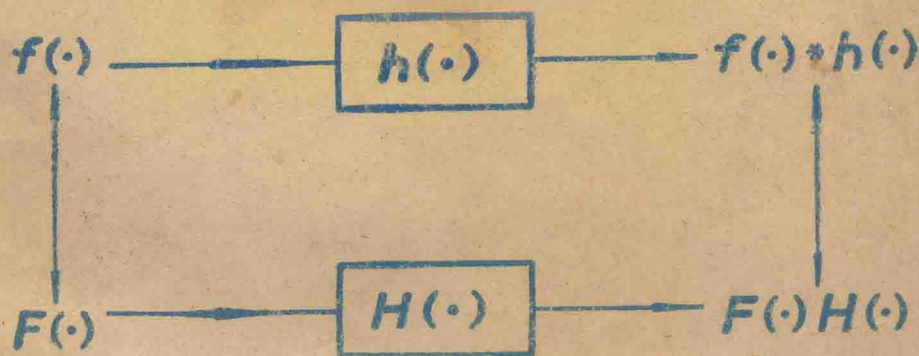


信号与系统分析

張有正 主編



信号与系统分析

張有正 主編

前 言

本书是我们为前几届研究生和本科学生讲授《信号与系统》时的讲稿，经整理、充实而成。我们把1980年6月成都会议所审定的教学大纲的主要内容分为六章叙述。它们是：绪论、时域分析、频域分析、复频域分析、离散系统分析、系统的状态变量分析。除基本内容以外，在各章中还适当增添了以下内容：信号与系统的等效概念；用算子法计算卷积；用微分冲击法计算付氏变换和拉氏变换；极限条件下的付氏变换以及系统状态的可控性和可观察性，等等。此外，数字信号处理虽然已超出本课程的范围，但由于它的日趋重要性，为此，也简单介绍了它的一些基本知识。在讨论了付氏变换、拉氏变换和 z 变换以后，我们还阐述了这三种变换的内在联系。需要特别指出的是，在拉氏变换和 z 变换中，我们试图以双边变换为主，而单边变换只是作为它的特例加以叙述。

总学时仍按100学时考虑。

本书由张有正主持编写，并亲自写了第一章。参加编写工作的有张庆孚（二、三章），闵大镒（四、五章），彭毅（六章）。全书经张有正反复审阅，修改定稿。由于时间仓促和水平有限，本书之缺点和谬误在所难免，恳请读者批评指正。

成电104教研室

1982年6月

目 录

第一章 緒論	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 系统的分类	(3)
一 动态系统与非动态系统	(3)
√二 线性与非线性系统	(3)
三 时变与时不变系统	(4)
四 离散系统与连续系统	(5)
1.3 信号的分类与分解	(6)
一 信号的分类	(6)
二 信号的分解	(7)
1.4 线性时不变系统	(7)
1.5 研究系统的方法	(8)
习题	(8)
第二章 时域分析	(10)
2.1 系统方程的算子表示法	(10)
一 算子的定义	(10)
二 算子的运算规则	(12)
三 联立微分方程组变量的消除	(13)
2.2 线性微分方程的解	(17)
2.3 零输入响应	(19)
一 一阶和二阶齐次方程的解	(19)
二 n 阶齐次方程的解	(20)
√三 用转移算子 $H(p)$ 求零输入响应	(21)
四 结论	(24)
2.4 单位冲击函数	(24)
一 冲击函数的引出	(25)
√二 单位冲击函数的几种定义	(25)
2.5 零状态响应	(29)
一 零状态响应的通式	(30)
二 系统的冲击响应	(33)
√2.6 卷积积分	(35)
一 卷积的定义	(35)
二 卷积的图解	(36)

✓ 三	卷积的积分限	(39)
四	用卷积计算 $y_1(t)$	(42)
五	卷积作为一种迭加积分	(42)
✓ 六	关于卷积存在性的讨论	(44)
2.7	卷积的运算	(46)
一	卷积代数	(46)
二	$f(t)$ 与 $\delta(t)$ 及其导数的卷积	(47)
三	卷积的微分和积分	(49)
✓ 四	用算子法计算卷积	(49)
2.8	卷积的数值算法	(53)
2.9	系统对指数信号的响应	(55)
✓ 一	系统对因指数信号的响应	(55)
✓ 二	系统对无时限指数信号 e^{st} 的响应	(56)
2.10	初始状态等效为信号源	(58)
	习题	(59)
附2A	部分分式展开	(65)
第三章	频域分析	(69)
3.1	频域分析基础	(69)
一	信号分析中的指数信号	(69)
二	正交函数	(71)
3.2	周期信号的分解——付里叶级数	(73)
一	三角函数付里叶级数	(73)
✓ 二	指数函数付里叶级数	(74)
✓ 三	函数的对称性与付里叶系数的关系	(77)
✓ 四	函数的时移对付里叶系数的影响	(78)
✓ 五	利用冲击计算付里叶系数	(80)
3.3	周期信号的频谱	(82)
一	周期矩形脉冲信号的频谱	(82)
二	周期单位冲击信号的频谱 $\omega_0 \delta(\omega - n\omega_0)$	(84)
三	周期信号的功率	(85)
3.4	非周期信号的频谱分析——付里叶变换	(86)
一	从付里叶级数到付里叶积分	(86)
二	频谱函数 $F(j\omega)$ 的物理意义及其性质	(88)
三	付里叶变换的存在性	(90)
3.5	一些常用函数的付里叶变换	(90)
一	绝对可积函数的付里叶变换	(90)
二	非绝对可积函数的付里叶变换	(92)
3.6	付里叶变换的性质和定理	(97)
一	线性	(97)

