国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书—69

高精度解多维问题的外推法

吕 涛 著

科学出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书 69

高精度解多维问题的外推法

吕 涛 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是关于外推法在多维问题应用的专著. 全书共 10 章, 除阐述显式外推: Richardson 外推与分裂外推在多维积分、有限元和有限差分的应用外, 对于隐式外推: 如基于多层网格法的 τ 外推、基于有限元内估计的局部有限元外推、稀疏网与组合技巧也有专章介绍.

本书取材新颖, 算例翔实, 算法精度高, 应用前景广泛, 适合从事科学和工程计算的工程师、科研教学人员、硕士生、博士生及大学高年级学生阅读. 此外, 本书的导论剖析了外推法与祖冲之盈、朒二率的算法关系, 从而对失传一千余年的《缀术》做了有说服力的探佚, 故本书也可供中算史家、数学教师和数学爱好者参阅.

图书在版编目(CIP)数据

高精度解多维问题的外推法/吕涛著. —北京: 科学出版社, 2015.6
(信息与计算科学丛书; 69)
"十二五"国家重点图书出版规划项目
ISBN 978-7-03-045052-4
I. ①高… II. ①吕… III. ①多维分析 IV. ①O572.11
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 131508 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京佳信达欣艺术印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 6 月第一次印刷 印张: 29 1/4
字数: 600 000

定价: 178.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》编委会

谨以本书奉献林群院士八十华诞！

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于2004年9月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

导　　论

科学和工程技术中的问题, 如固体力学、流体力学、热力学、电磁场、油气藏勘探与开发、环境污染与监控、大型水利工程的设计、天气预报与风暴潮预报、航天器的设计与控制、反应堆计算、生物工程等, 其数学模型皆归结于大型的连续问题, 如高维积分、积分方程、线性或非线性偏微分方程. 这些问题只能依赖大型科学计算方法在计算机上求数值解. 其中算法的选择具有举足轻重的作用. 举例说, 按照一般计算规律, 如果问题数据扩大一倍, 则解决问题计算量常常会增大四倍、八倍, 因此单靠计算机的硬件提高计算速度远远不能满足实际问题的需要. 事实上, 计算能力除依赖于计算机硬件发展外, 更依赖于新的算法. 回顾过去 30 年来计算数学开创的新算法, 如多层网格法、区域分解算法、多水平预处理法、有限元超收敛算法和有限元外推法等无不是低计算复杂度和高并行度的算法, 它们为解决大型问题的起到不可替代的关键作用.

众所周知, 一个连续问题必须先通过网步长设计和有效的数值方法, 如有限元、有限差分和求积公式等, 转换连续问题为离散代数方程后, 才能使用计算机求出近似解. 因此, 数值解 $u(h)$ 的精度依赖于网步长 h, h 可以是一个, 也可以是多个 $h=(h_1,\cdots,h_l)$. 一个适定的数值方法, 其近似解的误差显然应当满足: $u-u(h)\to 0$, 当 $h\to 0$. 如果进一步假定误差具有渐近展开, 例如在单参数情形成立

$$u(h)=u+a_1h^2+\cdots+a_mh^{2m}+O(h^{2m+1}), \tag{0.1}$$

其中 $a_i(i=1,\cdots,m)$ 是与 h 无关的常数, 那么便可以使用外推方法提高精度. 1910 年 Richardson 在讨论 Laplace 方程的差分法时发现误差拥有 (0.1) 类型的渐近展开, Richardson 基于此提出著名的 Richardson-h^2 外推法, 即在 $h/2$ 步长下再解一个差分方程得到近似解 $u(h/2)$, 其误差按照 (0.1) 具有渐近展开

$$u(h/2)=u+\frac{1}{4}a_1h^2+\cdots+\frac{1}{2^m}a_mh^{2m}+O(h^{2m+1}), \tag{0.2}$$

应用 (0.1) 和 (0.2) 消去 h^2 后, 得到外推近似

$$\tilde{u}(h)=\frac{4u(h/2)-u(h)}{3}, \tag{0.3}$$

具有 $O(h^4)$ 高精度. 1955 年 Romberg 基于著名的 Euler-Maclaurin 求和公式提出数值积分的 Romberg 算法, Romberg 的贡献是发现外推可以逐步执行 Richardson-h^{2j}

外推, $j=1,\cdots,m$, 达到 $O(h^{2m+1})$ 精度. 当今, Romberg 算法已经成为极有竞争力的数值积分方法. 算法的本质与插值多项式密切相关, 事实上, 在 (0.1) 中令 $x=h^2$, 便构造出多项式

$$f(x)=\tilde{u}+a_1x+\cdots+a_mx^m, \tag{0.4}$$

置 $x_i=h_i^2=h^2/2^{2i}, i=0,1,\cdots,m$, 便得到插值关系

$$u(h_i)=f(x_i), \quad i=0,\cdots,m, \tag{0.5}$$

由于 Lagrange 插值多项式是唯一的, 因此, (0.5) 唯一确定多项式 $f(x)$, 而外推值 $\tilde{u}=f(0)$ 是经过 $\{x_i, i=0,1,\cdots,m\}$ 的代数曲线与 y 轴的交点.

