的培养条件下,开始时有 1 000 个细菌,20 min 后已增加到 3 000 个,试问 1 h 后将有多少个细菌?

解 因为 $Q(0)=1\,000$,所以 $a=1\,000$,$Q(t)=1\,000\mathrm{e}^{kt}$.

又 $t=20$ 时,$Q=3\,000$,有 $3\,000=1\,000\mathrm{e}^{k\cdot 20}$,$\mathrm{e}^{20k}=3$.

$t=60$ 时,$Q(60)=1\,000\mathrm{e}^{k\cdot 60}=1\,000(\mathrm{e}^{20k})^3=1\,000\times 3^3=27\,000$.

因此,在 1 h 后将有 27 000 个细菌.

例 7 当自然资源和环境条件对种群增长起阻滞作用时,Logistic 曲线是描述种群增长的相当准确的模型.设一农场的某种昆虫从现在开始 t 周后的数量为

$$P(t)=\frac{20}{2+3\mathrm{e}^{-0.06t}}\text{ 万个},$$

试问:现在昆虫数量是多少? 50 周后,昆虫的数量又是多少?

解 现在昆虫的数量为 $P(0)=\dfrac{20}{2+3}=4$ 万个;

50 周后,昆虫的数量是 $P(50)=\dfrac{20}{2+3\mathrm{e}^{-0.06\times 50}}\approx 9.31$ 万个.

2. 反函数

在函数关系中,自变量与因变量的划分往往是相对的,从不同的角度看同一过程,自变量和因变量可能会互相转换.

例 8 自由落体运动规律 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 中,t 是自变量,s 是因变量,由此可以算出经过时间 t 自由落体所下落的路程 s.若已知落体下落的路程 s,求它所经过的时间 t,显然有 $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$,这时 s 是自变量,t 是 s 的函数.这里称函数 $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$ 为函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的反函数.两个函数反映了同一过程中两个变量之间的对应关系,称它们是互为反函数.

定义 2 已知函数 $y=f(x)$,定义域为 D,值域为 M;若对于每一个 $y\in M$,通过 $y=f(x)$ 总有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应,则称由此所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**.同时把 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

习惯上,用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此常常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,例如 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 与 $y=x^3-1$ 互为反函数.

注 (1) 并不是所有的函数都有反函数,只有严格单调的函数才存在反函数.

例如,$y=x^2$ 在定义域内不存在反函数,因为对于任意 $y\in[0,+\infty)$,与之对应的有两个 x 的值.但如果限定自变量的变化范围为 $x\in[0,+\infty)$,则存在反函数 $y=\sqrt{x}$.

又如,正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加,于是定义正弦函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数为反正弦函数 $y=\arcsin x$.

类似地,定义在区间 $[0,\pi]$ 上的余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数称为反余弦函数,记作 $y=\arccos x$;定义在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的正切函数 $y=\tan x$ 的反函数称为反正切函数,记作 $y=\arctan x$;定义在区间 $(0,\pi)$ 上的余切函数 $y=\cot x$ 的反函数称为反余切函数,记作 $y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 根据反函数的定义,直接函数的定义域是反函数的值域,直接函数的值域是反函数的定义域.

(3) 直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(4) 对于严格单调的函数,求其反函数的步骤是先从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$,然后将 x 与 y 互换,便得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 9 求下列函数的反函数:

(1) $y=1+\ln x$; (2) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

解 (1) 因为 $x=e^{y-1}$,所以其反函数为 $y=e^{x-1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 因为 $x=\dfrac{y+1}{y-1}$,所以其反函数为 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

3. 分段函数

例 10 当个人的月收入超出一定金额时,应向国家缴纳个人所得税,收入越高,征收的个人所得税的比例也越高. 自 2008 年 3 月 1 日起个人收入超过 2 000 元的部分为应纳税所得额(表 1-2 仅保留了原表中的前三级税率).

表 1-2 个人所得税税率表(工资、薪金所得适用)

级 数	全月应纳税所得额	税 率(%)
1	不超过 500 元的部分	5
2	超过 500～2 000 元的部分	10
3	超过 2 000～5 000 元的部分	15

个人所得税一般在工资中直接扣除,若某单位所有员工的月收入都不超过 5 600 元,则月收入 x 与纳税金额 y 之间的函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2\,000,\\ 0.05(x-2\,000), & 2\,000<x\leqslant 2\,500,\\ 0.1(x-2\,500)+25, & 2\,500<x\leqslant 4\,000,\\ 0.15(x-4\,000)+175, & 4\,000<x\leqslant 5\,600.\end{cases}$$

该函数的定义域为$[0, 5\,600]$，若某人的月收入为 3 000 元，则利用公式 $y=0.1(x-2\,500)+25$ 可求得其缴纳所得税额为 $y|_{x=3\,000}=0.1\times500+25=75$ 元.