二	尺度变换(反比特性)	(97)
三	时移特性	(98)
四	频移特性(调制定理)	$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(j\omega - \omega_0)$ (99)
五	对称性	$F(j\omega) \leftrightarrow 2\pi f(-t)$ (100)
六	卷积定理	(100)
七	能量定理	(102)
八	时域的微分和积分	(102)
九	频域的微分	(104)
3.7	极限条件下的付里叶变换	(105)
一	极限条件下付里叶变换的另一种表示法	(106)
二	用微分冲击法计算极限条件下的 $F(j\omega)$	(108)
3.8	线性系统的付里叶分析	(110)
一	系统对周期输入的响应	(110)
二	用付里叶变换求零状态响应	(111)
三	关于付里叶变换用于 $H(p)$ 系统的讨论	(111)
四	系统概念的推广	(113)
3.9	信号通过理想低通滤波器及无失真传输系统	(114)
一	理想低通滤波器的响应	(114)
二	无失真传输系统	(118)
3.10	取样定理	(119)
一	时域取样	$F_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum F(j\omega - m\omega_s)$ (119)
二	时域取样定理	(121)
三	频域取样及频域取样定理	(122)
	习题	(124)
第四章	复频域分析	(134)
4.1	引言	(134)
4.2	双边拉氏变换与单边拉氏变换	(134)
一	从付氏变换到拉氏变换	(134)
二	单边拉氏变换	(135)
三	拉氏变换的存在性	(135)
四	拉氏变换的物理解释	(138)
4.3	一些信号的拉氏变换	(138)
一	几种因信号的拉氏变换	(138)
二	反因信号的拉氏变换	(140)
4.4	拉氏变换的一些基本性质	(143)
一	线性性	(143)
二	尺度变换性	(144)
三	时移特性	(144)
四	频移特性	(145)

五	时间卷积	(146)
六	复频率卷积	(147)
七	时域微分	(152)
八	时域积分	(152)
九	单边拉氏变换的时域微(积)分性质	(153)
十	始值和终值	(156)
4.5	拉氏(正)变换与拉氏反变换的计算	(157)
一	拉氏(正)变换的计算	(158)
二	拉氏反变换的计算	(161)
4.6	系统的复频域分析	(165)
一	无时限指数信号通过系统	(165)
二	用单边拉氏变换分析系统	(166)
三	用双边拉氏变换分析系统	(167)
4.7	时域和频域分析法评述	(167)
4.8	系统的方框图表示与信流图	(169)
一	多端输入输出系统	(169)
二	系统的方框图表示	(170)
三	系统的信流图表示	(171)
四	名词的定义	(172)
五	信流图分析 梅森规则	(172)
4.9	系统的模拟	(175)
一	模拟所用的基本器件	(175)
二	初始状态为零的微分方程模拟	(176)
三	初始状态不为零的微分方程模拟	(181)
4.10	系统转移函数中的零、极点	(182)
难	一 零、极点位置与时域特性的关系	(183)
	二 零、极点位置与频域特性的关系	(184)
	三 波特图	(189)
4.11	系统的稳定性	(190)
难	一 稳定的概念	(190)
	二 系统稳定性的定义和检验	(191)
	三 罗兹——胡维茨准则	(191)
	四 $R-H$ 准则的阵列形式	(192)
	五 特殊情况的处理	(194)
	习 题	(197)
附4A	复变函数的积分	(204)
第五章	离散系统分析	(216)
5.1	引言	(216)
一	离散时间信号——序列	(216)

二	几种常用的离散信号	(219)
三	离散时间系统	(221)
5.2	离散系统的数学模型	(221)
一	差分及差分方程	(222)
二	线性位移不变系统数学模型举例	(222)
5.3	离散系统的转移算子	(224)
一	定义	(224)
二	离散系统的算符方程式	(225)
5.4	离散系统的时域分析	(226)
一	系统的零输入响应 $y_x[k]$	(227)
二	系统的零状态响应 $y_t[k]$	(228)
三	无时限指数信号输入时的响应	(238)
四	双边信号输入时的响应	(240)
5.5	Z 变换	(241)
一	Z 变换的定义	(242)
二	单边 Z 变换的闭合形式	(245)
三	某些因序列的 Z 变换	(247)
四	反因序列的 Z 变换	(249)
五	付氏变换、拉氏变换与 Z 变换的关系	(251)
5.6	反 Z 变换	(252)
一	定义	(252)
二	反 Z 变换的计算	(252)
5.7	Z 变换的一些性质	(257)
一	线性性	(257)
二	位移特性	(258)
三	尺度变换特性(序列指数加权)	(260)
四	时域卷积定理	(260)
五	始值和终值	(262)
六	Z 域卷积定理	(263)
5.8	离散系统的 Z 变换法分析	(264)
一	利用 Z 变换解差分方程	(264)
二	$H(z)$ 的零、极点分布对系统特性的影响	(267)
三	离散系统的稳定性	(273)
5.9	离散系统的模拟	(275)
5.10	用离散系统来处理信号	(277)
一	用离散系统处理模拟信号	(277)
二	数字滤波器	(281)
5.11	混合系统	(284)
一	取样器与保持电路	(284)