然而, 外推的哲理可追溯到古代关于圆面积的计算. 圆面积是一个典型的连续问题, 使用单位圆内接正 n 边形的面积 S_n 逼近圆面积 $S=\pi$ 的方法古代称为割圆术. 据《隋书 · 经籍志》记载我国南北朝时期的大数学家祖冲之(429—500) 在《缀术》一书中算出圆周率的朒、盈二限为

$$3.1415926<\pi<3.1415927, \tag{0.6}$$

此成果保持了 1000 年才被打破. 由于《缀术》在北宋已经失传, 祖冲之如何使用当时的计算工具得到 (0.6) 这样精密的结果? 一直是数学史家探索的课题. 毫无疑问, 祖冲之继承了我国魏晋时期大数学家刘徽(公元 3 世纪) 的割圆术思想, 刘徽证明了近似解之间成立估计

$$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n). \tag{0.7}$$

现代数学家把 (0.7) 称为刘徽不等式, 刘徽不等式是一个典型的后验估计, 即使用近似值便界定出精确值的范围. 后验估计概念到 20 世纪 60 年代才出现.

如果祖冲之应用刘徽不等式(0.7) 得到 (0.6) 必须割圆到 S_{24576}, 其计算量之庞大非当时科技水平可达到, 并且史书仅有割圆到 S_{3072}, 而无割圆到 S_{24576} 之记载. 因此, 祖冲之必然发现新的算法, 吕涛等 (1998) 设想一个符合当时科学水平的算法, 即祖冲之可能改进 (0.7) 为更精密的双边不等式

$$S_{2n}+\alpha_n(S_{2n}-S_n)<S<S_{2n}+\gamma_n(S_{2n}-S_n), \tag{0.8}$$

其中 α_n,γ_n 是由 $S_{32n}=S_{2n}+\alpha_n(S_{2n}-S_n)$ 和 $2S_{32n}-S_{16n}=S_{2n}+\gamma_n(S_{2n}-S_n)$ 所确定的补缀系数, 它们和精确的补缀系数 $\beta_n=(S-S_{2n})/(S_{2n}-S_n)$ 之间有不等式关系 $\alpha_n<\beta_n<\gamma_n$, 并且在计算过程中得到. 容易计算出

$$\alpha_{48}=0.33231559, \quad \gamma_{48}=0.33622601.$$

如果这个设想成立, 那么祖冲之只需割圆到 S_{1536} 后, 便从 $S_{1536}+\alpha_{48}(S_{1536}-S_{768}) = 3.1415926$ 得到朒率, 又从 $S_{1536}+\gamma_{48}(S_{1536}-S_{768}) = 3.1415927$ 得到盈率, 计算量大为降低.

这里补缀系数实际上就是一种外推系数, 他们是在递推过程中计算出的, 姑且把它称为祖冲之外推. 祖冲之外推系数与 Richardson 外推系数 $1/3 = 0.3333333$ 接近, 但是若用 $1/3$ 代替 α_n 或者 γ_n, 则难以保证双边不等式成立. 也不能够解释祖冲之如何计算出 (0.6) 的结果. 由此可见, 基于不等式的祖冲之外推法, 较之 1400 年后的 Richardson 外推法更有优越性. 有关祖冲之算法更多的讨论放在评注中.

圆周率计算在西方可以追溯到 Archimedes（公元前 250 年）, Archimedes 得到单位圆外切正 n 边形面积 T_n 和单位圆内接正 n 边形面积 S_n 之间成立上、下界估计

$$S_n < \pi < T_n. \tag{0.9}$$

虽然, (0.9) 不如 (0.7) 精密, 而且需要使用两个方法计算, 但是它的优点是两个方法的步长（$h = 1/n$) 相同. Archimedes 计算了 S_{96} 和 T_{96} 得到

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

直到 1654 年法国数学家 Huygens 使用几何方法导出外推: $\tilde{S}_n = 4S_{2n}/3 - S_n/3$, 即 (0.3) 类型的外推法.

