高职高专数学系列新世纪规划教材

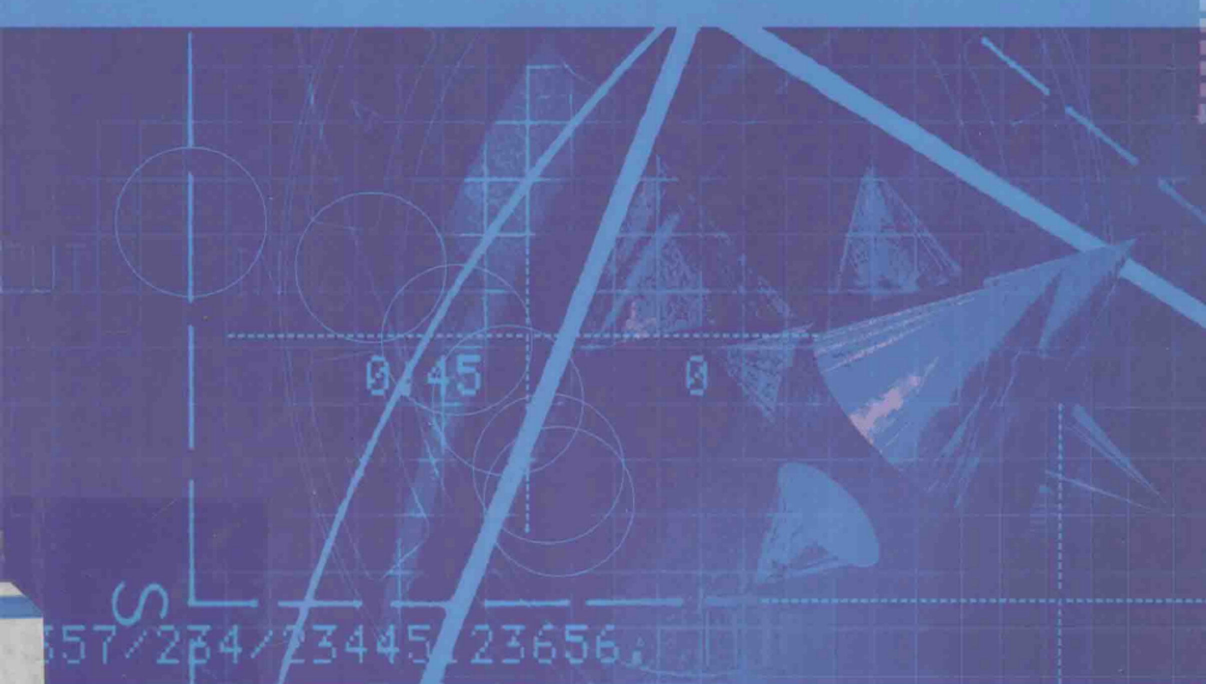
总主编 曾庆柏

DAXUE SHUXUE YINGYONG JICHU

大学数学应用基础

主编 邓新春 潘劲松

中册



湖南教育出版社

高职高专数学系列新世纪规划教材

DAXUE SHUXUE YINGYONG JICHU

大学数学应用基础

中册

总主编 曾庆柏
主　编 邓新春　潘劲松
副主编 喻　曦　曲建民　汪朝晖
唐宋成　郑文娟
主　审 阎　颖

湖南教育出版社

内容提要：

本书是高职高专新世纪规划教材，是根据《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲（非师范类）》编写的. 全书分上、中、下三册，本书是中册，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、微分方程、无穷级数等4章，书末附有部分习题的答案或提示.