二 混合系统的 Z 转移函数	(287)
三 在相邻取样时刻的响应: 修正 Z 变换	(291)
习 题	(295)
第六章 系统的状态变量分析	(300)
6.1 系统的状态空间描述	(309)
一 基本定义	(300)
二 状态方程和输出方程及其矩阵表示法	(301)
三 多输入和多输出系统的状态方程和输出方程	(303)
6.2 连续时间系统状态方程和输出方程的建立	(304)
一 用直观法列写状态方程	(304)
二 用信号流图或方框图列写状态方程和输出方程	(305)
三 n 阶系统的信号流图及状态方程和输出方程	(308)
四 多输入多输出系统的信号流图和状态方程	(313)
6.3 连续时间系统状态方程和输出方程的求解	(315)
一 状态向量微分方程和输出方程的复频域解法	(315)
二 状态向量微分方程和输出方程的时域解法	(318)
三 连续时间系统状态方程的数值解法	(330)
6.4 离散时间系统的状态变量分析	(332)
一 离散时间系统状态方程和输出方程的建立	(332)
二 离散时间系统状态方程和输出方程的 Z 域和时域解法	(334)
6.5 取样数据系统的状态变量分析	(339)
一 用离散时间系统模型分析取样数据系统	(339)
二 用连续时间系统模型分析取样数据系统	(342)
6.6 状态向量的线性变换	(345)
一 在线性变换下的状态向量微分方程和输出方程	(345)
二 在线性变换下系统的特征值和转移函数	(357)
三 A 矩阵的对角化	(348)
四 用 A 矩阵的特征值判定系统的稳定性	(350)
6.7 系统状态的可控性和可观察性	(351)
一 系统状态的可控性	(351)
二 系统状态的可观察性	(357)
三 用系统转移函数矩阵 $H(s)$ 来判定其状态的可控性和可观察性	(360)
习 题	(362)

第一章 緒 論

1.1 引 言

信号和系统是两个相互联系而又互有区别的研究对象。信号是运载信息（如语言、音乐、图象、数据等）的工具，在数学上表示为一个（或多个）自变量的函数^①。通常采用时间 t 作自变量（虽然它可能并不一定就代表时间），于是信号表示为 $f(t)$ 、 $y(t)$ 等。系统则是产生、传输或处理信号的客观实体，如通信系统、雷达系统、计算机系统等，甚至一个城市、一个社会都可以看作系统。在数学上，常用表征其运动特性的数学模型来表示系统。例如用算符 L 表示系统。系统和系统之间通过信号来联系，信号则在系统之间及系统内部流通，系统和信号互相依存。有时，还可以将系统的概念加以推广，如把信号也看成某一特定的系统。今后会看到，这样的处理往往是非常有用的。

一个系统常常可分解为若干互相影响（作用）的子系统；另一方面，许多系统相互联系，它们合在一起又构成一个更大的系统。

可以用各种各样的方法对信号和系统进行分类。譬如，根据信号的物理属性不同，可以将信号分为电的、光的、声的、机械的等等；与之对应，把产生、传输和处理这些信号的系统也分为上述这些类型。也可以按用途不同，区分成为上述的通信系统、雷达系统，等等。但是，用数学模型来分类更为有利，这便于从理论上对信号和系统进行探索研究。譬如有些系统，不论它们是电的、机械的、声的或别的什么，外观和结构怎样千差万别，只要表达这些系统的数学模型相同，那末从本质上看，它们必然具有相同的动态特性。把这一数学方程送入电子计算机，再在不同的条件下求得其解答，这些解答就必然适合于上述任何一种系统。

对于一个只有单个输入和单个输出的简单系统，如果我们只需研究其外部特性，则可以用图 1.1-1 所示的方框图来表示。

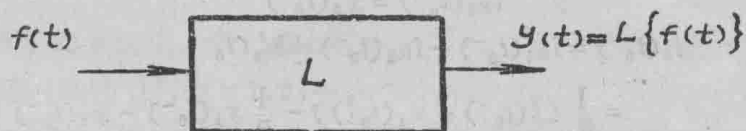


图1.1-1

其中 $f(t)$ 为输入（也称激励）， $y(t)$ 为输出（也称响应）， L 代表一种算符，也称转移算子，它把输入 $f(t)$ 通过一定方式的运算，变换成响应 $y(t)$ 即

$$y(t) = L\{f(t)\} \quad t \geq t_0 \quad (1.1-1a)$$

这样，当已知 $f(t)$ 及 L 后，便可以由式 (1.1-1)，求出从某一感兴趣的时刻 t_0 开始的系统的响应来。

容易理解，要求给出 t 以前全部时间里，即 $(-\infty, t)$ ，作用于系统的输入可能是不现

① 本书只研究一维信号，即只有一个自变量的信号。

实的。一个可行的方案是给出 $t \geq t_0$ 时的 $f(t)$ (当 $t < t_0$ 时, $f(t) = 0$) 及 t_0 稍前一瞬间 (记为 t_0^-) 系统的状态, 即可算出 $t \geq t_0$ 时的 $y(t)$ 。系统在 t_0^- 的状态可以用几个数值来表明, 如 $x_1(t_0^-), x_2(t_0^-), \dots, x_n(t_0^-)$, 常简写为 $\{x_j(t_0^-)\}$, $j = 1, 2, \dots, n$ 。若 $t_0 = 0^-$, 则状态为 $\{x_j(0^-)\}$ 。于是式 (1.1-1a) 可改写为

