21世纪高等院校创新规划教材

概率论与数理统计

杨明泉 编著

Probability Theory and Mathematical Statistics

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

21世纪高等院校创新规划教材

概率论与数理统计

杨明泉　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内 容 简 介

本书的主要内容：随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、多维随机变量及其概率分布、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检验、方差分析与回归分析。

本书的主要特色：理论体系完整，内容精炼简明；以问题驱动来增强学习兴趣，以建模思想来培养应用能力；以案例分析来引导解题思路，以典型题例来呈现解题方法。本书内容由浅入深，循序渐进，易学易懂，特别适合民办本科院校和独立学院学生使用，也可作为其他本科院校理工类概率论与数理统计课程教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨明泉编著. —杭州：浙江大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-308-12863-6

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①杨…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 019764 号

概率论与数理统计

杨明泉　编著

责任编辑　邹小宁
文字编辑　沈巧华
封面设计　王聪聪
出　　版　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州教联文化发展有限公司
印　　刷　浙江云广印业有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　15.25
字　　数　352 千
版 印 次　2014 年 1 月第 1 版　2014 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-12863-6
定　　价　35.00 元

版权所有　翻印必究　印装差错　负责调换

前　言

本书根据普通本科院校理工类专业概率论与数理统计课程大纲编写。在内容选择和知识体系上完全按照理工类各专业对概率论与数理统计的基本需求选取。在编写中以突出“应用性和实用性”为原则，以“不求一样发展，但都要发展；不求同步提高，但都要提高；不求相同规格，但都要合格”的新教育质量观为指导，以适合独立学院学生学习概率论与数理统计课程为宗旨。

本书的主要特色是：理论体系完整，内容精炼简明；以问题驱动来增强学习兴趣，以建模思想来培养应用能力；以案例分析来引导解题思路，以典型题例来呈现解题方法。在内容和章节安排中遵循“由浅入深，循序渐进，易学易懂”的原则。根据作者多年的教学实践经验，将多维随机变量概率分布及数字特征单独成章，在学习完一维随机变量的分布及其数字特征之后学习，可以大大降低学生学习概率论与数理统计课程的难度。这样安排教材结构，更符合学生的认知规律，从而更符合独立学院和应用型本科院校教学要求。

本书共9章：第1章，随机事件与概率；第2章，随机变量及其概率分布；第3章，随机变量的数字特征；第4章，多维随机变量及其概率分布；第5章，大数定律与中心极限定理；第6章，数理统计的基本概念；第7章，参数估计；第8章，假设检验；第9章，方差分析与回归分析。附录1，习题参考答案与提示；附录2，常用数表。

本书的编写出版得到“十二五”浙江省高校重点学科基础数学建设单位嘉兴学院的资助。嘉兴学院严从荃教授、马柏林教授、伍长春教授和嘉兴学院南湖学院胡俊云教授对作者组织编写独立学院系列教材给予了大力支持，在此表示特别感谢。伍长春教授还对本书稿进行了认真仔细的审阅，提出了许多宝贵的建议；张慧、胡瑞芳、尹志强、尹云辉、赵文红等老师参与了第7章、第8章和第9章的编写工作，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中疏漏、不妥或错误之处在所难免，敬请使用本书的读者批评指正，本人万分感谢。

作　者

2013年11月15日

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第1章　随机事件与概率

自然界和人类社会中各种现象的发生,看起来似乎是偶然的,但有许多现象的发生是有规律的. 例如在投硬币试验中,虽然投掷硬币之前是无法断定是正面向上,还是反面向上,但是通过大量的重复试验发现两者出现的次数很接近. 换言之,投一枚硬币,出现正面的频率与出现反面的频率几乎相等. 如何用数学方法把随机现象出现的内在规律性进行描述是概率论与数理统计研究的重要课题.