本书将教材与辅导融为一体，一书两用. 每章末设“学习与指导”，例题、习题丰富，重点内容滚动复习，便于自学. 同时为让学生学会用计算机解题，每章后编有数学实验，解决了数学应用中的计算瓶颈。

本书适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可作为“专升本”考试培训教材，还可作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学应用基础／《大学数学应用基础》
曾庆柏主编. －长沙：湖南教育出版社，2004

Ⅰ.应... Ⅱ.曾... Ⅲ.高等数学－应用数学－基本
知识 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第054712号

大学数学应用基础（中册）

书　　名：大学数学应用基础（中册）
作　　者：曾庆柏（总主编）
责任编辑：蒋　芳

湖南教育出版社发行（长沙市韶山北路643号）

湖南省教育印刷厂印刷

787×960　16开　印张：13　字数：245,000

2004年6月第1版　　2004年6月第1次印刷

ISBN 7-5355-4229-8/G·4224
定价（上中下册）：59.80元

高职高专数学系列新世纪规划教材

编　委　会

参加讨论和编写的学校:

中南大学
长沙理工大学
湖南科技大学
湘潭大学职业技术学院
湖南省第一师范学校
湖南工业职业技术学院
湖南科技职业技术学院
湖南交通职业技术学院
湖南大众传媒职业技术学院
湖南生物机电职业技术学院
湖南工程职业技术学院
湖南城建职业技术学院
湖南铁道职业技术学院
湖南化工职业技术学院
湖南机电职业技术学院
湖南环境生物职业技术学院
湖南对外经济贸易职业学院
长沙民政职业技术学院
长沙航空职业技术学院
长沙通信职业技术学院
长沙环保职业技术学院
长沙商贸旅游职业学院
湘潭职业技术学院
衡阳职业技术学院
岳阳职业技术学院
常德职业技术学院
娄底职业技术学院
郴州职业技术学院
张家界航空工业职业技术学院

前　　言

本书是高职高专新世纪规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲（非师范类）》编写的. 全书分上、中、下三册，适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可作为“专升本”考试培训教材，还可作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书.

本书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率、数理统计初步、数学建模等.

各章内容分模块、分层次编排，用 * 号标注的内容为“专业模块”，供工科类和经济管理类专业选用；用小号字编排的内容为“难度模块”，供不同学习目标的学生选用；主要章节后编有数学实验，供教学时上机实验用；每章后编有学习指导和总复习题，在学习指导中，对各章典型例题和解题技巧做了综合讲解，可作为每章复习用，也是“专升本”考试复习的精要指南；第一册书末附有初等数学中的常用公式和希腊字母表，供学生学习时查用. 各册后附有部分习题的答案或提示，供学生学习时参考. 本书所配的教学光盘可以从湖南教育出版社网站（ftp://ftp.hneph.com/ftpdownload/）下载.

本书遵循高等教育的教学规律，坚持“以应用为目的，以必需够用为度，以可读性为基点，以创新为导向”的编写原则. 具有以下特色：

第一，针对现行普高和中职新数学教材体系编写，突出了初等数学与高等数学的紧密衔接. 普通高中和中等职业学校新数学教材体系中，幂函数、反三角函数、数学归纳法、极坐标等内容已大大弱化或删去，但向量等内容得到了充实，为了使学生从初等数学到高等数学顺利过渡，对传统高等数学中需要的初等数学内容进行了适当回顾、增补和删减，如在第一章函数部分增补了幂函数、反三角函数，在第七章二重积分部分增补了极坐标，在第六章向量与空间解析几何部分删减了部分向量内容等，使初等数学与高等数学衔接得更加紧密.

第二，针对现代教育以学生为主体的理念编写，有较强的可读性. 在引进数学概念时，尽量借助几何直观图形、物理意义和生活背景来进行解释，力使抽象的数学概念形象化、直观化、通俗化，切合学生的实际；为降低难度，在论证或解题时，设置了渐进式的思维层次，保留了合适的推理细节，一读就懂；对较难的概念，设置为

模块，学习时可忽略，而不影响系统性，如 $\varepsilon-N$ 语言，$\varepsilon-\delta$ 语言，微分中值定理的证明等，因此不会对学习产生障碍.

第三，针对高职高专各专业的实际编写，有较强的选择性. 高职高专教育专业繁多，且差异较大，为了适应各专业使用，对全部内容作了分层处理，选定各专业都必须使用的基本内容作为基本层，在此基础上用模块进行组装，构造不同层次，如在第一章中编写了“建立函数关系举例”和“经济中常用的函数”，在第二章中编写了“导数的经济意义”和“二阶导数的力学意义”模块等，使本书既适用于理工科类专业，也适用于经济管理类各专业，还适用于各类“专升本考试”培训，弹性大，可选择性强.

