数学建模案例丛书 / 主编 李大潜

UMAP

数学建模案例精选 ②

姜启源 等 编译

Determining the Size and Shape of the Earth

Designing a Model of a Platform Crane

The Species-Area Relations

Modeling Shell Morphology

The Spread of Forest Fires

Clock Time vs. Sun Time: The Analemma

Optimal Foraging Theory

Wind Turbine Power Coefficient Optimization

Game Theory Models of Animal Behavior

An Introduction to Portfolio Theory

高等教育出版社 COMAP

数学建模案例丛书 / 主编 李大潜

UMAP

数学建模案例精选 2

UMAP Shuxue Jianmo Anli Jingxuan

姜启源 等 编译

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

UMAP数学建模案例精选. 2 / 姜启源等编译. -- 北京：高等教育出版社，2015.9
（数学建模案例丛书 / 李大潜主编）
ISBN 978-7-04-043006-6

Ⅰ. ①U… Ⅱ. ①姜… Ⅲ. ①数学模型 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第132959号

策划编辑	李晓鹏	责任编辑	李晓鹏	特约编辑	董达英	封面设计	张雨微
版式设计	张雨微	插图绘制	于 博	责任校对	刘春萍	责任印制	张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京天时彩色印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm×960 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	20.5	版　　次	2015 年 9 月第 1 版
字　　数	300 千字	印　　次	2015 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　43006-00

内容简介

本书为《数学建模案例丛书》的第二册，案例选自美国 COMAP 出版的 UMAP 期刊上的教学单元，包含的案例有确定地球的大小和形状、平台式起重机的模型设计、物种 - 面积关系、贝壳形态的建模、森林大火蔓延、钟表时与太阳时：8 字形图、动物最优觅食理论、风力发电机的功率系数优化、动物行为的博弈论模型、投资组合理论引论。这些案例的应用领域涉及工程、经济、测量、生物、生态、社会等，数学知识基本上不超出微积分、微分方程、线性代数、概率、向量分析等大学基础数学的内容。教学方法讲究循序渐进、步步为营，数学推导详细，特别是在问题展开的过程中配备了相应的习题，让学生边阅读边练习。

本书的案例可以作为数学建模课程的辅助教材和自学材料，也为讲授、学习其他数学课程的教师和学生提供了将数学方法应用于实际问题的丰富的素材和课外读物。

Undergraduate Mathematics and Its Applications
COMAP，姜启源等编译

COMAP, Inc.
175 Middlesex Turnpike, Suite 3B, Bedford, MA 01730, USA

序

数学作为一门研究现实世界中的空间形式与数量关系的科学,它所研究的并非真正的现实世界,而只是现实世界的数学模型,即所研究的那部分现实世界的一种虚构和简化的版本。尽管数学建模这个术语的兴起并被广泛使用不过是近些年来的事,但作为联系数学与应用的重要桥梁,作为数学走向应用的必经的最初一步,数学建模与数学学科本身有着同样悠久的历史。从公元前三世纪建立的欧几里得几何,到根据大量天文观测数据总结出来的行星运动三大定律;从牛顿力学和微积分的创立,到出现在流体力学、电动力学、量子力学中的基本微分方程,无一不是揭露了事物本质的数学模型,且已成为相关学科的核心内容和基本构架。

半个多世纪以来,随着数学科学与计算机技术的紧密结合,已形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术,成为当代高新技术的一个重要组成部分和突出标志,"高技术本质上是一种数学技术"的提法,已经得到越来越多人们的认同。作为基础学科的数学籍助于建模与算法向技术领域转化,变成了一种先进的生产力,对加强综合国力具有重大的意义。与此同时,数学迅速进入了经济、金融、人口、生物、医学、环境、信息、地质等领域,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、生物数学、数学地质学等应运而生,为数学建模开拓了广阔的用武之地。

另一方面,将数学建模引入教学,为数学和外部世界的联系提供了一种有效的方式,让学生能亲自参加将数学应用于实际的尝试,参与发现和创造的过程,取得在传统的课堂里和书本上无法获得的宝贵经验和切身感受,必将启迪他们的数学心智,促使他

们更好地应用、品味、理解和热爱数学,在知识、能力及素质三方面迅速成长。

自上世纪 80 年代初数学建模进入我国大学课堂以来,经过 30 多年健康、快速的发展,目前已有上千所高校开设了各种形式的数学建模课程,正式出版的教材和参考书达 200 多本。全国大学生数学建模竞赛自 1992 年创办以来,受到广大师生的热烈欢迎,到 2014 年已有 1 300 多所院校、23 000 多个队的 7 万余名学生参加。可以毫不夸张地说,数学建模的课堂教学实践与课外竞赛活动相互促进、协调发展,是这些年来规模最大、最成功的一项数学教学改革实践。