我们把随机现象出现的可能性大小用0至1的数值来描述,这个数值称为随机现象发生的概率. 关于概率问题,大约在公元前3500年,古埃及等地已经出现了利用骨制物体做成具有偶然性的赌博器具,它是骰子的先驱. 目前的立方体的骰子实质上与古埃及坟墓中出土的公元前2000年的骰子完全一样. 概率的数学理论通常认为是法国数学家帕斯卡(1623—1662年)和费马(1601—1665年)首创的,他们成功地导出了包括掷骰子在内的一些实际问题的概率. 用概率来度量不确定性和可变性已有数百年的历史,但是数百年中用概率来描述不确定性一直存在争议,这主要是缺乏严密的数学理论作为它的基础. 在20世纪初叶,集合理论的完善,给现代数学提供了严密的理论基础. 1933年,苏联数学家科尔莫戈罗夫(Андрей Николаевич Колмогоров,1903—1987年)据此提出了概率的公理化定义,建立了概率论严谨的理论体系,使概率论与数理统计作为一个相对独立的数学分支得到了较快的发展. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象规律性的一门数学学科.

本章先从实例中引入随机事件的概念,并给出试验的概念,采用集合论的理论,用公理化的定义方式给出概率的抽象定义,最后介绍几种常见的概型.

§1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与随机事件

投掷一枚硬币,可能是正面,也可能是反面,事先是不能预知的. 同样从一批有正品和次品的商品中,随机抽一件,抽出来之前也不能预知是正品还是次品. 又如,当你把一个篮球投向篮圈时,中篮与不中篮预先是不能确定的. 我们把上面的观察或实验抽象地称为**试验**,并把具有如下三个特征的试验称为**随机试验**:

(1)可以在相同条件下重复地进行;

(2)每次试验可能的结果不止一个,并且能事先明确试验所有的可能结果;

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果一定出现.

容易检验投掷一枚硬币的试验是满足上述三个特征的. 还有许多自然现象的发生,或人为的试验,我们可以忽略一些次要因素,抽象地把它归纳为随机试验. 例如,从一批商品中,任取一件商品,检测它是否为次品;观察某高速公路拐弯处某天是否发生交通事故,等等都可视为随机试验.

随机试验(以下简称试验)常用大写字母E表示,试验的基本结果用ω表示,用Ω表示一个试验的所有基本结果(或称为点)组成的集合,并称集合Ω的子集为**事件**,用大写字母A,B,C等表示.

在一个随机试验下,我们把仅包含Ω中一个点的子集称为**基本事件**,包含Ω中一个以上点的集合称为**复合事件**,并称Ω为**必然事件**. 所谓必然事件是指在每一次随机试验中该事件必然发生. 特别地,把相对于Ω的空集$\varnothing$称为**不可能事件**,即不可能事件$\varnothing$是在试验中一定不会发生的事件. 对一个随机试验的事件来说,我们更关心的是在一次试验中预先不能确定是否发生的事件,即在一次试验下可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**.

例 1.1.1 一枚硬币抛掷一次,观察出现正反面的试验为E. 试写出E下所有可能结果的集合Ω.

解 通过观察,在随机试验E下的基本结果有两个,分别记ω_1为正面向上,ω_2为反面向上,则E下所有基本结果集合为

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}.$$

例 1.1.2 将两枚硬币一起抛掷一次,观察出现正面数量的试验为E,写出E下基本结果的集合,并用基本结果来表示如下事件:$A=\{$没有出现正面向上$\}$;$B=\{$一枚正面向上$\}$;$C=\{$两枚都是正面向上$\}$;$D=\{$至有一枚正面向上$\}$.

解 通过观察,在随机试验E下的基本结果有三个,它们分别是:0次、1次和2次,若分别简记为:0、1和2,则可得基本结果集合为

$$\Omega=\{0,1,2\},$$

所以事件:

$$A=\{0\};B=\{1\};C=\{2\};D=\{1,2\}.$$

例 1.1.3 设记录某网站一天内点击次数的试验为E,求E的所有基本结果的集合Ω.

解 经观察可得,在随机试验E下的基本结果集合为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

例 1.1.4 测量某一零件长度,描述出其测量结果与真正长度的误差试验E,试给出误差集合Ω.

解 由于误差可能为某一区间内的任意值,因此,这个误差值集合为

$$\Omega=\{\delta|\delta\in[-M,M]\},$$

其中,M为最大误差,如果无法具体确定这一最大误差,可将Ω取作$\{\delta|\delta\in(-\infty,+\infty)\}$.

例 1.1.5 向某一目标发射一枚炮弹，观察炮弹的落点位置，假定以目标中心为原点，炮位与目标中心的连线为y轴，目标自左向右方向为x轴，则炮弹落点的坐标为(x,y). 求发射一枚炮弹试验E的所有可能结果的集合Ω.