在函数的定义域内任给 x 一个确定的值，通过上述关系可以找到唯一确定的 y 值与之对应，因此 y 是 x 的函数.

从例 10 中看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

定义 3 若一个函数在自变量的不同变化范围内，对应法则不同，这样的函数称为**分段函数**.

例如，绝对值函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$，取整函数 $y=[x]$（不超过 x 的最大整数），符号函数 $y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 都是分段函数.

注 (1) 分段函数的定义域是其各段定义域的并集.

(2) 分段函数在其定义域上是一个函数，而不是几个函数.

用几个式子来表示一个(不是几个!)函数，不仅与函数定义不矛盾，而且有现实意义. 在自然科学、工程技术以及日常生活中，经常会遇到分段函数的情形.

例 11 写出如图 1-2 所示的矩形波函数 $f(x)$ 在一个周期$[-\pi, \pi]$上的函数表达式.

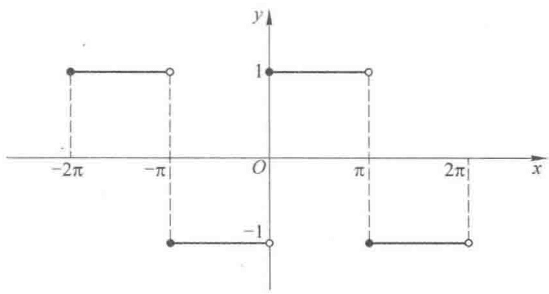

图 1-2

解 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi,\\ -1, & x=\pi.\end{cases}$

例 12 火车在起动后 10 min 内作匀加速运动，其加速度为 $\dfrac{1}{30}$ m/s^2. 以后 2 h 内作匀速运动，最后再作匀减速运动，10 min 后停下，求从起动到停止之间的任一时刻 t，火车走过的路程 s.

解 取 min 为时间单位，m 为长度单位，将时间区间$[0, 140]$分成三段$[0, 10]$，$(10, 130]$，$(130, 140]$来讨论：

(1) 当 $0\leqslant t\leqslant10$ 时，$a=\dfrac{1}{30}\text{ m/s}^2=120\text{ m/min}^2$，$s=\dfrac{1}{2}at^2=60t^2(\text{m})$.

(2) 当 $10<t\leqslant130$ 时，速度 $v=at=1\,200(\text{m/min})$，在这段时间之前已走过的路程为 $s_1=60\times10^2=6\,000(\text{m})$，所以

$$s=s_1+v(t-10)=6\,000+1\,200(t-10)=1\,200t-6\,000.$$

(3) 当 $130<t\leqslant140$ 时，速度 $v_0=1\,200(\text{m/min})$，$a=-v_0/10=-120(\text{m/min}^2)$，在这段时间之前已走过的路程为 $s_2=1\,200\times130-6\,000=150\,000(\text{m})$，所以

$$
\begin{aligned}
s &= s_2 + v_0(t-130) + \frac{1}{2}a(t-130)^2 \\
&= 150\,000 + 1\,200(t-130) - \frac{1}{2} \times 120(t-130)^2 \\
&= -60t^2 + 16\,800t - 1\,020\,000.
\end{aligned}
$$

综上所述，$s = \begin{cases} 60t^2, & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant 10 \text{ 时}, \\ 1\,200t - 6\,000, & \text{当 } 10 < t \leqslant 130 \text{ 时}, \\ -60t^2 + 16\,800t - 1\,020\,000, & \text{当 } 130 < t \leqslant 140 \text{ 时}. \end{cases}$

二、函数的几种特性

1. 有界性

定义 4　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于每一个 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**，否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的；$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有下界而无上界.

注　(1) 有的函数在它的定义域上无界，但在某个区间上有界. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在其定义域上无界，但它在区间 $(1,2)$ 内是有界的. 因此，以后谈到函数的有界性时，要注意上下文所示的自变量的范围.

(2) 定义 4 中的区间 I 不一定是函数的定义域，一般来讲是函数定义域的一个子集. 若函数 $f(x)$ 在定义域内有界，则称函数为**有界函数**，否则称为**无界函数**.

