应用型本科数学基础课程教材

线性代数及其应用

Linear Algebra
and Its Applications

主　编　毛立新　咸美新

高等教育出版社

应用型本科数学基础课程教材

线性代数及其应用

XIANXING DAISHU JIQI YINGYONG

主　编　毛立新　咸美新
副主编　双冠成　吴业军
　　　　杨芝艳　王月明

高等教育出版社·北京

内容简介

本书依据工科类本科线性代数课程教学基本要求编写．全书分六章，主要内容是行列式、矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组的解、特征值、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换以及线性代数的 MATLAB 实验等内容．本书内容丰富、阐述简明、强调实用性，每章后配有一定数量的习题并按难易程度分类，书末附有习题答案或提示．

本书可供应用型高校工科、经管类等非数学类专业使用，也可供有关教师和自学者参考．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用／毛立新，戚美新主编．-- 北京：高等教育出版社，2015.8

ISBN 978-7-04-043061-5

Ⅰ．①线… Ⅱ．①毛… ②戚… Ⅲ．①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ．①O151.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 134987 号

策划编辑　李　蕊　　责任编辑　李　茜　　封面设计　李小璐　　版式设计　马敬茹
插图绘制　尹文军　　责任校对　刁丽丽　　责任印制　张泽业

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　北京天时彩色印刷有限公司
开　　本　787 mm×960 mm　1/16
印　　张　15.5
字　　数　270 千字
购书热线　010-58581118

咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2015 年 8 月第 1 版
印　　次　2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　24.60 元

物 料 号　43061-00

前　　言

线性代数是高等学校理工、经管类等专业的一门重要的数学基础课程，是学生学习后续课程的基本工具. 近年来，随着我国的高等教育从精英教育转为大众化教育，一大批应用型本科院校应运而生. 为了适应这一层次的本科院校的人才培养目标，我们总结了多年来线性代数课程教学的经验，编写了本书.

本书主要内容有：行列式、矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组的解、特征值、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换以及线性代数的 MATLAB 实验.

本书有如下几个方面的特点：

1. 在满足教学基本要求的前提下，突出应用性，努力使学生学会应用数学思想、概念和方法处理工程实践和经济管理中遇到的实际问题. 例如前四章中通过增设“应用举例”，选取一些实际问题中生动有趣的例子，让学生对线性代数应用的广泛性有所了解，学会将抽象的概念与具体的对象联系起来，并最终解决实际问题.

2. 强调内容的实际背景与几何直观阐述，对基本概念的引入尽量采用启发式，力求理论推导简单明了，突出重点，分散难点，尤其对一些难度较大的定理略去了证明. 另外通过介绍 MATLAB 解决线性代数中的有关问题，使读者体会到线性代数不仅具有严密的理论体系，而且还具有有趣的实验操作性.

3. 在各章每一节的开头列出了本节的主要内容与基本要求，在每一章的末尾附加了本章概要与阅读小资料，以便读者了解本章的知识结构、历史背景与来龙去脉，激发读者的学习兴趣. 同时在一些重要概念第一次出现时，附加了相应的英文表述，便于读者阅读理解有关线性代数的课外资料. 每章后配有精选的习题，书末附答案或提示. 习题分为 A、B 两个层次，A 层次为基本题，供教师布置作业用；B 层次为综合引申题，有一定难度，供学有余力的学生选做.

本书的教学时数不得低于 32 学时. 如讲解加“*”号内容，则需增加课时. 本书可供应用型本科院校工科、经管类等专业使用.

本书共分六章，其中第一章由咸美新编写，第二章由杨芝艳编写，第三章由王月明编写，第四章由双冠成编写，第五章由毛立新编写，第六章由吴业军编写. 全书由毛立新和咸美新负责统稿. 在编写过程中，南京工程学院数理部和其他院

系的教师对本书的编写提出了不少有益的建议, 高等教育出版社对本书出版给予了大力的支持, 编者在此一并表示由衷的感谢.

限于编者水平, 疏漏之处在所难免, 恳请读者批评指正.

编 者

2015 年 1 月于南京

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是一种特定的算式, 它是研究线性代数的一个基本工具. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算等内容. 此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

§1.1 二阶和三阶行列式

通过本节的学习, 应熟练掌握二阶和三阶行列式的概念与计算, 理解三阶行列式元素的余子式与代数余子式的概念, 掌握三阶行列式按行 (列) 的展开定理.

一、二阶行列式

下面从解二元线性方程组引入二阶行列式.

对于一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法分别消去方程组 (1.1) 中的 x_1, x_2, 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 求得解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

从二元线性方程组解的形式可以发现, 如果引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

则 (1.2) 式可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

从而, 二元线性方程组的解简洁明了.

我们按 (1.3) 式规定

定义 1.1　由 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 四个数排成的两行、两列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

称为**二阶行列式 (second-order determinant)**, 其值定义为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 其中 $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 称为这个行列式的第 i 行第 j 列的元素或元. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标 (row index)**, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为**列标 (column index)**, 表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义, 可用图 1.1 来记忆.

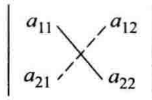

图 1.1

把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**, a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**, 于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差. 这一计算行列式的方法叫做**对角线法则**.

利用二阶行列式的定义, 若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

则 (1.2) 式可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1.4}$$

需要注意的是:

(1) 这里的分母 D 是由二元线性方程组 (1.1) 的系数所构成的二阶行列式, 称为**系数行列式 (determinant of coefficients)**, x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

(2) 上述公式 (1.4) 用行列式解线性方程组 (1.1) 的方法称为**克拉默 (Cramer) 法则**, 以后还要介绍 n 元线性方程组的克拉默法则.