解 虽然实际情况炮弹的落点不可能离目标无限远，但在理论上，可设炮弹落在以目标为原点的整个平面上，所以

$$\Omega=\{(x,y)|-\infty<x<\infty,-\infty<y<+\infty\}.$$

综上五例，我们看到随机试验下由全体基本结果组成的集合Ω是多种多样的，有的是离散的，如例1.1.1、例1.1.2和例1.1.3；有的是可能取到一个区间内的所有点的无限个结果，如例1.1.4；有的可能取到整个平面上的点或空间的点.

在概率论与数理统计中，我们将一个随机试验下的所有基本结果组成的集合Ω，给予一定的数学结构后称为**样本空间**. 同时把试验下的基本结果称为**样本点**，以下样本空间仍用记号Ω表示. 并利用集合的关系和运算，分别给出它们在概率论中的相应概念和意义.

例 1.1.6 设在标有数字1,2,3的三张卡片中随意抽取一张的试验为E，试写出E的样本空间Ω，并写出抽取的卡片数字是奇数的事件A.

解 试验为E的结果可能为1,2,3，所以E的样本空间$\Omega=\{1,2,3\}$，事件$A=\{1,3\}$.

1.1.2 事件的关系与运算

在概率论中，由于我们把事件定义为样本空间的子集，所以事件之间的关系和运算可以类似于集合的关系和运算来定义，但要正确理解事件关系和运算的定义都是据以“事件发生”这一概率论中的实际意义而定义的.

在以下讨论中，我们总是假定Ω是试验E的样本空间，ω是样本点，所论及的事件都是同一次试验中的事件，并且用大写字母表示事件，Ω为必然事件，$\varnothing$为不可能事件.

1. 事件的包含与相等关系

如果事件A发生必然导致事件B发生（对于任意$\omega\in A$，必有$\omega\in B$），则称**事件A包含于事件B**，记作$A\subset B$（或称**事件B包含事件A**，记作$B\supset A$）.

易得，对于任意事件A，有

$$\varnothing\subset A\subset\Omega.$$

如果事件A包含于事件B，并且事件B包含于事件A，则称**事件A等于事件B**，记作

$$A=B.$$

2. 事件的运算

我们把事件A和事件B中至少有一个发生的事件称为事件A和事件B的**和事件**，或称事件A与事件B的并，记作$A\cup B$，或记为$A+B$，即

$$A\cup B=\{\omega|\omega\in A\text{或}\omega\in B\}.$$

在例1.1.2中，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$，D:“至少有一枚正面向上”，所以$D=B\cup C=\{1,2\}$.

易得，对于任意事件A,B，有

$$\varnothing\subset A\subset A\cup B\subset\Omega\text{，或}\varnothing\subset B\subset A\cup B\subset\Omega.$$

类似地，n个事件的并记作$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，无穷可列个事件的并记作$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

我们把事件A与事件B同时发生的事件称为事件A与事件B的**积事件**，记作$A\cap B$，或简记为AB，即

$$A\cap B=\{\omega|\omega\in A,且\omega\in B\}.$$

易得，对于任意事件A,B，有

$$\varnothing\subset A\cap B\subset A\subset A\cup B\subset\Omega，或\varnothing\subset A\cap B\subset B\subset A\cup B\subset\Omega.$$

类似地，n个事件的积记作$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$，无穷可列个事件的积记作$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

我们把事件A发生而事件B不发生的事件称为事件A与事件B的**差事件**，记作$A-B$，即

$$A-B=\{\omega|\omega\in A,且\omega\notin B\}.$$

3. 互斥事件

假设事件A与事件B是同一次试验下的两个事件，如果事件A与B不可能同时发生，我们称事件A与事件B是**互不相容事件**，或称事件A与事件B为**互斥事件**.

由互斥事件的定义可得，事件A与事件B互斥的充要条件是$AB=\varnothing$.

4. 对立事件

假设事件A与事件B是同一次试验下的两个事件，如果事件A与事件B不可能同时发生，且必定发生其中之一，我们称事件A与事件B是**对立事件**（或称**互逆事件**），并把B记作$\overline{A}$，或把A记作$\overline{B}$，也即A的对立事件为$\overline{A}$.

