Mathematical Analysis

经济管理类
数学分析（上册）

张伦传　张倩伟　编著

清华大学出版社

经济管理类
数学分析（上册）

张伦传 张倩伟 编著

Mathematical Analysis

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据作者多年来的教学实践，基于当前经济管理等相关专业对数学需求不断提升的现状编写而成. 全书分为上、下两册，本册为上册. 内容包括：函数、极限理论、连续函数与实数连续性定理、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分及定积分等.

本书可供经济类院校数学专业以及综合类院校经济管理专业对数学要求较高的学生使用，也可供这些专业中学习过高等数学课程的学生自学提高之用.

图书在版编目(CIP)数据

经济管理类数学分析. 上册/张伦传，张倩伟编著. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-40133-9

Ⅰ. ①经…　Ⅱ. ①张… ②张…　Ⅲ. ①数学分析一高等学校一教学参考资料　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 089646 号

责任编辑：陈　明
封面设计：张京京
责任校对：赵丽敏
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：16.25　　**字　　数**：352 千字
版　　次：2015 年 5 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 5 月第1 次印刷
定　　价：36.00 元

产品编号：059829-01

前 言

FOREWORD

本书是在作者长期以来讲授经济管理类专业数学分析、微积分课程的经验基础上，结合经济管理类专业特点和需求而编写的主要面向综合类院校经济管理类专业（特别是对数学要求相对较高的专业，如金融工程、管理科学与工程、统计学等）本科生的数学分析教材，也可作为理工科等其他有关专业的教学参考书.

全书分上、下两册，适合三个学期的讲授. 上册共 7 章内容，以一元函数为研究对象，分别讨论了极限、连续函数与实数连续性定理、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分及定积分等内容. 下册分为 6 章，主要研究多元函数的相关性质，包括级数、多元函数的极限与连续、多元函数的微分学、隐函数理论及其应用、多元函数积分学以及曲线积分与曲面积分. 书中着重讲解基本概念、基本理论与方法以及理论方法在经济管理相关领域的应用举例.

经济管理类专业的数学分析不同于数学专业的数学分析，书中略去了不太常用的一些内容和某些定理的严格证明，尽量以通俗易懂的语言描述具体问题，重视理论方法在经济管理领域的应用，注重与经管类相关专业内容的接轨，体现“有所为，有所不为”. 此外，经济管理类专业的数学分析又比现有经管类的微积分教材覆盖面更广、理论层次更深，可以满足学生在专业领域进一步发展提升的需求.

本书力求在内容设置上逻辑严谨、详略得当，难度适宜，深入浅出，融会贯通；在结构编排上形式紧凑、脉络清晰，有助于学生的自主学习和教师的教学使用. 当然，由于作者水平有限，书中难免有不尽如人意之处，殷切期望读者予以批评指正.

作　者

2015 年 1 月于中国人民大学

常 用 符 号

1. 常用的数集

1）本书常用到的数集符号有以下几种：

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$表示自然数集；

$\mathbb{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$表示正整数集；

$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots\}$表示整数集；

$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p,q\text{ 为互质的整数},q\neq0\right\}$表示有理数集；

$\mathbb{R}=\{x|x\text{ 为实数}\}$表示实数集.

2）区间

区间可以大致分为有限区间和无穷区间两大类.

假设 a,b 均为实数，并且 $a<b$，则以下区间均为有限区间：

开区间　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

半闭半开区间　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

记符号$+\infty$和$-\infty$分别为“正无穷大”和“负正穷大”，符号∞为“无穷大”，它是$+\infty$与$-\infty$的统称. 以下区间均为无穷区间：

开区间　$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$；

开区间　$(-\infty,a)=\{x|-\infty<x<a\}$；

开区间　$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}$；

半闭半开区间　$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$；

半开半闭区间　$(-\infty,a]=\{x|-\infty<x\leqslant a\}$.

2. 点的集合——邻域

设实数 x_0,δ，其中 $\delta>0$，则集合$\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$；集合$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$称为点 x_0 的 δ 去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$.