现在使用三角函数及其 Taylor 展开式, 容易导出

$$S_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi^3}{3n^2} + \cdots + (-1)^j \frac{n}{2(2j+1)!}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2j+1} + \cdots \tag{0.10}$$

和

$$T_n = n\tan\frac{\pi}{n} = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + \frac{2\pi^5}{15n^4} + \cdots, \tag{0.11}$$

于是知 S_n 和 T_n 都可以可以逐步执行 Richardson-n^{-2j} 外推很快收敛到 π. 此外, 由 (0.10) 和 (0.11) 还可以导出

$$\frac{1}{3}S_n + \frac{2}{3}T_n = \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \tag{0.12}$$

这便是组合方法, 它的优点是组合步长相同的两个方法的近似值得到高精度, 并且组合系数都是和为 1 的正数; 外推系数则是和为 1 的正、负相间的数. 如果误差的渐近展开的系数是已知的, 例如 (0.10), 则可以用 S_n 代替系数中的 π, 得到

$$\hat{S}_n = S_n + \frac{2S_n^3}{3n^2} = \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \tag{0.13}$$

这便是校正方法. 校正方法不需要格外计算便得到高精度, 故也是一类有效的高精度方法, 在特征值问题中有应用.

当今, 外推、组合和校正方法已经成为遍及计算数学各门学科的加速收敛方法: 1965 年 Stetter 提出解常微分方程的外推算法; 1979 年 Marchuk 和 Shaidurov 出版了专著《差分法和它的外推》; 有限元方面自 1983 年林群、吕涛等首先提出有限元外推技术后, 国内外学者继起研究, 主要成果已总结在林群和朱起定的专著 (1994) 中.

但是上述外推法的本质依赖于近似误差对单个离散参数的渐近展开. 由于维数效应缘故, Richardson 外推在解多维问题时遇到严重挑战. 举例说, 计算一个 s 重积分用 Richardson 外推欲得到 $(2m+1)$ 阶代数精度近似值, 必须计算 2^{ms} 个点的函数值, 这意味计算复杂度随维数指数增长. 对于解偏微分方程而言, 维数效应更为严酷: 对于一个 s 维问题, 即使一步 Richardson 外推加速, 除解一个有 N^s 个未知数的代数方程外, 还必须解一个有 $(2N)^s$ 个未知数的辅问题, 后者工作量较之前者工作量随维数指数增长.

为了克服维数效应, 林群、吕涛于 1983 年提出分裂外推法. 分裂外推算法在国际间颇受重视, 如 Rabinowitz(1992) 在西班牙国际数值积分会议的综述报告中介绍了分裂外推在高维数值积分的应用和发展前景; Rüde(1997) 在 SIAM Reviews 上的评论认为: 分裂外推方法是 20 世纪 80 年代由中国学者开创的, 该方法值得受维数困扰的计算工作者采用, 并从书中受益.

分裂外推的本质是基于近似解误差对独立网参数的多变量渐近展开, 即步长 $h=(h_1,\cdots,h_s)$ 是向量, 近似解 $u(h)$ 的误差具有多元渐近展开

$$u(h)=u+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}a_\alpha h^{2\alpha}+O(h_0^{2m+2}), \tag{0.14}$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 是多指标, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_s, h^\alpha=h^{\alpha_1}\cdots h^{\alpha_s}, h_0=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}h_j$. 这看来似乎简单的变化却大为改善了外推的效果. 首先, 分裂外推的计算复杂度和存贮复杂度几乎达到最优, 并且最适合并行处理; 例如一个 s 重积分用分裂外推取得 $(2m+1)$ 阶代数精度, 仅需计算 $\begin{pmatrix}2s+m\\m\end{pmatrix}$ 个点的函数值; 其次, 分裂外推与区域分解、有限元外推结合, 通个独立网参数的设置可以把大型多维问题转化为若干规模较小、相互独立的子问题, 便于在多处理机上并行计算, 其并行度还可据问题规模和并行机类型而定, 机间通讯很少; 第三, 分裂外推能提供近似解的后验估计, 并由此设计自适应算法.

与单步长类似, 分裂外推的本质与多元插值相关, 主要涉及如何加密初始网步长. 我们建议两种类型的加密方法:

类型 1　对固定的初始步长 $h=(h_1,\cdots,h_s)$, 加密取

$$\frac{h}{2^\beta}=\left(\frac{h_1}{2^{\beta_1}},\cdots,\frac{h_s}{2^{\beta_s}}\right),\quad 0\leqslant|\beta|\leqslant m, \tag{0.15a}$$

对应的近似解令为 $u\left(\frac{h}{2^\beta}\right)$.