$$y(t) = L[\{x_j(0^-)\}, f(t)] \quad t \geq 0 \quad (1.1-1b)$$

其中 $\{x_j(0^-)\}$ 称为系统的初始状态。 n 是系统的阶数。状态的定义及更进一步讨论可参见第六章和第二章的有关内容。下面仅举一个电系统作为例子来说明状态的意义。

如图 1.1-2 所示的电系统, 容易证明, 如果 $t \geq 0$ 时的输入 $f(t)$ 已知, 则某时刻 t_0^- 电容 C 上的电压 $x_1(t_0^-) = u_c(t_0^-)$ 及电感 L 中的电流 $x_2(t_0^-) = i_L(t_0^-)$ 已知后, 那末这个系统

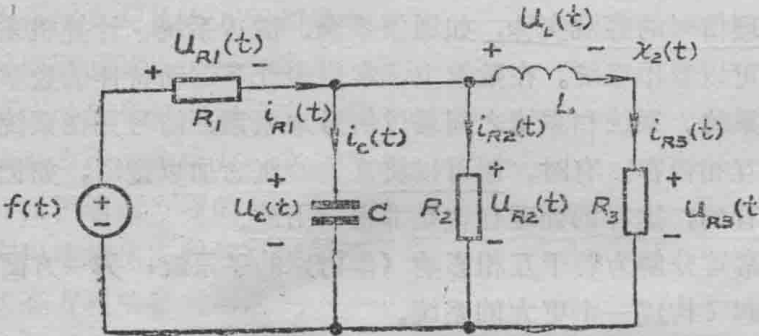


图 1.1-2

在该时刻 t_0^- 的全部电压和电流就都可以求出。因为

$$\begin{aligned} u_{R1}(t_0^-) &= f(t_0^-) - x_1(t_0^-) \\ i_{R1}(t_0^-) &= \frac{1}{R_1} [f(t_0^-) - x_1(t_0^-)] \\ i_{R2}(t_0^-) &= \frac{1}{R_2} x_1(t_0^-) \\ u_{R2}(t_0^-) &= x_1(t_0^-) \\ i_{R3}(t_0^-) &= x_2(t_0^-) \\ i_c(t_0^-) &= i_{R1}(t_0^-) - i_{R2}(t_0^-) - x_2(t_0^-) \\ &= \frac{1}{R_1} [f(t_0^-) - x_1(t_0^-)] - \frac{1}{R_2} x_1(t_0^-) - x_2(t_0^-) \\ u_{R3}(t_0^-) &= R_3 \cdot x_2(t_0^-) \\ i_{R3}(t_0^-) &= x_2(t_0^-) \\ u_L(t_0^-) &= x_1(t_0^-) - u_{R3}(t_0^-) = x_1(t_0^-) - R_3 \cdot x_2(t_0^-) \end{aligned} \quad (1.1-2)$$

其中 $x_1(t_0^-), x_2(t_0^-)$ 就称为此电系统在 t_0^- 时刻的状态。

系统在时刻 t_0^- 的状态 $\{x_j(t_0^-)\}$ 虽然是唯一的, 但是决定系统在时刻 t_0^- 的状态的方法却不唯一。如图 1.1-2 所示系统, 容易证明: $\{i_L(t_0^-), u_L(t_0^-)\}, \{i_c(t_0^-), u_L(t_0^-)\}, \{u_{R1}(t_0^-), u_L(t_0^-)\}, \{i_c(t_0^-), u_{R3}(t_0^-)\}, \{i_c(t_0^-), u_c(t_0^-)\}$ 等都可以规定为系统在 t_0^- 时刻的状态。因为只要知道其中的任意一组, 其余各组均可由此算出。

系统在 t_0 时刻的状态说明系统在该时刻的贮能, 它应该只反映系统贮能的情况而与 $f(t_0)$

无关。在上例中，若用 $v_{R1}(t_0)$ 、 $v_L(t_0)$ 来描述系统的状态就显然不合适，因为 $v_{R1}(t_0) = f(t_0) - x_1(t_0)$ ，它与 $f(t_0)$ 有关。为了避开 $f(t_0)$ 的影响，我们可以令当 $t < t_0$ 时， $f(t) = 0$ ，即 $f(t_0^-) = 0$ 。因此， $\{v_{R1}(t_0^-), v_L(t_0^-)\}$ 与 $f(t_0)$ 无关。这就是我们用 $\{x_j(t_0^-)\}$ 而不用 $\{x_j(t_0)\}$ 来描述系统状态的原因。由于 t_0 与 t_0^- 只差一个无穷小时间间隔，系统在 t_0^- 时刻的状态就是在 t_0 时刻的状态。

1.2 系统的分类

前已指出，我们将按系统的数学模型来对之进行分类。而且为了方便，今后我们仅以电系统作为分析的具体例子，此时信号就是电压或电流。显然，这样的假设，并不丧失研究问题的一般性。