显然，$U(x_0,\delta)$表示到点 x_0 的距离小于 δ 的所有点的集合；$\mathring{U}(x_0,\delta)$表示到点 x_0 的距

离小于 δ 的除点 x_0 之外的所有点的集合. 随着讨论空间维数的不同，邻域对应不同的范围. 例如，对于一维数轴，邻域 $U(x_0,\delta)$ 表示开区间，即 $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，去心邻域则为 $\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$；对于二维平面，邻域 $U(x_0,\delta)$ 表示以 x_0 为中心 δ 为半径的不含圆周的圆面；对于三维立体空间，邻域 $U(x_0,\delta)$ 则表示以 x_0 为中心 δ 为半径不含球面的球体，等等.

在一维数轴上，邻域又可分为左邻域和右邻域，分别记为

$$U^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0),\quad (x_0\text{ 点的 }\delta\text{ 左邻域})$$

$$U^+(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta).\quad (x_0\text{ 点的 }\delta\text{ 右邻域})$$

3. 逻辑符号

符号“$\Leftrightarrow$”表示“等价”，即“充分必要”；

符号“$\Rightarrow$”表示“推得”，即“如果……，那么……”；

符号“$\in$”表示“属于”；

符号“$\forall$”表示“任意”；

符号“$\exists$”表示“存在”.

例如，“若 $\forall a,b\in\mathbb{Q}$，且 $a<b$，则 $\exists c\in\mathbb{Q}$ 满足 $c\in(a,b)$”表示“任意两个有理数 a,b 之间，存在有理数 c”；“$\exists M\in\mathbb{R}$，使得 $\forall x\in A$，有 $x\leqslant M\Leftrightarrow$ 集合 A 有上界 M”表示存在一个实数 M，对集合 A 中的任意元素 x 都满足 $x\leqslant M$ 的充分必要条件为集合 A 以 M 为上界.

目 录

CONTENTS

第 1 章

函　　数

自然界的一切事物都处于运动和变化之中，各种事物之间有机联系、彼此依赖．例如，银行存款利息的多少依赖于存款时间的长短；在经济活动中，产品销售收入的多少依赖于产品价格和销售量等．为反映变化着的量的一般性质及它们之间的依赖关系，在数学中产生了变量和函数的概念．函数是数学分析研究的对象，其连续性、可微性、可积性等则是数学分析的主要研究内容．本书以函数为载体，将数学分析中的思想方法进一步应用到概率论、统计学、经济学和管理学之中．

1.1　变量与函数、函数的基本性质

1.1.1　变量与函数

事物的运动是绝对的，静止是相对的．在某个运动过程中，时时或处处变化着的量称为**变量**；时时或处处保持相对静止状态的量称为**常量**．例如，在自由落体运动过程中，物体的质量看作常量，而物体的速度则是变量．又如，在产品的生产过程中，固定成本为常量，而可变成本则是变量．进一步分析上述两过程，自由落体运动中，物体的速度 V 是随下落时间 t 的变化而变化的，由经典力学知 $V=gt$，其中 g 是重力加速度；生产成本 $C(x)$ 是随产量 x 的变化而变化的，从而 $C(x)=C_0+C_1(x)$，其中 C_0 是固定成本，$C_1(x)$ 为可变成本．上述均为函数关系．下面再举几例．

例 1　用边长为 a 的正方形硬纸板做成一个高为 x 的无盖小方盒(如图 1.1 所示)．这个方盒的容积 $V=x(a-2x)^2, 0\leqslant x\leqslant \dfrac{a}{2}$.

容积 V 与小方盒的高 x 关联紧密，V 与 x 之间的关系即为函数关系．

例 2　下面是国务院 2002 年 2 月 21 日公布的利率表(见表 1.1)：

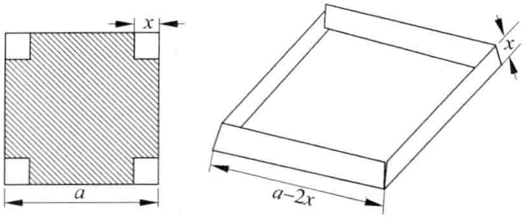


图 1.1

表 1.1 利率表

时间	3 个月	6 个月	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率/%	1.71	1.89	1.98	2.25	2.52	2.79

表 1.1 反映了年利率与时间的相互依存关系，时间的长短决定了年利率的多少. 年利率与时间的关系是函数关系.