第四，针对高职高专的培养目标编写，有较强的实用性. 高职高专教育主要培养生产第一线的应用型高级技术人才，为了实现这一目标，本书在理论和计算方面降低了难度，但在数学的应用和使用现代信息技术手段方面进行了充实和强化. 编写了数学建模方面的内容，以培养学生用数学的意识；编写了数学实验，介绍了目前计算功能非常强大的 MATLAB 软件的使用方法，让学生学会用计算机解题，从而提高学生学习数学的兴趣，同时，将繁难的计算问题交给计算机完成，解决了数学应用中的计算瓶颈.

本教材的基本教学时数约 110 学时，标有 * 号的内容另行安排课时.

组成本套教材编委会的成员均来自国内著名高校及全国近三十所高职院校的具有丰富教学经验的教师，他们既深知我国高职高专教育的发展现状，又了解本学科教与学的具体要求，为保证编写质量，编委会对编写大纲进行了反复修改、讨论，并推选了一批教学水平高、又有长期教材编写经验的老师参与教材的编写和审定. 在本书的编审过程中，得到了各编审人员所在单位的领导的大力支持，并为本书的编写提出了许多有益的建议，谨在此表示衷心感谢. 吴双利老师为本教材的录入、校对作了大量工作，在此一并致谢.

由于成书仓促，编审人员水平有限，不足之处，请有关专家、学者及使用本书的老师指正. 我们诚恳地希望各界同仁及广大教师关注并支持这套教材的建设，及时将教材使用过程中遇到的问题和改进意见反馈给我们，以供修订时参考.

高职高专新世纪规划教材编写委员会

2004 年 3 月

目　　录

第六章　向量代数与空间解析几何

向量是解决许多数学、物理、力学及工程技术问题的有力工具. 本章我们将介绍向量的概念、向量的运算及空间解析几何的有关内容.

6.1　向量及其线性运算

1. 空间直角坐标系

要确定空间点的位置,就必须有一定的"参照物",这个参照物就是坐标系. 仿照平面直角坐标系,下面我们来建立空间直角坐标系.

在空间内取定一点 O,过点 O 作三条具有相同的长度单位,且两两互相垂直的数轴 x 轴,y 轴和 z 轴,这样就称建立了空间直角坐标系 $Oxyz$,点 O 称为**坐标原点**,x 轴,y 轴,z 轴统称为**坐标轴**,又分别叫**横轴**,**纵轴**和**竖轴**. 通常规定 x 轴,y 轴,z 轴的正向要遵循右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时,大拇指的指向是 z 轴的正向(图 6 - 1).

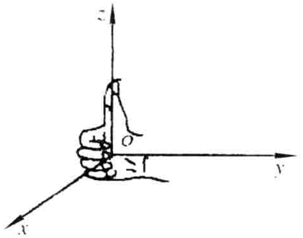


图 6 - 1

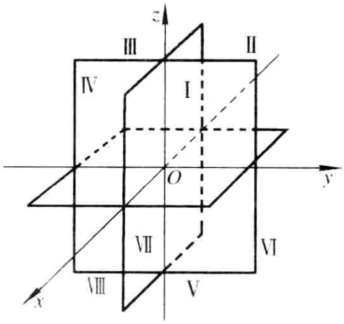


图 6 - 2

由任意两条坐标轴确定的平面称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴,y 轴和 z 轴,z 轴和 x 轴所确定的坐标面分别叫 xOy 面,yOz 面,zOx 面. 三个坐标面把空间分隔成八个部分(图 6 - 2),每个部分称为一个**卦限**. 在 xOy 面的上方有四个卦限,下方有四个卦限. 以 x 轴正半轴,y 轴正半轴,z 轴正半轴为棱的那个卦限称为第Ⅰ卦限,在 xOy 平面上方的其他三个卦限按逆时针方向依次称为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限,对分别位于Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限下面的四个卦限,依次称为第Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限.

建立了空间直角坐标系,就可以建立起空间内的点与数组之间的对应关系.