由对立事件的定义可得，A与B对立的充要条件是$A\cap B=\varnothing$且$A\cup B=\Omega$. 即有公式：

$$A\cap\overline{A}=\varnothing,A\cup\overline{A}=\Omega.$$

5. 完备事件组

设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是有限或无穷可列多个事件组，如果满足如下两个条件：

（1）$A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots$;

（2）$\bigcup\limits_{k}A_k=\Omega,k=1,2,\cdots$.

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一个**完备的事件组**，或称$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是样本空间的一个**剖分**.

6. 事件的运算律

由事件的运算定义可得，事件间的运算律与集合论中集合的运算律相对应，整理如下：

（1）等幂律　$A\cup A=A,A\cap A=A$;

（2）交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

（3）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

（4）分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

（5）De Morgan律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1.7　设甲发射一颗子弹打靶的试验为E_A，乙发射一颗子弹打靶的试验为E_B，

并设甲、乙中靶的事件分别为A和B. 现记甲、乙两名射击选手各发射一颗子弹打靶试验为E，试用甲、乙各自打靶试验下的事件A,B表示试验E下的以下事件：

(1)E的样本空间中的所有基本事件；

(2)甲中乙不中；

(3)乙中甲不中；

(4)两人都中；

(5)两人都不中；

(6)甲、乙至少有一人中.

解　由题设试验E_A和E_B下的事件分别为A,B，则甲不中的事件为$\overline{A}$，乙不中的事件为$\overline{B}$；试验E的样本空间中的子集是E_A和E_B的所有基本事件的积事件组成. 所以

(1)E的样本空间中的所有基本事件为：$AB,A\overline{B},B\overline{A},\overline{A}\,\overline{B}$；

(2)甲中乙不中事件为：$A\overline{B}$；

(3)乙中甲不中事件为：$\overline{A}B$；

(4)两人都中事件为：AB；

(5)两人都不中事件为：$\overline{A}\,\overline{B}$，或$\overline{A\cup B}$；

(6)甲、乙至少有一人中事件为：$A\cup B$.

例 1.1.8　设甲掷一枚硬币试验记为E_A，甲掷出正、反面的事件分别为$A=\{a_1\}$和$\overline{A}=\{a_0\}$；同样，乙掷一枚硬币试验记为E_B，掷出正、反面的事件分别为$B=\{b_1\}$和$\overline{B}=\{b_0\}$. 利用E_A和E_B的样本点写出甲、乙各自将一枚硬币掷一次的试验E的样本空间Ω，以及事件$AB,A\overline{B},\overline{A}B,\overline{A}\,\overline{B}$.

解　设E_A的样本空间为$\Omega_A=\{a_0,a_1\}$，E_B的样本空间为$\Omega_B=\{b_0,b_1\}$，则试验E的样本空间Ω仿照高等数学中的记法表示为

$$\Omega=\Omega_A\times\Omega_B=\{(a_1,b_1),(a_1,b_0),(a_0,b_1),(a_0,b_0)\}.$$

$$AB=\{(a_1,b_1)\},\ A\overline{B}=\{(a_1,b_0)\},\ \overline{A}B=\{(a_0,b_1)\},\ \overline{A}\,\overline{B}=\{(a_0,b_0)\}.$$

特别指出：例1.1.7、例1.1.8中的试验E中的事件用试验E_A和E_B中事件A和B的运算来表示，是容易理解的. 但例1.1.8中，由于事件A与B的积事件AB是试验E下的事件，所以计算积事件AB时，要把事件A与B先看作是试验E下的事件，即

$$A=\{(a_1,b_1),(a_1,b_0)\},\ B=\{(a_1,b_1),(a_0,b_1)\},$$

然后进行运算，即$AB=\{(a_1,b_1)\}$. 以后在作事件运算时，要注意只能在同一试验下的事件之间才能进行运算.

习题 1.1

1. 掷一颗骰子试验，设事件A表示“骰子奇数点朝上”，事件B表示“骰子朝上点数小于3”. (1)写出该随机试验的样本空间Ω；(2)用样本点的集合表示事件$A,B,A\cup B,AB,A-B,\overline{A}$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

2. 用步枪射击目标3次，设A_i表示事件“第i次击中目标”($i=1,2,3$)，事件A表示“3次都击中目标”，事件B表示“3次中恰好只有一次击中目标”. 试用A_i的运算表示事件A,B.

3. 举例说明，A,B对立必互斥，互斥不一定对立.