一、动态系统与静态系统

如果系统在时刻 t_0 的响应 $y(t_0)$ 不仅与 $f(t_0)$ 有关，而且与 t_0 以前〔即 $(-\infty, t_0)$ 区间〕的输入有关，这种系统称为动态系统或记忆系统。实际上， $f(t)$ 在 $(-\infty, t_0)$ 区间对于系统的总贡献，就可归结为系统在 t_0^- 时的状态 $\{x_j(t_0^-)\}$ 。

若 $y(t_0)$ 只与 $f(t_0)$ 有关而与区间 $(-\infty, t_0)$ 的 $f(t)$ 无关，这种系统称为静态系统或无记忆系统。这种系统显然无状态可言，因此 $y(t)$ 与 $f(t)$ 之间只有简单的函数关系，即

$$y(t) = \phi\{f(t)\} \quad (1.2-1)$$

其中 ϕ 不是一种运算符号而是某函数的符号。一个由纯电阻构成的网络，不论这些电阻是普通的线性电阻或者是特殊的非线性电阻，网络都属于静态系统。若网络中还包含有储能元件电感或电容，则不管这些储能元件是线性的还是非线性的，网络都属于动态系统。

通常，描述动态系统的方程 (1.1-1) 是一个（或一组）微积分方程，它的阶数就是系统的阶数。可以证明，对电系统来说，独立电感、电容的总个数，就是系统的阶数，在时刻 t_0 ，这些电容上的电压 $v_c(t_0^-)$ 和电感中的电流 $i_L(t_0^-)$ ，就可以充当系统在 t_0 时的状态。

二、线性与非线性系统

在图 1.1-1 所示的系统中，若已知：

(1) 初始状态 $\{x_j(0^-)\}$ ， $j = 1, 2, \dots, n$

(2) $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ ， $t \geq 0$

并设其它因素均为零时，状态值 $x_1(0^-)$ 单独所引起的系统响应为 $y_{x1}(t)$ ，

记为 $x_1(0^-) \longrightarrow y_{x1}(t)$ ， $t \geq 0$

同样 $x_2(0^-) \longrightarrow y_{x2}(t)$ ， $t \geq 0$

.....

$x_n(0^-) \longrightarrow y_{xn}(t)$ ， $t \geq 0$

且设输入分量 $f_1(t)$ 单独所引起的响应为 $y_{f1}(t)$ ，

记为 $f_1(t) \longrightarrow y_{f1}(t)$ ， $t \geq 0$

及 $f_2(t) \longrightarrow y_{f2}(t)$ ， $t \geq 0$

则，对于线性系统来说，必然有

$$y(t) = \sum_{j=1}^n y_{xj}(t) + \sum_{j=1}^n a_j y_{fj}(t), \quad t \geq 0$$

$$= f_x(t) + y_f(t)$$

(1.2-2)

其中 $y_x(t)$ 称为系统的 **零输入响应**，它是响应中完全由状态所引起的那一部分分量； $y_f(t)$ 称为系统的 **零状态响应**，它是响应中完全由输入所引起的那一部分分量。 $y(t)$ 称为系统的全响应。反之，不满足式 (1.2-2) 的系统，则称为**非线性系统**。

式 (1.2-2) 说明，一个线性系统必须同时具备分解性、零输入线性性和零状态线性性。这是线性性质的合乎逻辑的结果。众所周知，数学上的所谓线性性意味着**比例性和叠加性**这两个性质：(1) 如果 $f_1(t) \rightarrow y_{f1}(t)$ ，

则 $af_1(t) \rightarrow ay_{f1}(t)$ 。这种性质叫比例性。(2) 如果 $f_1(t) \rightarrow y_{f1}(t)$ ， $f_2(t) \rightarrow y_{f2}(t)$ ，

则 $f_1(t) + f_2(t) \rightarrow y_{f1}(t) + y_{f2}(t)$ 。这种性质叫做叠加性。由于线性系统中，把状态 $\{x_j(0^-)\}$ 也当作一种原因，所以说它必须具有上述三种性质。由于线性系统必须满足 (1.2-2) 式因此下面四个式子所描述的就都不是线性系统。

$$(1) \quad y'(t) = \log x(0^-) + f^2(t) + 5y(t)$$

$$(2) \quad y''(t) = y'(t)y(t) + x_1(0^-) + x_2(0^-) + \log f(t)$$

$$(3) \quad y(t) = x^2(0^-) + \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$(4) \quad y'(t) = f(t)y(t) + 3x(0^-)$$

一个网络，若只有线性电阻、线性电容、线性电感（一般平时所用的电阻、电容、电感，都可视为线性或近似线性）以及其它线性元件，则该网络就可以看作是一个线性系统。若其中含有一个或几个非线性元件，它就属于非线性系统。在自然界中，严格的、绝对的线性系统是不存在的。我们所谓的线性系统，往往是指在一定条件下，可以近似地看作线性系统。

三、时变与时不变系统

如果某系统的初始状态为 $\{x_j(0^-)\}$ ， $j=1,2,\dots,n$ ，其 $t \geq 0$ 的输入为 $f(t)$ ，这时系统的响应已求出为 $y(t)$ [见图 1.2-1a]，则如果该系统是时不变系统，那末当改变初始时刻为 t_0^- 而保持初始状态不变时，即 $\{x_j(0^-)\} = \{x_j(t_0^-)\}$ ，若 $t \geq t_0$ 的输入等于 $f(t-t_0)$ ，系统的响应必定为 $y(t-t_0)$ [见图 1.2-b]。