尽管上述实例的背景各不相同，但它们的共同点均反映了两个变量的相互依存性，而且其中一个变量的取值决定了另一个变量的取值. 于是，由具体到一般，函数定义如下：

定义 1.1 设 X 是实数集$\mathbb{R}$的非空子集，若对于 X 中任意给定的数 x，按照确定的对应关系 f 有实数集$\mathbb{R}$ 中唯一的数 y 与 x 对应，则变量 y 称为变量 $x(x\in X)$的函数. 记为 $f: X\to\mathbb{R}, x\to f(x)$，或简记为 $y=f(x), x\in X$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量（或称为函数值）. x 的变化范围 X 称为函数 $y=f(x)$的定义域，集合 $f(X)=\{y\mid y=f(x), x\in X\}$称为该函数值域，即因变量的变化范围.

由函数定义知，定义域和对应关系决定了一个函数的本质。从而，若两个函数定义域不同，或对应关系不同，则这两个函数即为不同的函数. 至于自变量（或函数值）用什么字母来表示，这是形式问题，根据需要而定.

例 3 求函数 $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ 的定义域和值域.

解 为使该函数有意义，x 应满足 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$，即

$$2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

由此得

$$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

从而定义域为

$$\{x\mid 4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2, k=0,1,2,\cdots\},$$

计算得到值域为

$$\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

例 4 已知函数 $y=f(x), x\in\mathbb{R}$ 满足关系式

$$2f(x)+f(1-x)=x^2, \tag{1.1}$$

求 $f(x)$的表达式.

解　作变量替换,令 $t=1-x$,则 $x=1-t$,代入(1.1)式,得

$$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,$$

由函数定义知,上式中的 t 换成 x 仍成立,即

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2. \tag{1.2}$$

联立(1.1)式与(1.2)式,消去 $f(1-x)$项后即得

$$3f(x)=2x^2-(1-x)^2=x^2+2x-1,$$

从而

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3},\quad x\in\mathbb{R}.$$

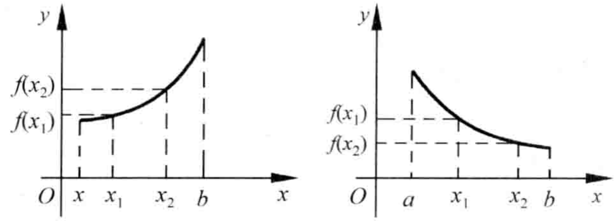
1.1.2　函数的基本性质

设函数 $y=f(x)$定义在数集 X 上,在平面直角坐标系下,平面点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$对应的图形称为函数 $y=f(x)$的**图像**. 因此,以平面直角坐标系为平台,函数的解析性质和几何性质可以互相转化. 具体分析如下:

1. 单调函数

定义 1.2　已知函数 $y=f(x)$,$x\in(a,b)$,若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$,当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上单调递增;当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)上单调递减. 特别地,当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在区间(a,b)上严格单调递增(或递减).

相应地,从几何角度来看,单调递增和单调递减函数对应的图像分别称为单调上升和单调下降(如图 1.2 所示).



(a)　　(b)

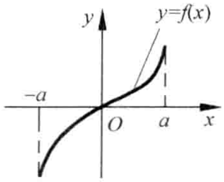
图　1.2

关于如何求一个函数单调区间的问题,我们将在 5.5 节详细讲解.