类型 2　对固定的初始步长 $h=(h_1,\cdots,h_s)$, 加密取

$$\frac{h}{1+\beta}=\left(\frac{h_1}{1+\beta_1},\cdots,\frac{h_s}{1+\beta_s}\right),\quad 0\leqslant|\beta|\leqslant m, \tag{0.15b}$$

对应的近似解令为 $u\left(\frac{h}{1+\beta}\right)$.

显然, 按照类型 2 加密后的网点少于类型 1 加密后的网点, 但是类型 1 每次加密的网点覆盖粗网格点, 故更适合于解网格方程.

一旦确定加密方法后, 例如使用类型 1 加密, 求分裂外推值 $\tilde{u}$ 可以分两步执行:

(1) 并行地计算出近似解 $u(h/2^\beta), 0\leqslant|\beta|\leqslant m$.

(2) 解方程组

$$u(h/2^\beta)=\tilde{u}+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\frac{h^{2\alpha}}{2^{2(\beta,\alpha)}},\quad 0\leqslant|\beta|\leqslant m,\quad (\beta,\alpha)=\sum_{i=1}^s\beta_i\alpha_i, \tag{0.16}$$

这里 $\tilde{u}, a_\alpha$ 都是未知数, 但是我们主要关心 $\tilde{u}$ 的计算.

方程 (0.16) 与多元插值相关, 事实上, 取 $(h_1^2/4^{\beta_1},\cdots,h_s^2/4^{\beta_s}), 0\leqslant|\beta|\leqslant m$, 为插值基点, 令

$$u^I(x)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}a_\alpha x^\alpha,\quad x=(x_1,\cdots,x_s) \tag{0.17}$$

为 Lagrange 插值多项式, 满足

$$u^I(h/2^\beta)=u(h/2^\beta),\quad 0\leqslant|\beta|\leqslant m,$$

一旦得到 $u^I(x)$, 那么立刻有 $\tilde{u}=u^I(0)$, 无须直接解方程 (0.16). 而且方程 (0.16) 解的存在性和唯一性以及递推算法的构造便归结于插值多项式的存在性和唯一性. 容易看出, 步长越多, 子问题越小, 并行度越高, 算法复杂度越低.

如上述: 外推和分裂外推的基础皆依赖于误差的单参数或者多参数渐近展开, 即 (0.1) 或者 (0.14), Rüde 称为显式外推; 而把不依赖误差的渐近展开的外推方法称为隐式外推, 前面阐述的祖冲之外推便是隐式外推. 隐式外推一般不需要分片一致等剖分条件, 故有其灵活性. 近 30 年隐式外推法已经取得很大的成果, 如

Brandt(1984) 和 Hackbusch(1985) 把多网格法和截断误差渐近展开得到 τ 外推算法；Zenger(1991) 基于有限元多水平子空间分裂提出解多维问题稀疏网格法与稀疏网的组合技巧, 使 s 维问题仅需 $O(h^{-1}|\ln h|^{s-1})$ 个点就可达到 $O(h^2|\ln h|^{s-1})$ 阶精度; Rüde(1991) 还建议能量外推. 然而, 最令人鼓舞的是 2009 年, Asadzadeh, Schatz 与 Wendland 基于有限元内估计和局部对称原理, 得到高次有限元解在内点的 Richardson 外推, 该方法不需要误差渐近展开, 仅仅从内估计不等式导出 (Asadzadeh et al., 2009).

本书的前身是作者 1995 年出版的英文专著 *The Splitting Extrapolation Method* (World Scientific, Singapore) 与 1998 年科学出版社出版的专著《分裂外推与组合技巧》, 但本书内容除基础部分外, 力避与前书内容雷同. 材料选择上除了吕涛及其合作者的近十年工作外, 对于隐式外推的新成果也予关注. 由于有关积分方程的外推法, 已经在专著 (吕涛等, 2013) 论述, 本书不再赘述.

作者衷心感谢林群院士对本书出版的指导和关注, 本书的核心思想都源于同林院士早年合作.