系统的时不变性说明系统内部的所有参数与时间无关，因此又称它为**恒参系统**。对于时不变的动态系统，当系统在 $t=0$ 时的状态等于 $t=t_0$ 时的状态时，即若

$$\{x_j(0^-)\} = \{x_j(t_0^-)\}$$

$$\text{又} \quad y(t) = L\{f(t)\}$$

$$\text{则} \quad y(t-t_0) = L\{f(t-t_0)\} \quad (1.2-3)$$

反之，不满足 (1.2-3) 式的系统则属于时变系统。当式 (1.2-3) 是微积分方程时，这个方程的全部系数应均为常数。

倘若系统内部的参数有一个或几个随时间而变化，它就是时变系统，也称**变参系统**。这时若其数学模型是微积分方程，其系数就不全是常数而有一些是时间 t 的函数。在一个网络中，若所有的电阻、电容、电感以及其它元件的值均不随时间而改变，则不论它们是线性的

还是非线性的，这个网络属于时不变系统，否则就是时变系统。

在自然界中，严格的、绝对的时不变系统也是不存在的。我们所指的时不变系统，其实是在一定条件下，近似地可看作时不变的系统。

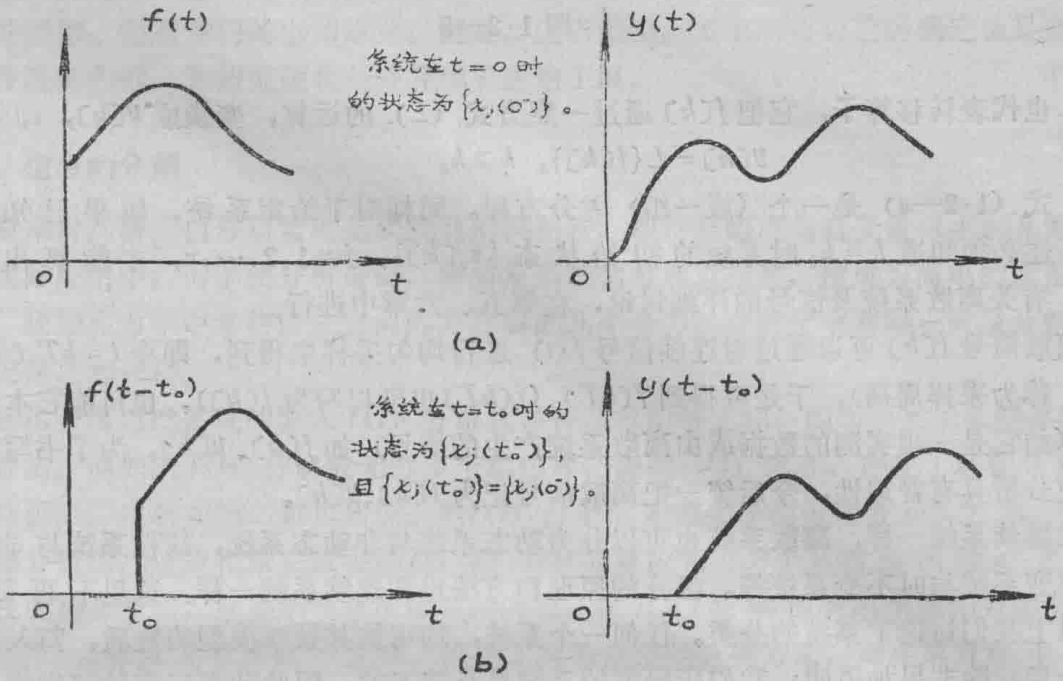


图1.2—1

四、离散系统与连续系统

迄今我们所讨论的都是连续时间系统（简称连续系统），与之相联系的是连续时间信号（简称连续信号）。此外，还有一种所谓离散时间系统（简称离散系统），与之相联系的则是离散时间信号（简称离散信号）。数学上，离散信号用按次序排列的数字序列 $f[k]$ 、 $y[k]$ 来表示，宗量 k 是整数。 $f(t)$ 与 $f[k]$ 的区别可由图 1.2—2 看出来。