设点 M 是空间的一点,过点 M 分别作与三条坐标轴垂直的平面,分别交 x 轴、

y 轴和 z 轴于点 P,Q,R. 点 P,Q,R 叫做点 M 在坐标轴上的**投影**(图 6-3),设点 P,Q,R 在三条坐标轴上的坐标依次为 x,y,z,于是点 M 唯一地确定有序数组 x,y,z. 反之,给定有序数组 x,y,z,总能在三条坐标轴上找到以它们为坐标的点 P,Q,R. 过这三点分别作垂直于三条坐标轴的平面,三个平面必然交于点 M. 由此可见,点 M 和有序数组 x,y,z 之间存在着一一对应的关系. 有序数组 x,y,z 称为点 M **的坐标**,且依次称 x,y,z 之间的**横坐标**,**纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 x,y,z 的点 M 记作 $M(x,y,z)$.

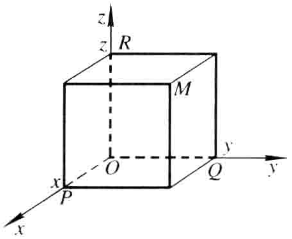


图 6-3

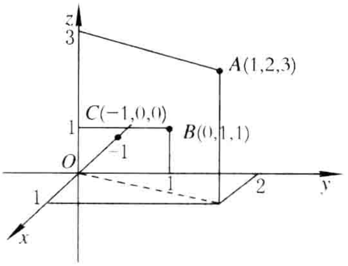


图 6-4

很明显,原点的坐标为 $O(0,0,0)$;x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$,y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$,z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$;xOy 平面上点的坐标为 $(x,y,0)$,xOz 平面上点的坐标为 $(x,0,z)$,yOz 平面上点的坐标为 $(0,y,z)$.

例 1 在空间直角坐标系中,标出下列各点的位置:$A(1,2,3)$,$B(0,1,1)$,$C(-1,0,0)$.

解 根据坐标与点的对应关系,描出各点如图 6-4 所示.

下面,我们来推导空间两点的距离公式. 设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点. 过点 M_1 和 M_2 分别作垂直于 x,y,z 的平面,这六个平面围成一个以 M_1,M_2 为对角线的长方体(图 6-5). 从图容易看到,该长方体的各棱长分别为

$$|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|,\ |z_2-z_1|.$$

根据立体几何知识,长方体的对角线长的平方等于三条棱长的平方和,于是有

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

所以点 M_1 和 M_2 间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别,点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

可以看到,上述空间两点的距离公式中,当 $z_1=z_2=0$ 时,就成为平面上两点的距离公式. 因此,空间两点的距离公式是平面两点距离公式的推广.

例 2 求证:以 $M_1(4,3,1)$,$M_2(7,1,2)$,$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

证 因为

$$|M_1M_3|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6},$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}.$$

所以 $|M_1M_3| = |M_2M_3|$，故三角形 $M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

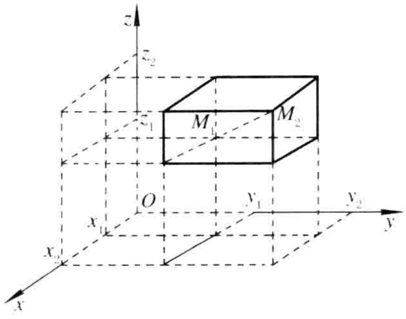


图 6-5

例 3　一动点 $M(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为定值 1，求动点的轨迹方程.

解　因为 $|MO| = 1$，所以根据两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = 1.$$

化简，得所求轨迹方程为

$$x^2+y^2+z^2 = 1.$$

2. 空间向量及其线性运算

我们已经学习过平面向量，有了空间直角坐标系，平面向量的相关知识都可以推广到空间向量.

与平面向量一样，在空间，我们把具有大小和方向的量叫作**向量**. 向量的大小称为向量的**模**，向量 $\mathbf{a}$ 的模记作 $|\mathbf{a}|$. 模为零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$，规定零向量的方向可以是任意的；模为 1 的向量称为**单位向量**.

在几何上，空间向量也用有向线段表示，并且方向相同、长度相等的有向线段表示同一向量或相等的向量. 起点为 M，终点为 N 的向量记作 $\overrightarrow{MN}$（图 6-6）.