符 号 便 览

$\mathbb{Z}$	整数集合
$m \mid n$	n被m整除
$m \nmid n$	n不能被m整除
$\mathbb{R}$	实数集合
$\mathbb{R}^s$	s维 Euclid 空间
x	$=(x_1,\cdots,x_s)$, $\mathbb{R}^s$的点
e_j	x_j方向的单位向量
Ω	$\mathbb{R}^s$的开区域
$\partial\Omega$	Ω的边界
$\bar{\Omega}$	Ω的闭包
$\varnothing$	空集
$\Gamma_{h,l}$	网线集合, 见第 7 章
Γ_h	网点集合, 见第 7 章
Ω_h	正则网点集合, 见第 7 章
$\Omega_{h,i}$	非正则网点集合, 见第 7 章
$\partial\Omega_h$	$\partial\Omega\cap\Gamma_{h,l}$, 见第 7 章
$\mathcal{N}(x)$	x的离散邻域
h	$=(h_1,\cdots,h_s)$, 多参数网步长
h_0	$=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} h_i$
α	$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$, 多指标
$\lvert\alpha\rvert$	$=\alpha_1+\cdots+\alpha_s$
$\alpha!$	$\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_s!$
h^α	$h_1^{\alpha_1}\cdots h_s^{\alpha_s}$
$\dfrac{h}{2^\alpha}$	$\left(\dfrac{h_1}{2^{\alpha_1}},\cdots,\dfrac{h_s}{2^{\alpha_s}}\right)$
$\dfrac{h}{1+\alpha}$	$\left(\dfrac{h_1}{1+\alpha_1},\cdots,\dfrac{h_s}{1+\alpha_s}\right)$
$f(x)$	$f(x_1,\cdots,x_s)$
$f_\gamma(x)$	γ阶齐次函数, 见第 3 章

D_i	$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$的缩写
D^α	$D_1^{\alpha_1}\cdots D_s^{\alpha_s}$的缩写
$\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_s$的缩写
$C^m(\Omega)$	Ω上m阶连续可微函数集合
$C^{m+\sigma}(\Omega)$	Hölder 空间, $0<\sigma\leqslant 1$
$L^p(\Omega)$	Ω上p次方可积函数空间
$L^\infty(\Omega)$	Ω上真性有界函数空间
$W_p^m(\Omega)$	Sobolev 空间
$C_0^\infty(\Omega)$	支集属于Ω的无限可微函数空间
$\mathring{W}_p^m(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega)$函数在$W_p^m(\Omega)$范意义下的闭子空间
$H^m(\Omega)$	$W_2^m(\Omega)$的缩写
$H_0^m(\Omega)$	$\mathring{W}_2^m(\Omega)$的缩写
$\\|\cdot\\|_{m,p,\Omega}$	$W_p^m(\Omega)$的范数, 有时简记为$\\|\cdot\\|_{m,p}$
$\\|\cdot\\|_{m,\Omega}$	$\\|\cdot\\|_{m,2,\Omega}$的缩写
$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$	$W_p^m(\Omega)$的半范
$\\|\cdot\\|'_{k,p,\Omega}$	积空间$\prod\limits_{i=1}^{m}W_p^k(\Omega_i)$的范数
Q_T	$=(0,T]\times\Omega$
$H^m(0,T;B)$	Q_T上的函数空间, 见第 6 章
Δ	Laplace 算子
L	椭圆型算子
L^h	L的离散算子
X	Banach 空间
$K:X\to Y$	映 Banach 空间X到 Banach 空间Y的算子
$\|\|K\|\|_{Y,X}$	映 Banach 空间X到 Banach 空间Y的算子空间的范数
$\mathfrak{F}^h$	关于网参数的剖分
$S^h(\Omega)$	试探函数空间
$S_0^h(\Omega)$	$=S^h(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$
$\bar{h}_i$	独立网参数, 见第 5、6、7 章
e	$\mathfrak{F}^h$的单元
$\mathbb{P}_k(e)$	e上的k次函数集合
$Q_k(e)$	e上的多k次函数集合
$a(\cdot,\cdot)$	能量内积

R_h	Ritz 投影
u^h	u的有限元近似
u^I	u的插值函数
τ	时间步长
∂_t	时间差分
I_H^h	粗网格空间到细网格空间的延拓算子, 见第 8 章
I_h^H	细网格空间到粗网格空间的插值算子, 见第 8 章
$\mathrm{TGM}(h, u, f, \nu_1, \nu_2)$	二网格算法, 见第 8 章
T_k	等级基空间, 见第 10 章
$S_{n,m}$	矩形网上的分片双线性函数空间, 见第 10 章
$S_{n,m}^0$	$= S_{n,m} \cap H_0^1(\Omega)$
$\hat{S}_{n,m}^0$	稀疏网空间, 见第 10 章
$\hat{u}^I$	u在$\hat{S}_{n,m}$上内插函数
$\hat{u}_{n,n}^c$	u的组合近似

目　　录