用数学的语言和工具表述、分析和求解现实世界中的实际问题,并将最终所得的结果回归实际、检验是否有效地回答了原先的问题,这是数学建模展示的一个全过程。在 30 多年数学建模的教学实践中,已冲破了原有的数学教学模式,形成了一种案例式、讨论式的教学方法。通过一些源于生活、生动新颖,又内涵丰富、启示性强的案例,不仅能吸引学生浓厚的学习兴趣,而且对于培养、提高学生数学建模的意识、方法和能力都有切实的成效。

事实充分说明,数学建模能力的培养和训练,各种案例所起的作用是十分重要的。我们不仅要充分利用案例的广度,通过生动、丰富的案例,展示及阐述数学在诸多领域中的应用,更要特别注重案例的深度,着意选择一些随着假设条件不断贴近实际、所建立的模型不断改进、而由模型得到的结果也更加符合实际的案例,体现数学建模逐步深入和发展的过程。正因为如此,这套数学建模案例丛书,将由翻译、改编国外相关机构出版的案例和收集、汇编国内撰写的案例这两部分组成,以期给广大教师和学生提供数学建模方面的教学素材、学习读物和竞赛辅导材料,促进我国数学建模的教学及竞赛不断深入发展。

当然,数学建模要不断深入,就不能认为现有的、包括那些目前可能是有口皆碑的模型,已经到了十全十美的境地,可以画上句号了。对本丛书中所精心收集的案例,自然也应抱着这样的态度。这是数学建模一个显著的特点,是数学建模永远生气蓬勃的标志,也是广大的数学建模工作者永不止步的鞭策和动力。诚挚地希望广大读者能提出宝贵的建议,并积极提供可以收入本丛书的有关数学建模的案例或者素材,帮助编委会将这套丛书愈办愈好。

李大潜

2014 年 10 月

前言

经过数学建模案例丛书编委会成员的共同努力，在全国大学生数学建模竞赛组委会和高等教育出版社的支持、配合下，《UMAP 数学建模案例精选(2)》顺利问世了。

本书的案例全部选自美国 COMAP(Consortium for Mathematics and its Applications)出版的 *UMAP*(*Undergraduate Mathematics and its Applications*)期刊上的教学单元。该刊物的对象是大学生和教师，主要发表数学建模及数学科学在各个领域中应用的研究论文、教学单元等，在每年举办的美国大学生数学建模竞赛和交叉学科竞赛中获得 Outstanding 奖的论文也在该刊物上刊载。

本书选编的数学建模案例有以下几个特点：

应用领域涉及工程、经济、测量、生物、生态、社会等，每篇都对案例的应用背景作了简明、生动的介绍，让不大熟悉那个领域的读者也能基本上了解这个案例要讨论的问题，有些还对材料的历史由来给出较详细的说明。

数学知识基本上不超出微积分、微分方程、线性代数、概率、向量分析等大学基础数学的内容，学完这些课程的学生阅读案例，数学上不会遇到多大困难。个别案例用到数值分析、博弈论的知识。

教学方法讲究循序渐进、步步为营，数学推导详细，特别是在问题展开的过程中配备了相应的习题，让学生边阅读边练习。如果能在学习时按照要求把全部习题都做一遍，相信不仅有利于对问题的深入理解，而且对相关数学方法的学习也是一次很好的复习和提高。

本书的案例可以作为数学建模课程的辅助教材和自学材料,也为讲授、学习其他数学课程的教师、学生,提供了将数学方法应用于实际问题的丰富的素材和课外读物。

编译者对原文中某些专业知识的理解不可避免地存在可以商榷之处,对一些次要的、过时的部分也作了适当的删节。为了给读者提供方便,特将本书的全部原文放到与本书配套的"数字课程"网站上。

姜启源

2015 年 3 月

目　录

1 确定地球的大小和形状

Determining the Size and Shape of the Earth

谭永基 编译 姜启源 审校

摘要：

人们试图测量地球的大小和形状已有悠久的历史. 在 17 世纪，理论研究预言地球的形状是一个扁平的球体. 后来有实验研究对此结果提出质疑. 到 18 世纪为了解决这个问题人们在不同地点对子午线的弧长作了测量. 本模型说明了在地球是一个近似旋转椭球的假设下，如何通过由测量得知的不同纬度的子午线弧长，得出地球的大小和形状.

原作者：

Richard J. Pulskamp

Department of Mathematics and Computer Science, Xavier University, Cincinnati, OH 45207

pulskamp@ xavier. edu

发表期刊：

The UMAP Journal, 2012, 33 (2): 119—148.

数学分支：

三角，微积分

应用领域：

大地测量

授课对象：

大学主修数学的一年级学生

预备知识：

平面三角，初等微积分，矢量内积和最小二乘法

相关材料：

Paul R. Patton: Module 562: Finding the shortest distance on the Earth's surface from here to Timbuktu. 1985，重印于 UMAP Modules: Tools for Teaching, 1985, 73—89.