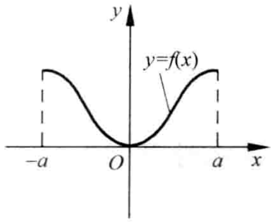
2. 奇函数和偶函数

定义 1.3 已知函数 $y=f(x)$ 定义在(关于原点 O)对称的区间 $(-a,a)$ 上，$a>0$. 若对任意 $x\in(-a,a)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是奇函数；若对任意 $x\in(-a,a)$ 有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数.

相应地，从几何角度来看，奇函数图像关于原点对称；偶函数图像关于 y 轴对称(如图 1.3 所示).



(a) 奇函数图像



(b) 偶函数图像

图 1.3

例 5 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

解 (1) 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，由于

$$f(-x)=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2},$$

从而

$$f(-x)+f(x)=\left(\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)=1-1=0,$$

即 $f(-x)=-f(x)$，故该函数是奇函数.

(2) 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，由于

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1}),$$

从而

$$\begin{aligned}f(-x)+f(x)&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln((\sqrt{x^2+1})^2-x^2)=\ln 1=0,\end{aligned}$$

故该函数是奇函数.

3. 周期函数

定义 1.4　已知函数 $y=f(x)$，$x\in X$，若存在非零常数 T，使得 $T+x\in X$，并且对于任意 $x\in X$，有 $f(T+x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

从几何的角度讲，周期函数的图像可看作是由长度为 $|T|$ 的片段向左、右两侧平移 $|T|$ 的整数倍而形成的.

对于周期为 T 的周期函数 $y=f(x)$，易知 nT(n 为正整数)均为其周期. 通常我们所说的周期指最小正周期(也称基本周期). 但并非每个周期函数均有最小正周期.

在高中我们已学过，正弦函数 $y=\sin x$，($x\in\mathbb{R}$)是奇函数，余弦函数 $y=\cos x$，($x\in\mathbb{R}$)是偶函数，而且它们都是以 2π 为最小正周期的周期函数.

例 6　考查著名的狄利克雷(Dirichlet)函数：

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

狄利克雷函数在任何区间上都没有单调性，它是偶函数. 因为对于任意 $x\in\mathbb{R}$，当 x 为有理数时，$-x$ 亦为有理数，此时 $f(x)=1=f(-x)$；当 x 为无理数时，$-x$ 亦为无理数，此时 $f(x)=0=f(-x)$. 总之，有 $f(x)=f(-x)$，$\forall x\in\mathbb{R}$. 狄利克雷函数还是周期函数，任何非零有理数均为其周期. 因对任意非零有理数 a，当 x 是有理数时，$x+a$ 也是有理数，从而 $f(x+a)=1=f(x)$；当 x 是无理数时，$x+a$ 是无理数(否则，$(x+a)-a=x$ 是有理数，矛盾)，从而 $f(x+a)=0=f(x)$. 总之，有 $f(x+a)=f(x)$，对任意 $x\in\mathbb{R}$ 均成立. 同时这也表明狄利克雷函数没有最小正周期.

另外，狄利克雷函数的图像是画不出来的. 可以直观的想象：它的图像上有无数个点稠密地分布在 x 轴上，也有无数多个点稠密地分布在直线 $y=1$ 上.

4. 有界函数

定义 1.5　已知函数 $y=f(x)$，$x\in X$，若存在一个实数 A，使得对任意 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant A$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界；若存在一个实数 B，使得对任意 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant B$，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界；进一步地，若存在一个正数 $M>0$，使得对任意 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上为有界函数，M 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个界.

显然，$f(x)$ 在 X 上有界，意味着 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界. 从几何角度讲，函数 $f(x)$ 的图像介于直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间. 例如：正弦函数 $y=\sin x$ 为有界函数(如图 1.4 所示).

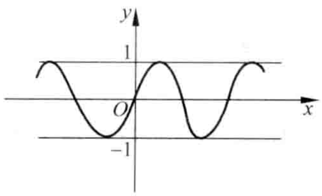


图　1.4

注意　(1) $f(x)$ 在 X 上为有界函数 $\Leftrightarrow \exists M>0,\ \forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$；$f(x)$ 在 X 上为无界函数 $\Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists x_0\in X$，有 $|f(x_0)|>M$.