从几何图形上看，若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的图形介于与 x 轴平行的两条直线之间，那么函数在区间 I 上一定有界(图 1-3)；若找不到两条与 x 轴平行的直线使得函数在 I 上的图形介于它们之间，那么函数在区间 I 上一定无界(图 1-4).

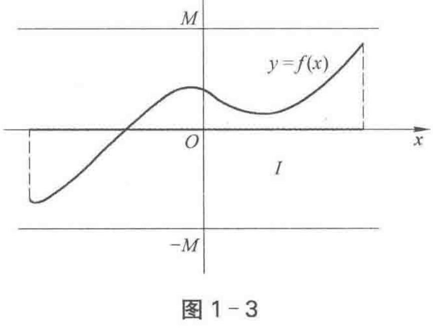

图 1-3

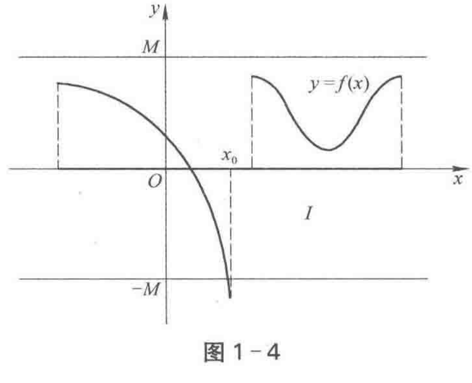

图 1-4

2. 单调性

定义 5　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，任取 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是**单调增加的**；若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是

单调减少的. 区间 I 称为函数的**单调区间**. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

从几何直观上看,单调增加的函数其图形是自左向右上升的(图 1－5),单调减少的函数其图形是自左向右下降的(图 1－6).

同样地,定义 5 中的区间是函数定义域的一个子集. 若函数 $f(x)$ 在定义域内单调,则称函数为**单调函数**.

例如,函数 $y = x^2$ 在$(0, +\infty)$内单调递增,在$(-\infty, 0)$内单调递减,但在定义域内不是单调函数. 由此可见,函数的单调性还往往与一定的区间相关联.

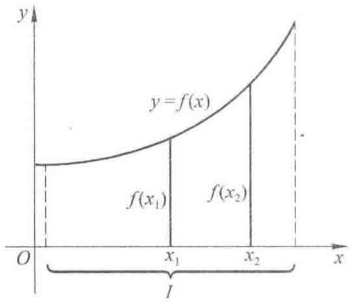

图 1－5

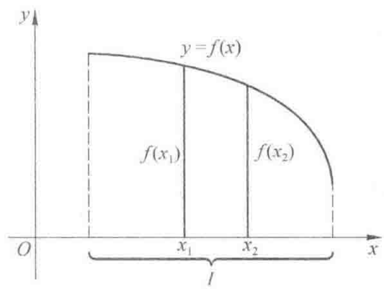

图 1－6

3. 奇偶性

定义 6 设 $f(x)$是一给定的函数,其定义域 D 是关于原点对称的区间,如果对于每一个 $x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**. 如果对于每一个 $x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$为**偶函数**. 不是奇函数也不是偶函数的函数,称为**非奇非偶函数**.

例如, $y = \sin x$ 是奇函数;$y = \sqrt{1-x^2}$ 是偶函数;而 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ 是非奇非偶函数.

从几何图形上看,奇函数的图形关于原点对称(图 1－7),偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1－8).

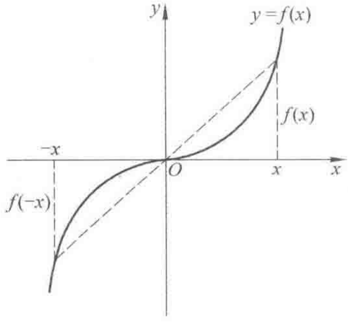

图 1－7

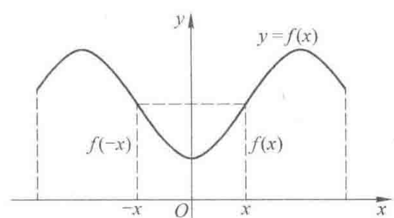

图 1－8

4. 周期性

定义 7 对于给定的函数 $f(x)$,若存在非零常数 T,使得对于其定义域内的任一 x,都有 $f(x+T) = f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$为**周期函数**,T 为 $f(x)$的**周期**.