例 1.1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}=14-15=-1\neq 0,$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-3,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1.$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1.$$

二、三阶行列式

定义 1.2 由 $3\times 3=9$ 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ 排成 3 行 3 列的式子

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式 (third-order determinant)**, 其值定义为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.5}$$

由 (1.5) 可知, 三阶行列式共有 6 项. 每项均为不同行不同列的三个元素的乘积, 其中 3 项的前面为正号, 另外 3 项的前面为负号, 可以用图 1.2 所示的对角线法则记忆: 图中每一条实线上的 3 个元素的乘积冠正号, 而每一条虚线上的 3 个元素的乘积冠负号, 所得 6 项的代数和就是三阶行列式的值.

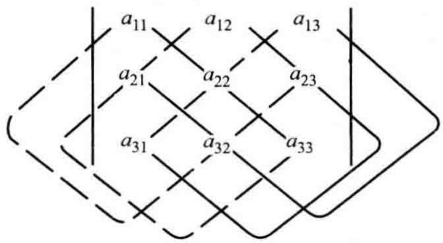

图 1.2

例 1.2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　按对角线法则, 有

$$\begin{aligned} D &= 1\times 0\times 5+3\times 3\times 2+2\times(-1)\times 1-1\times 3\times 1-3\times(-1)\times 5-2\times 0\times 2 \\ &= 28. \end{aligned}$$

需要注意的是: 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式, 对四阶及更高阶的行列式不适用.

为研究更高阶的行列式, 先考察二阶和三阶行列式的关系.

三、二阶和三阶行列式的关系

由二阶和三阶行列式的定义, 可得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \\ &\quad +a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

由上式可以看到, 三阶行列式等于它的第 1 行的每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和. 为了进一步了解这 3 个二阶行列式与原来的三阶行列式的关系, 下面引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中, 把元素 a_{ij} $(i,j=1,2,3)$ 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 剩下来的按原来位置顺序构成的二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式 (cofactor)**, 记做 M_{ij}, 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式 (algebraic cofactor)**, 记作 A_{ij}, 即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$. 例如, 在三阶行列式 D 中, 元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是指: 在 D 中把元素 a_{12} 所在的第

1 行和第 2 列划去后, 剩下来的按原来位置顺序构成的二阶行列式, 即 $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, 而元素 a_{12} 的代数余子式为 $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

应用代数余子式, 三阶行列式可写成

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

即表明三阶行列式等于它的第 1 行的每个元素与其对应的代数余子式乘积之和. 这个表达式也称为三阶行列式按第 1 行展开的**展开式.**

例 1.3　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　按行列式第 1 行展开, 得

$$D = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times (-10) + 5 \times 7 = 5.$$

行列式按第 1 行展开的结果可以推广为如下定理.

定理 1.1　三阶行列式等于它的任一行 (列) 的 3 个元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1, 2, 3); \tag{1.7}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1, 2, 3). \tag{1.8}$$

证　证 (1.8) 式中 $j = 2$ 的情况, 其他情况可类似证明.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}. \end{aligned}$$

此定理叫做**行列式按行 (列) 的展开定理**, (1.7) 式称为三阶行列式**按第 i 行展开的展开式**, (1.8) 式称为三阶行列式**按第 j 列展开的展开式**.

如果定义一阶行列式 $D=|a_{11}|=a_{11}$ (注意与数 a_{11} 的绝对值的区别), 那么二阶行列式也有类似的展开式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}\quad (i=1,2)$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}\quad (j=1,2).$$

例 1.4　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　由于第 2 行中有两个元素为零, 故按行列式第 2 行展开较方便, 有

$$D=2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=2\times 2=4.$$

§1.2　n 阶行列式的定义

通过本节的学习, 应理解 n 阶行列式的定义, 掌握运用行列式定义及拉普拉斯定理计算行列式的基本方法.

类似二阶和三阶行列式的定义, 用归纳法给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3　由 $n\times n$ 个数 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列的式子

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式 (n-th order determinant)**, 简记为$|a_{ij}|_{n\times n}$, 并且规定其值为

(1) 当 $n=1$ 时, $D=|a_{11}|=a_{11}$;

(2) 当 $n \geqslant 2$ 时,

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \tag{1.9}$$

其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j},$$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3(j-1)} & a_{3(j+1)} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称 M_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的余子式, A_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的代数余子式.

例 1.5 应用行列式定义计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的定义, 得

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\ &= 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 1 - 0 + 0 + 2 \times 4 = 11. \end{aligned}$$

一般地, 低阶行列式比高阶行列式的计算要简单, 因此我们考虑将高阶行列式的计算问题转化为低阶行列式的计算. 于是, 同三阶行列式类似, n 阶行列式也有行列式按行 (列) 的展开定理.

定理 1.2 (拉普拉斯定理 (Laplace theorem)) n 阶行列式 D 等于它的任一行 (列) 元素与它们所对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n); \tag{1.10}$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).\qquad(1.11)$$

定理的证明略.

需要注意的是: 应用定理 1.2, 可选取合适的行或列将较高阶行列式化为较低阶行列式计算.

在例 1.5 中, 由于第 4 行的零元素较多, 所以按第 4 行展开行列式较方便, 即得

$$D=1\times(-1)^{4+2}\times\begin{vmatrix}3&0&-2\\-1&1&0\\1&3&1\end{vmatrix}=11.$$

这与按 n 阶行列式定义计算的结果是一致的.

例 1.6 计算 n 阶上三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 根据定理 1.2, 考虑到 D_n 第 1 列元素除 a_{11} 外均为零, 所以按第 1 列展开, 得

$$D_n=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times M_{11}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

同样, 对上式右端的 $n-1$ 阶行列式按第 1 列展开, 得

$$D_n=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}&\cdots&a_{3n}\\0&a_{44}&\cdots&a_{4n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

以此类推, 得

$$D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$