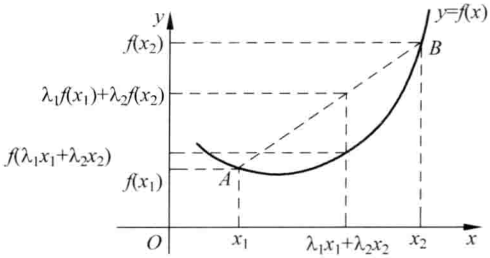
（2）$f(x)$在X上为有界函数，界不唯一.

5. 凸凹函数

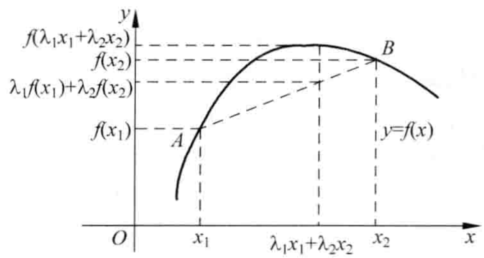
定义 1.6 已知函数 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$，如果对$\forall x_1,x_2\in[a,b]$，有 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$，对于满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的任意非负实数 λ_1 和 λ_2 都成立，则称 $f(x)$在区间$[a,b]$上为凸函数（或下凸函数）；如果 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\geqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$，则称 $f(x)$在$[a,b]$上为凹函数（或上凸函数）.

$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2(\lambda_1+\lambda_2=1,\lambda_1\geqslant0,\lambda_2\geqslant0)$称为自变量 x_1,x_2 的凸组合；$\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)(\lambda_1+\lambda_2=1,\lambda_1\geqslant0,\lambda_2\geqslant0)$称为函数值 $f(x_1)$和 $f(x_2)$的凸组合.

从定义 1.6 可知，凸函数意味着在区间$[a,b]$上，任意两个自变量凸组合的函数值不超过相应函数值的凸组合；而凹函数则意味着在区间$[a,b]$上，任意两个自变量凸组合的函数值不小于相应函数值的凸组合. 从几何角度来看，凸、凹函数表示如下（如图 1.5 所示）：



(a) 凸函数(下凸函数)



(b) 凹函数(上凸函数)

图 1.5

从上面的凸、凹函数图像中可以看出：对于凸函数，连接图像上任意两点的割线位于两点间曲线的上方；而对于凹函数，连接图像上任意两点间的割线位于两点间曲线的下方. 这一特征对于所有的凸、凹函数均满足. 有些参考书，在没有给出凸、凹函数的解析定义时，常以上述几何特征作为对凸、凹函数的描述.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$；

（2）$f(x)=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$；

（3）$f(x)=\sqrt{\cos x}$；

(4) $f(x)=\ln(2x+1)-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

2. 下列各小题中的函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\log_a x^3, g(x)=3\log_a x, a>0$，且 $a\neq 1$；

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x}, g(x)=1$；

(3) $f(x)=\ln \tan x, g(x)=\ln \sin x-\ln \cos x$.

3. 设某商店以每件 a 元的价格出售某种商品，若顾客一次购买 30 件以上 50 件(含 50 件)以下，则超过 30 件的部分以 $0.95a$ 元的优惠价出售. 若一次购买 50 件以上，则超过 50 件的部分以 $0.85a$ 元的特惠价出售. 试将一次成交的销售收入 R 表示成销售量 x 的函数.

4. 某厂生产某种产品，日产量最多为 1000 件. 该厂每天固定成本为 1200 元，生产一件产品的可变成本是 50 元，求该厂日总成本函数及平均单位成本函数.

5. 判断下列各函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 该函数称为符号函数，因为 $x\cdot\operatorname{sgn}x=|x|$；

(2) $f(x)=[x]$，该函数为取整函数，即 $[x]$ 是小于或等于 x 的最大整数；

(3) $f(x)=(x)=x-[x]$.