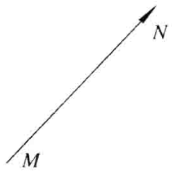


图 6-6

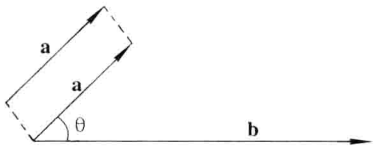


图 6-7

如果两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的模相等，且方向相同，则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等，记作 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

与平面向量一样，方向相同或相反的两个向量相互平行或重合，称为**共线向量**或**平行向量**，向量 $\mathbf{a}$ 平行于 $\mathbf{b}$，记作 $\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$. 由于零向量的方向是任意的，我们约定零向量与任何向量都平行.

设给定两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$，将向量 $\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 平移，使它们的起点重合（图 6-7），它们所在射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角，记作 $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$. 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 中有一个是零向量时，规定它们的夹角可在 $[0,\pi]$ 中任意取值. 当 $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \frac{\pi}{2}$ 时，就称向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直，记作 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. 同样，我们约定零向量与任何向量都垂直.

空间向量的加法、减法、数乘与平面向量的定义是相同的. 向量的加法、减法与数乘统称为**向量的线性运算**.

定义 1　将向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的起点放在一起，以向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**和向量**，记为 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$（图 6-8）. 这种

求向量和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

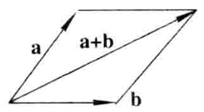


图 6 - 8

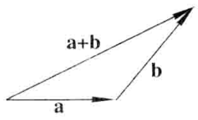


图 6 - 9

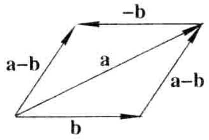


图 6 - 10

由于向量可以平移,所以,若把 **b** 的起点放到向量 **a** 的终点上,则自 **a** 的起点到向量 **b** 的终点的向量亦为 **a** + **b** 向量(图 6 - 9). 这种求向量的方法称为向量加法的**三角形法则**.

设 **a** 为一向量,与 **a** 的模相同而方向相反的向量叫作 **a** 的**负向量**,记作 - **a**. 因此,向量 **a** 与 - **b** 的和称为 **a** 与 **b** 的差,记作 **a** - **b**. 向量的减法也可按三角形法则进行,只要把 **a** 与 **b** 的起点放在一起,**a** - **b** 即是以 **b** 的终点为起点,以 **a** 的终点为终点的向量(图 6 - 10).

定义 2 数 λ 与向量 **a** 的乘积 $\lambda\mathbf{a}$ 是一个平行于 **a** 的向量,它的模是向量 **a** 的模的 $|\lambda|$ 倍,即 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$. 并规定,当 $\lambda > 0$ 时,$\lambda\mathbf{a}$ 与 **a** 的方向相同;当 $\lambda < 0$ 时,$\lambda\mathbf{a}$ 与 **a** 的方向相反;当 $\lambda = 0$ 时,$\lambda\mathbf{a}$ 为零向量.

同样,空间向量的加法、减法与数乘满足以下运算性质:

(1) **交换律** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;

(2) **结合律** $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \mu(\lambda\mathbf{a})$;

(3) **分配律** $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$;

平面向量共线的充要条件对空间向量也是成立的,即有

定理 向量 **b** 与非零向量 **a** 平行的充要条件是存在实数 λ,使

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}.$$

设 **a** 是一个非零向量,则与 **a** 方向相同的单位向量记作 $\mathbf{a}^\circ$,且

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

上式表明,求与 **a** 方向相同的单位向量 $\mathbf{a}^\circ$,只需用 **a** 的模的倒数乘以向量 **a**.