§1.2　随机事件的概率

本节先从实验来认识频率的意义，并给出统计意义下概率的概念，再给出概率的公理化的定义，最后介绍几个典型的概率模型.

1.2.1　频率

投掷一枚硬币，到底正面向上的可能性有多大？历史上有许多对此问题有兴趣的人做过大量的试验，其中也不乏许多大数学家(见表1–1).

表1–1

试验者	抛掷次数	正面向上次数	正面向上的频率
德摩根(A. de Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲　丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
费希尔(Ronald Aylmer Fisher)	10000	4979	0.4979
皮尔逊(Karl Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊(Karl Pearson)	24000	12012	0.5006

从表1.1观察可得，不同的人和不同的试验中，正面出现的次数n_A占总试验次数n的比值为0.5左右.

定义 1.2.1　设在相同的条件下进行n次试验，如果事件A发生了n_A次，则称n_A为事件A发生的**频数**，并称$\frac{n_A}{n}$为事件A发生的**频率**，记作$f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由频率的定义，易得频率有如下基本性质.

性质 1.2.1　非负性：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

性质 1.2.2　规范性：$f_n(\Omega)=1$；

性质 1.2.3　有限可加性：若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n).$$

事件A的频率反映了事件A发生的频繁程度. 通过实践，人们发现当重复试验次数n很大时，事件A的频率总会在某个数值附近摆动，随机事件这一特性称为**频率的稳定性**.

例如，在投掷一枚匀称硬币试验中，当试验次数较大时正面向上的频率接近于数

0.5，这一规律已被数学家从理论上得到证明.

1.2.2　概率的统计定义

通过对某一事件在重复试验中出现的频率的研究，早期的数学家给出了概率的统计定义.

定义 1.2.2　在相同的条件下重复进行n次试验，如果当n无限增大时，事件A的频率$\frac{n_A}{n}$稳定在某一常数p附近，则称常数p为事件A在一次试验中发生的**概率**，记作

$$P(A)=p.$$

这里对事件A的概率用$P(A)$表示，类似于数学中“变量的函数”表达形式，它建立了样本空间子集与实数集$\{p|0\leqslant p\leqslant 1\}$的映射关系，为系统地建立概率论的理论体系提供了思想方法.

利用定义 1.2.2，可求事件A概率的近似值，即可以把大量的重复试验中事件A的频率作为事件A概率的近似值.

1.2.3　概率的公理化定义

在一个试验E中，我们给样本空间Ω中的每个事件A确定一个数$P(A)$，让该数表示事件A发生的可能性大小，称它为**事件A的概率**，并设定$P(A)$必须满足三个特定的公理. 这些公理能确保理解上与统计意义下的概率相一致，理论上满足严格的数理逻辑体系.

公理 1.2.1　非负性：$P(A)\geq 0$；

公理 1.2.2　规范性：$P(\Omega)=1$；

公理 1.2.3　可列可加性：若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是无穷可列个两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.$$

由概率的公理化定义直接可推得如下三个重要的性质.

性质 1.2.4　不可能事件的概率为零，即

$$P(\varnothing)=0. \tag{1.1}$$

性质 1.2.5　对任意n个互不相容事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.2}$$

性质 1.2.6　对于任意事件A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \tag{1.3}$$

下面来证明几个常用的性质.

性质 1.2.7　设事件A的对立事件为$\overline{A}$，则

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.4}$$

证　因为$A\overline{A}=\varnothing$，且$A\cup\overline{A}=\Omega$，则由公理 1.2.2 和性质 1.2.5 有

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

即得

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 1.2.8 如果$A\subset B$,则

$$P(A)\leqslant P(B). \tag{1.5}$$

证 由题设$A\subset B$,可得

$$B=\Omega\cap B=(A\cup\overline{A})\cap B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup(\overline{A}\cap B),$$

由于A与$\overline{A}\cap B$互不相容,所以

$$P(B)=P[A\cup(\overline{A}\cap B]=P(A)+P(\overline{A}\cap B),$$

即得

$$P(B)-P(A)=P(\overline{A}B),$$

由于$P(\overline{A}B)\geqslant 0$,因此

$$P(B)-P(A)\geqslant 0.$$

性质 1.2.9 对于任意事件A和B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.6}$$

(证明略).