6. 在平面直角坐标系下作出下列函数的图像：

(1) $f(x)=x+|x|$；　　(2) $f(x)=x-|x|$；

(3) $f(x)=(x)=x-[x]$；　　(4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

7. 下列函数哪些是周期函数？若是，求出最小正周期.

(1) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$；　　(2) $f(x)=(x)=x-[x]$；

(3) $f(x)=\sin(2\pi x)$；　　(4) $f(x)=\sqrt{\tan x}$.

8. 证明：定义在 $\mathbb{R}$ 上的任何函数均可表示为奇函数与偶函数之和的形式.

1.2　复合函数、分段函数与反函数

1.2.1　复合函数

在科学钻探实验过程中，钻探深度是钻探速度的函数，而钻探速度又是钻探时间的函数，这种连锁式(或嵌套式)的函数关系即为复合函数关系.

定义 1.7　设有函数 $z=f(y)$ 和 $y=\varphi(x)$，且 $z=f(y)$ 的定义域与 $y=\varphi(x)$ 的值域交集

非空，则称 $z=f(\varphi(x))$ 是由 $z=f(y)$ 和 $y=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，y 称为中间变量.

例如，三个函数 $f(x)=x^2+8, g(x)=\sin 5x, \varphi(x)=\ln(6x-11)$ 构成的复合函数

$$f(g(\varphi(x)))=g^2(\varphi(x))+8=\sin^2(5\varphi(x))+8=\sin^2(5\ln(6x-11))+8.$$

又如，对于两个函数 $f(x)=\sqrt{x}, x\in(0,1), g(x)=\ln x, x\in(0,1), f(g(x))$ 无意义，但 $g(f(x))=\ln\sqrt{x}, x\in(0,1)$ 是有意义的. 因为函数 $g(x)=\ln x$ 的值域为 $(-\infty,0)$，而 $(-\infty,0)$ 与 $f(x)$ 的定义域 $(0,1)$ 交集为空集，故 $f(g(x))$ 无意义；但是 $f(x)=\sqrt{x}, x\in(0,1)$ 的值域为 $(0,1)$，从而 $g(f(x))$ 有意义.

我们不但要能够利用简单函数构造复合函数，反过来，也要会把复合函数分解成简单函数.

例如，函数 $f(x)=\lg\cos^2(2x^2+1)$ 是由下列简单函数复合而成的：

$$f(x)=\lg u,\quad u=v^2, v=\cos t,\quad t=2x^2+1.$$

1.2.2 分段函数

1.1 节中介绍的狄利克雷函数就是分段函数，习题 1.1 中的符号函数也是分段函数. 实际上，我们熟知的绝对值函数 $y=|x|$ 本身就是分段函数.

在现实生活中，分段函数关系是处处存在的. 比如，电话的分时段计费，商家为促销将商品按购买数量多少确定打折幅度（见习题 1.1 中第 3 题）等.

一般地，所谓分段函数指函数的定义域是若干个互不相交的子集的并集，并且至少在两个子集上函数对应的表达式是不同的.

例 1 已知函数 $y=f(u)=\sqrt{1-u^2}, u=\varphi(x)=\begin{cases} x^2+x-1, & x\leqslant 0, \\ \lg x, & x>0. \end{cases}$ 问：x 在何范围内变化时，能够构造复合函数 $y=f[\varphi(x)]$？并求出 $f[\varphi(x)]$ 的解析式.

解 因为 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，为构造复合函数 $f[\varphi(x)]$，$\varphi(x)$ 的值域应包含在 $[-1,1]$ 之中，即满足 $-1\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$.

由于 $\varphi(x)$ 是分段函数，需要分段考虑，从而，x 应该满足

$$\begin{cases} x\leqslant 0, \\ -1\leqslant x^2+x-1\leqslant 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x>0, \\ -1\leqslant \lg x\leqslant 1. \end{cases}$$

解得

$$-2\leqslant x\leqslant -1,\quad \text{或}\quad x=0,\quad \text{或}\quad \frac{1}{10}\leqslant x\leqslant 10.$$

进而可得复合函数