3. **向量的坐标表示**

如图 6 - 11,在空间直角坐标系中,分别与 Ox, Oy, Oz 轴方向相同的单位向量依次记作 **i**,**j**,**k**,**a** 是空间任意向量,作 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}$,点 M 在 Ox, Oy, Oz 轴上的投影依次为 P, Q, R. 如果点 M 的坐标为 (x, y, z),则

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i}, \overrightarrow{OQ} = y\mathbf{j}, \overrightarrow{OR} = z\mathbf{k}.$$

于是,由向量加法,有

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

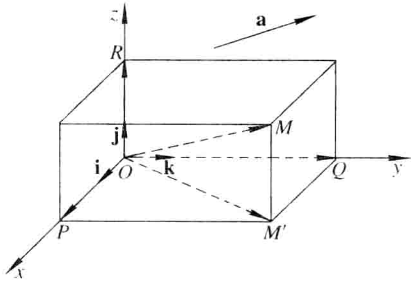


图 6 - 11

很明显,当向量 **a** 确定时,$\overrightarrow{OM}$ 唯一确定,从而唯一确定有序数组 (x, y, z);反之,给定有序数组 (x, y, z),又能唯一确定一个

向量$\overrightarrow{OM}$,从而唯一确定一个与$\overrightarrow{OM}$的大小相等且方向相同的向量 **a**. 所以,有序数组(x,y,z)与向量 **a** 之间存在着一一对应关系,可以用它来表示向量 **a**,记作

$$\mathbf{a}=(x,y,z).$$

上式称为向量 **a** 的**坐标表达式**,数 x,y,z 称为**向量 a 的坐标**,向量 $x\mathbf{i},y\mathbf{j},z\mathbf{k}$ 分别称为向量 **a** 在 x 轴,y 轴,z 轴的**分向量**.

与平面向量一样,空间向量的坐标运算有如下结论:

设 $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

(1) $\mathbf{a}=\mathbf{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$;

(2) $\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$;

(3) $\lambda\mathbf{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)(\lambda\in\mathbf{R})$;

(4) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

(5) $\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$;

(6) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$;

(7) $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

(8) $\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\ \dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

注意　上述第(5)式中,当某项分母为零时,应理解为相应的分子也为零.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,则以 M_1 为起点,以 M_2 为终点的向量(图 6 - 12)的坐标为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

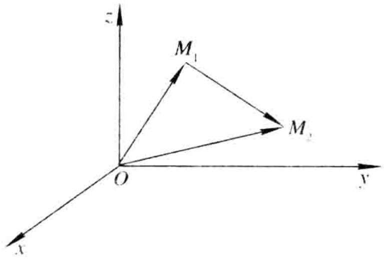


图 6 - 12

这就是说,一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

例 4　已知 $M_1(0,-1,2)$和 $M_2(1,0,3)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及与$\overrightarrow{M_1M_2}$方向相同的单位向量.

解　因为向量的坐标为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,0-(-1),3-2)=(1,1,1),$$

所以,向量的模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}.$$

与$\overrightarrow{M_1M_2}$方向相同的单位向量为

$$\frac{1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

例 5　设向量 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$,$\mathbf{b}=-2\mathbf{j}+\mu\mathbf{k}$,问数 λ,μ 为何值时,(1)**a** 与 **b** 平

行;(2)**a** 与 **b** 垂直.

解 (1)由 **a**//**b** 的充要条件,得

$$\frac{\lambda}{0}=\frac{4}{-2}=\frac{-3}{\mu},$$

即

$$\lambda=0,\frac{4}{-2}=\frac{-3}{\mu}.$$

所以

$$\lambda=0,\mu=\frac{3}{2}.$$

(2)由 **a**⊥**b** 的充要条件,得

$$\lambda\cdot 0+4\times(-2)+(-3)\times\mu=0.$$

于是,得 $\mu=-\frac{8}{3}$,λ 可取任意值.

例 6 已知三点 $A(-1,2,3)$,$B(1,1,1)$,$C(0,0,5)$,求 $\angle ABC$.

解 作向量$\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BC}$,则$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角就是 $\angle ABC$.