例 1.2.1 一位患有咽喉炎和低烧的病人去诊所看病,经检查后,该患者的病症可能是病毒性感染引起或者是细菌性感染引起,或两者兼有之. 但医生认为该患者是病毒性感染引起的概率为0.4,是细菌性感染引起的概率为0.7,那么该患者是同时感染两者的概率是多少?

解 设A为该患者是病毒性感染引起之事件,得$P(A)=0.4$;B为该患者是细菌性感染引起之事件,得$P(B)=0.7$,即要求事件AB的概率.

由于$A\cup B=\Omega$,且由性质1.2.9得,

$$1=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-1=0.4+0.7-1=0.1,$$

即该患者同时感染两者的概率是0.1.

1.2.4 古典概型

1. 古典概型的概念

在概率论发展初期,人们主要研究如下随机试验概率模型.

定义 1.2.3 若随机试验满足以下两个特征:

(1)一次试验下只有有限个结果;

(2)每一个结果出现的可能性相等.

称这样的随机试验概率模型称为**等可能概率模型**,或称为**古典概型**.

古典概型具有简单、直观、易于理解的特点,许多实际问题属于古典概型问题.

例 1.2.2 一个口袋中有10个同样的小球,10个球上分别标有0至9个数码,随机取一个球,问恰好取到数码是0的可能性有多大?

解 由题设,我们可以把这个问题归纳为一个这样的随机试验:从10个球中随机取一个球的试验结果只有10个,即只有有限个结果;又从随机取一个球的假设,我们可

以认为每个球被取到的可能性是相等的,即这是一个古典概型问题. 由常识我们认为标有数码0的球被取到的可能性应该为$\frac{1}{10}$.

2. 古典概型的概率计算公式

若试验E是古典概型,设样本空间为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,其中$n(n>1)$为有限正整数,则基本事件$\{\omega_1\}$,$\{\omega_2\}$, $\cdots$,$\{\omega_n\}$两两互不相容,且

$$\Omega=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\},$$

由于$P(\Omega)=1$,且$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$,因此

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n}.$$

如果试验E下的一个事件A包含n个基本事件中的某$m(m\leqslant n)$个基本事件,即

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}\subset\Omega,i_1,i_2\cdots,i_m\in\{1,2,\cdots,n\},$$

则

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

即

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件个数}(m)}{\Omega\text{包含的基本事件总数}(n)}=\frac{m}{n}. \tag{1.7}$$

例1.2.3　一口袋中有白球6个,红球4个,现从中随机取出2个球,求

(1)取出的2个球都是白球的概率;

(2)取出的2个球恰好是1个白球1个红球的概率;

(3)取出的2个球中至少有1个是白球的概率.

解　由题设条件,这是一个典型的古典概型问题,根据组合数的计算,该试验总的基本事件数

$$n=C_{10}^2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45.$$

(1)设事件A为取出的2个球都是白球,则A包含的基本事件数

$$m_A=C_6^2C_4^0=\frac{6\times 5}{2\times 1}\times 1=15,$$

所以
$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

(2)设事件B为取出的2个球恰好是1个白球1个红球,则B包含的基本事件数

$$m_B=C_6^1C_4^1=6\times 4=24,$$

所以
$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}.$$

(3)设事件C为取出的2个球中至少有1个是白球,则C包含的基本事件数

$$m_C=C_6^1C_4^1+C_6^2C_4^0=6\times 4+\frac{6\times 5}{2\times 1}\times 1=39,$$

所以
$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{39}{45}=\frac{13}{15}.$$

由这个试验下事件A，B是互不相容的且$C=A+B$，得

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{8}{15}=\frac{13}{15}.$$

例 1.2.4 将三枚相同的硬币一起抛掷一次，求正好出现两个正面的概率.

解 三个硬币一起抛掷一次的试验下的基本事件数可根据排列组合知识得出为8个，若人为地区分这三个硬币，按次序用H表示正面，T表示反面，则这8个结果为：

$$HHH, THH, HTH, HHT, HTT, THT, TTH, TTT.$$

假设一枚硬币掷一次出现正面和反面的可能性相等，我们可以证明以上这8个结果也是等可能的，所以正好出现两个正面的事件包含THH，HTH，HHT共3个，由古典概型公式计算得正好出现两个正面的概率为$\frac{3}{8}$.