对于一个简单的单输入 $f[k]$ 、单输出 $y[k]$ 的系统，若只从其外部进行研究，也可以用方框图（1.2—3）来表示。

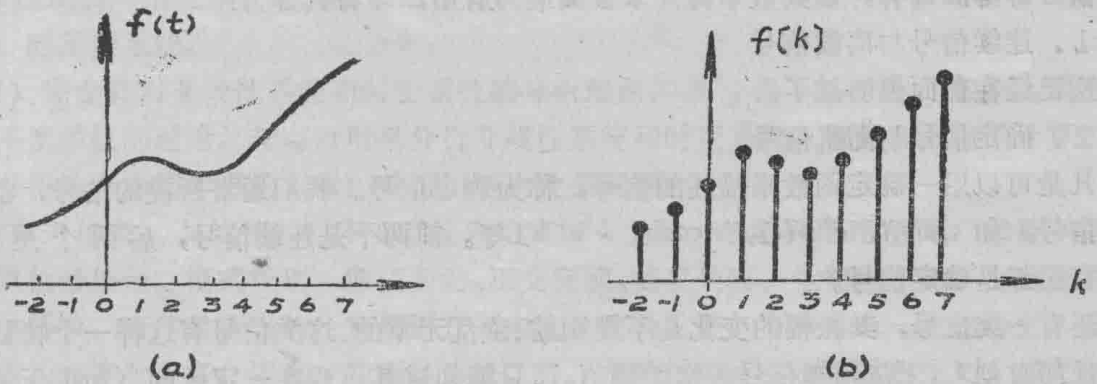


图 1.2—2



图 1.2-3

其中 L 也代表转移算子，它把 $f[k]$ 通过一定方式 (L) 的运算，变换成 $y[k]$ ，即

$$y[k] = L\{f[k]\}, k \geq k_0 \quad (1.2-4)$$

通常，式 (1.2-4) 是一个 (或一组) 差分方程。同样对于给定系统，如果已知 $k \geq k_0$ 的 $f[k]$ ，还必须知道 $k = k_0$ 时系统的初始状态 $\{x_j[k]\}$ ， $j = 1, 2, \dots, n$ ，才能算出 $k \geq k_0$ 的 $y[k]$ 。有关离散系统及信号的详细讨论，在第五、六章中进行。

离散信号 $f[k]$ 可以通过对连续信号 $f(t)$ 进行均匀采样来得到，即令 $t = kT$ (T 为固定常数，称为采样周期)，于是可得到 $f(kT)$ ($f(kT)$ 也可以写为 $f[k]$)。也可能它本身就是离散的 (如它是一串实测的数据或由离散系统产生的信号) 如 $f[k]$ 、 $y[k]$ 。为了书写简单，更为了使分析具有普遍性，今后统一把离散信号记为 $f[k]$ 、 $y[k]$ 。

和连续系统一样，离散系统也可以分为动态系统与非动态系统，线性系统与非线性系统，时变系统与时不变系统等。区分的原理和方法也和连续系统一样，这里不再赘述了。

以上我们讨论了系统的分类。任何一个系统，均可按其数学模型的性质，归入适当的类别。今后，除非另加说明，我们所研究的系统总是动态的，因此动态二字就可省略。有时，系统的类别不言自明，就简称系统，不再冠以详细的类别称呼。

1.3 信号的分类和分解

一、信号的分类

和系统一样，信号也有各种各样的分类方法。譬如可以分为雷达信号、通信信号、遥测信号…等等；也可以分为电信号、光信号…等等。此外还可按其内在的对称性质分为奇信号、偶信号与非对称信号；可从功率与能量的观点分为功率信号 (功率有限) 和能量信号 (在 $-\infty < t < \infty$ 内能量有限)；可从信号是否有周期性规律分为周期信号、非周期信号和概周期信号等等。同样，以其数学特征来分类最为有用，即将其分为：

1. 连续信号与离散信号

这已经在前面说明过了。

2. 确定信号与随机信号

凡是可以由一确定函数来描述的信号，称为确定信号。我们通常所说的信号，都假定是确定信号，如 $\sin \omega_0 t$ ， $e^{\sigma t} u(t)$ ， $A \cos k$ ， $k^2 u[k]$ 等。前两个是连续信号，后两个是离散信号，它们都是确定信号。

还有一类信号，其振幅的变化是不规则的、杂乱无章的。这类信号有这样一个特征：在未来的任何时刻 t_0 ，无法预知信号振幅的确值，而只能知道其出现在一定区间 (如电压值的某一范围) 的概率。这种信号称为随机信号。由电子器件所产生的噪声，就属于这种随机信号。实际上，严格的确定信号是不存在的，信号一经产生，它就处于噪声的包围之中，更何况在

产生信号的过程中, 它还必然随时被噪声所污染。因此, 我们实际上碰到的往往是确定信号与随机信号的叠加, 甚至完全是随机信号 (如随机信号的测量)。由于随机信号处处存在, 而且对确定信号形成干扰, 这就是我们需要对随机信号加以研究的原因。

本书作为基础, 为了突出最基本的内容, 仅限于研究确定信号, 随机信号的特性及其通过系统的问题, 另有专门的书籍研究。但是, 应当指出, 本书所要讨论的确定信号通过线性系统所涉及的内容, 为研究随机信号提供了理论工具。

二、信号的分解

一般来讲, 研究信号重要的是研究其时间特性, 即信号幅度与自变量 (t 、 k 等) 的关系。在实际应用中, 为了使分析简便, 常将复杂的信号加以分解, 使成为简单的所谓基本信号之和, 犹如在力学中常将任一方向的力分解成几个分力, 在数学中常将一矢量分解成若干基本的矢量之和一样。