因为

$$\overrightarrow{BA}=(-1-1,2-1,3-1)=(-2,1,2),$$
$$\overrightarrow{BC}=(0-1,0-1,5-1)=(-1,-1,4),$$

所以

$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3,$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}=3\sqrt{2},$$
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-2)\times(-1)+1\times(-1)+2\times 4=9.$$

于是

$$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{9}{3\times 3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以

$$\angle ABC=\frac{\pi}{4}.$$

习题 6－1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点位置的特点:

A. $(0,-1,0)$; B. $(2,-2,0)$; C. $(5,0,-2)$;

D. $(3,0,0)$; E. $(0,3,-4)$; F. $(0,0,-7)$.

2. 已知点 $A(2,-1,1)$,则点 A 与 z 轴的距离是______,与 y 轴的距离是______,与 x 轴的距离是______.

3. 求点(2, -3, -1)关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 求点 $M_1(5,10,15)$ 到点 $M_2(25,35,45)$ 之间的距离.

5. 设 A,B 两点为 $A(4,-7,1)$, $B(6,2,z)$,它们之间的距离为 $|AB|=11$,求 z.

6. 求起点为 $A(1,2,1)$,终点为 $B(-19,-18,1)$ 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表达式及 $|\overrightarrow{AB}|$.

7. 把三角形 ABC 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4,再把各分点与点 A 连接,试以 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$, $\overrightarrow{D_4A}$.

8. 试用向量的线性运算证明:三角形两边中点的连线平行第三边且等于第三边的一半.

9. 求平行于 $\mathbf{a}=(1,1,1)$ 的单位向量.

10. 求 λ 使向量 $\mathbf{a}=(\lambda,1,5)$ 与向量 $\mathbf{b}=(2,10,50)$ 平行.

11. 求与向量 $\mathbf{a}=(1,5,6)$ 平行,模为 10 的向量 $\mathbf{b}$ 的坐标表达式.

12. 设向量 $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$,若它满足下列条件之一:(1) $\mathbf{a}$ 与 z 轴垂直;(2) $\mathbf{a}$ 垂直于 xOy 面;(3) $\mathbf{a}$ 平行于 yOz 面,那么它的坐标有何特征?

13. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$,它的终点坐标为 $B(2,-1,7)$,求它的起点坐标 A.

14. 已知向量 $\mathbf{a}=(6,1,-1)$, $\mathbf{b}=(1,2,0)$,求(1) $\mathbf{c}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}$;(2)与 $\mathbf{c}$ 平行的单位向量.

15. 设向量 $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$,求向量 $\mathbf{d}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}-2\mathbf{c}$ 在 $\mathbf{x}$ 轴和 $\mathbf{y}$ 轴上的分量.

16. 试确定数 m 和 n,使向量 $\mathbf{a}=-2\mathbf{j}+3\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b}=m\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 平行.

17. 设 $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$,求:

(1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$;(2) $\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>$;(3) $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$.

18. 设 $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=2$, $<\mathbf{a},\mathbf{b}>=\frac{\pi}{3}$,求:

(1) $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a}-5\mathbf{b})$;(2) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

19. 已知点 $A(1,-3,4)$, $B(-2,1,-1)$, $C(-3,-1,1)$,求 $\angle ABC$.

6.2　向量的向量积

先看一个实例:

如图 6-13,设 O 为一杠杆的支点,有一力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆的点 A 处.由力学知,力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$,它的模等于力的大小 $|\boldsymbol{F}|$ 乘以力臂 $|\overrightarrow{OP}|$,即

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{OP}|=|\boldsymbol{F}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cdot\sin<\boldsymbol{F},\overrightarrow{OA}>,$$

其中力臂 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|\sin<\boldsymbol{F},\overrightarrow{OA}>$;

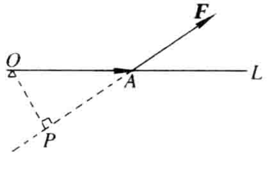


图 6-13

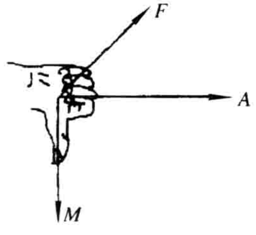


图 6-14

向量 $\boldsymbol{M}$ 的方向的规定为:$\boldsymbol{M}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{F}$ 和 $\overrightarrow{OA}$,且 $\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ 构成右手系,即当右手的四指指向 $\overrightarrow{OA}$ 的方向,握拳转向 $\boldsymbol{F}$ 时,大拇指所指的方向为力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向