1.2.5 几何概型

古典概型给出了有限个离散样本点的样本空间上的概率计算问题. 根据古典概型计算概率的思想方法，我们可以考虑建立无限个样本点的样本空间上的概率计算问题.

定义 1.2.4 如果一个随机试验从一个有限度量的几何空间Ω中任取一点$\omega(\omega\in\Omega)$（如直线段、平面闭区域或立体空间取一个点），并假设所取的点在Ω中具有相同度量（如长度、面积、体积等）的任一子集内的可能性是一样的（即若m为Ω的度量，$\omega\in A\subset\Omega$，$\omega\in B\subset\Omega$，当$m(A)=m(B)$有$P(\omega\in A)=P(\omega\in B)$），则称这样的试验模型为几何概型.

例 1.2.5 假设向直线段$[0,10]$内随机投一个点，问：（1）该点恰好落在$[0,1]$内的可能性有多大？（2）该点恰好落在$[0,5]$内的可能性有多大？

解 由题设，我们可以把这个问题归纳为一个这样的随机试验：它的样本空间为$[0,10]$，由投点的随机性，可认为投在$[0,10]$内每个点的可能性相同，所投的点落在相同长度的集合内的概率是相等的，所以

（1）该点落在样本空间子集$[0,1]$的可能性应是$[0,1]$区间长度与$[0,10]$长度之比，即$\frac{1}{10}$；

（2）同理，该点落在样本空间子集$[0,5]$的可能性为$\frac{1}{2}$.

类似于古典概率的计算方法，可得几何概型中事件$A\subset\Omega$的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}\quad\left(P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)},\ m\text{为}\Omega\text{的度量}\right).\tag{1.8}$$

例 1.2.6（蒲丰（Buffon）投针实验） 在平面上画有等距离的平行线，平行线的距离为$a(a>0)$，向平行线内任意投一枚长度为$b(b<a)$的圆形针，试求此针与任一平行线相交的概率（见图 1–1）.

解　以x表示针投到平面上时，针的中点M到最近一条平行直线的距离，φ表示针与该直线的夹角，那么针落在平面上的位置可由(x,φ)完全确定．投针所有可能结果与矩形区域

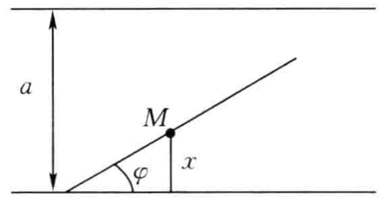

图 1–1

$$S=\{(x,\varphi)|0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2},0\leqslant \varphi\leqslant \pi\}$$

中的点一一对应．由投掷的随机性可知，这是一个几何概率问题．

所关心的事件A={针与某一平行直线相交}发生的充分必要条件是，S中的点满足

$$0\leqslant x\leqslant \frac{b}{2}\sin\varphi,0\leqslant \varphi\leqslant \pi .$$

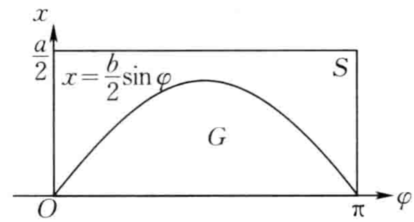

图 1–2

即

$$P(A)=\frac{\mu(G)}{\mu(S)}=\frac{G\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{b}{2}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{b}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{2b}{a\pi}.$$

由蒲丰投针试验得到的概率$P(A)=\dfrac{2b}{a\pi}$，具有重要的应用及意义．根据频率的稳定性，当投针试验次数n很大时，若测出针与平行直线相交的次数m，则频率值$\dfrac{m}{n}$即可作为$P(A)$的近似值代入上式，那么

$$\frac{m}{n}\approx\frac{2b}{a\pi}.$$

从而可从实验数据的统计角度计算圆周率π的近似值$\pi\approx\dfrac{2bn}{am}$.

历史上一些学者利用投针试验计算圆周率的结果（直线距离$a=1$），如表 1–2 所示。

表 1–2

试验者	时间	针长	投掷次数	相交次数	π的近似值
Wolf	1850	0.8	50000	2532	3.1596
smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

习题 1.2

1. 盒中装有 10 只外形相同的晶体管，其中有 4 只次品，6 只正品，现随机取四次测试，每次测试后不放回，求恰好四次都取到正品的概率.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com