正是由于可以把系统的输入 $f(t)$ 分解成各种基本信号之和, 因而产生了线性系统的各种分析方法。例如把 $f(t)$ 分解成无穷多个单位冲击函数 $\delta(t)$ 之和, 产生了卷积分析法也称时域分析法, 这将在第二章里研究; 把 $f(t)$ 分解成无穷多个指数函数 $e^{j\omega t}$ 之和, 产生了付氏变换分析法, 这放在第三章去进行; 把 $f(t)$ 分解成无穷多个复指数函数 e^{st} 之和, 产生了拉氏变换分析法, 这是第四章所研究的内容; 把 $f[k]$ 分解成有限个或无穷多个单位数字冲击 $\delta[k]$ 之和或复幂级数 z^k 之和, 产生了离散系统的分析方法, 则在第五章中讨论。也还有一些信号分解的其它方法, 它们分别产生了沃尔什 (Walsh) — 阿达马 (Hadamard) 变换、哈尔 (Haar) 变换…等等, 这些内容已经逸出了本书的范围。总之线性系统分析就是这样受信号分解的不同方式所决定。完全可以预期, 随着新的变换方法的出现, 线性系统分析的理论将不断的丰富与完善。

信号和系统之间的这种互相依存、不可分割的关系, 是我们学习本书所必须注意的。

1.4 线性时不变系统

本书仅限于讨论线性、时不变系统。在系统理论中, 线性、时不变系统的理论处于特殊重要的地位, 这是因为

(1) 虽然严格说来, 这类系统是罕见的, 但是在一定条件下, 有许多系统可以近似看作线性、时不变系统。

(2) 完全针对非线性系统和时变系统的分析理论, 迄今仍不够严谨、完善。而利用线性、时不变系统的理论, 却可以用来分析非线性系统和时变系统。譬如利用电子计算机及状态变量分析法 (参阅本书第六章) 就可以解决此类问题。

(3) 近年来, 与线性、时不变系统理论密切有关的一些学科迅速发展, 如数字信号处理、随机信号处理、模式识别、通信理论、正交变换、信息处理、生物电子学、自动控制等。在这些学科中, 有些是新兴的, 它们正方兴未艾、蓬勃发展, 有些已有一定的历史, 但却正为大量新的内容所丰富, 还有一些则是边缘学科。本教材与这些学科彼此交叉、相互渗透, 并作为这些学科的基础理论, 其重要性是不言自明的。

一个实际的电系统可以由电阻、电容、电感以及其它器件按特定的方式联接而成。当这

些元件的几何尺寸远大于在系统中流通的信号的最长波长时,这种系统称为**集中参数系统**。这时系统的能量被认为贮藏或消耗在这些孤立的元件中,因此其数学模型是常微分方程。与之对应,如果信号的波长并不能认为远小于系统的几何尺寸时,这种系统称为**分布参数系统**。在分布系统里,不能再把系统的元件看作是分立的,而必须看作分布在整个系统的空间中。这时信号就不仅涉及独立时间变量 t ,而且还需涉及独立的空间变量 x 。因此分布参数系统的数学模型是偏微分方程式。

本教材只讨论集中参数系统。所以今后不再特别加以注明。

1.5 研究系统的方法

研究系统的方法可分为输入、输出法及状态变量法两大类。

前几节我们所讨论的实际上都是涉及的输入、输出法。这种方法仅研究系统的对外特性,它只研究输入和输出之间的关系。对于一些较为简单的系统,或者系统虽然复杂,但我们只对其外特性感兴趣,这时用这种方法就很合适,因为它简单、直观。

此外还有一种分析方法称为状态变量法。这种方法把系统内部所有的响应变量都作为分析研究的对象。一个 n 阶系统,其中独立的响应变量共有 n 个。从本质来讲,这种分析方法是把 n 阶系统看成是由 n 个一阶子系统所构成,所以从数学模型来看,即是把一个 n 阶微积分方程用 n 个一阶方程来表示。这样,就可以观察和研究信号(即变量)在系统内部流通的情况。这种方法特别适合于以下两方面:

- (1) 用于自动控制系统的分析和设计;
- (2) 用于对时变系统和非线性系统的分析研究。

系统的研究方法,还可以以数学模型的求解方式,区分为时域法和变换域法两大类。

时域法直接处理系统的数学模型,按已知的激励,计算出所要求的响应。在 1.3 节已经指出,这种方法实质上是将激励 $f(t)$ 或 $f[k]$,分解成 $\delta(t)$ 或 $\delta[k]$ 这种基本信号,再利用线性系统的叠加性求解的,由于它是通过卷积及卷和来完成的,所以又称**卷积法**。

变换法是通过各种正交变换及反变换,利用系统转移函数的概念来研究系统,如付氏变换、拉氏变换、 z 变换法等。1.3 节中已经指出,它们实质上是将激励 $f(t)$ 、 $f[k]$ 分别分解成 $e^{j\omega t}$ 、 e^{st} 及 z^k 这些基本信号,再利用系统的叠加性质求解的。本书中三、四、五章分别对之进行详细讨论。上述这些内容,都属于输入、输出法的范围。

第六章属于状态分析法范围。同样,在求解数学模型时,时域和变换域法都可运用,分析的对象既包括连续系统也包括离散系统。即前五章中所有的方法都将同时用到。

习 题

1—1 系统的数学模型如下式所示:

$$(a) \quad y(t) = af(t) + bf^2(t), \quad -\infty < t < \infty \quad \text{无记忆,时不变,非线性,连续}$$

$$(b) \quad y(t) = x(t_0^-) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad t > t_0 \quad \text{动态,时变,线性}$$

$$(c) \quad y(t) = x(t_0^-) + 3t^3 f(t), \quad t > t_0 \quad \text{动态,时变,线性}$$