目 录

1. 引言

在 17 和 18 世纪研究确定地球的形状和大小曾是一个迷人的问题. 通过理论分析, Isaac Newton(牛顿)断定地球的形状近似于一个扁球体,即,它在赤道处凸起. 然而,实证数据让 Jacques Cassini 断言地球是向两极伸长的细长体. 为了解决这个问题,探险队到世界各地收集子午线的弧长数据. 如果地球的形状呈扁球体,从赤道到两极每一度的弧长会增加,如果地球是细长体,每一度的弧长将会减少.

我们将说明如何通过这些弧长来推断地球的形状和大小,以及如何来确定这些弧长.

2. 地球视作球体

首先让我们把地球视作一个球体. 在其表面,我们确定四个特殊对象:赤道,南北两极,和穿过英格兰格林尼治的本初子午线. 由于地球表面是二维的,只需要两个数字来确定地球表面的一点. 通常我们用纬度(ϕ)和经度(λ),我们取 $-90° < \phi < 90°$和 $-180° < \lambda < 180°$. 赤道的纬度为 0°,北极的纬度为 90°,而本初子午线为东经 0°. 赤道以北的纬度和本初子午线以东的经度取正号. 特别是,美国及邻近地区大约位于纬度 25°到 50°和西经 125°到 65°之间(即 $-125°$到 $-65°$之间).

在球面上,一个大圆是球面上任一直径最大的圆. 等价地,它是任何通过球面中心的平面与球面的交线. 赤道和任何一条子午线都是大圆的例子. 两极是对径点(antipode)的例子,对径点指球面上任意直径的端点. 由于中心和对径点共线,故有无限多的大圆通过任何一对对径点,从而仅由对径点并不能唯一地确定一个大圆. 然而对球面上任意不是对径点的一对点,只有唯一一个大圆通过.

3. 大圆的弧长

设 A 和 B 是半径为 ρ 的球面上的两个点(不是对径点)如图 1 所示. 图中这两个点在不同纬线和不同经线上. 由于这些点和球心不共线,它们确定一个唯一的平面,因此必然落在一个唯一的大圆上. 连接 A,B 两点的大圆弧如图所示. 我们现在的任务是计算该弧的长度.

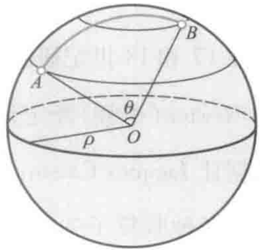

图 1 两点间的大圆距离

从球心 O 引两条半径连接 A,B,形成一个中心角 θ. 由于一个大圆的周长为 $2\pi\rho$,于是 A 和 B 之间的大圆的弧长度是

$$\frac{\theta}{2\pi}\cdot 2\pi\rho=\theta\rho$$

其中 θ 的单位是弧度(rad)不是度(°).

现在的问题化为确定 θ. 将从球的中心到点 A 和 B 的半径作为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,则它们的标量积(或内积)可以表示为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta=\rho^2\cos\theta \tag{1}$$

其中 $|\boldsymbol{A}|$和$|\boldsymbol{B}|$表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的长度. 于是 θ 可以容易地从矢量计算中得到.

如果我们将地球置于一个右手直角坐标系中,如图 2 所示,其中地球的中心位于原点 O,z 轴正方向穿过北极,正 x 轴通过赤道和本初子午线,那么球面上的点 $P\ (\phi,\lambda)$的坐标可以表示为

$$x=\rho\cos\phi\cos\lambda,\quad y=\rho\cos\phi\sin\lambda$$

$$z=\rho\sin\phi$$

为了得到此式,我们注意到,从原点指向球面上点 $P(\phi,\lambda)$的矢量与通过赤道的平面构成角 ϕ,而且它在该平面上的投影与 x 轴的

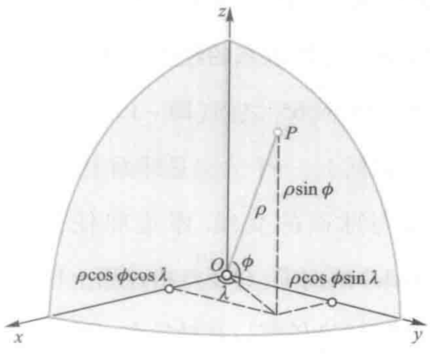

图 2 经纬度转化为直角坐标

夹角为 λ. 因此 x 和 y 坐标为后者在相应的坐标轴的投影.

设 A, B 的球坐标为 (ϕ_1, λ_1), (ϕ_2, λ_2), 从(1)式可得(见习题 1)

$$\cos\theta = \cos\phi_1\cos\phi_2\cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin\phi_1\sin\phi_2 \tag{2}$$

因此 A, B 间的大圆距离(地球上弧长)S 为

$$S = \rho\arccos[\cos\phi_1\cos\phi_2\cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin\phi_1\sin\phi_2] \tag{3}$$

然而,我们将看到,与上面的模型不同,地球不是一个球体,而是一个赤道比两极厚的扁球. 作为一种折中,我们取其平均半径为 $\rho = 3\ 959$ mile 或 6 371 km,这是一个适合于温带地区的近似. 对大圆距离计算的更充分讨论见[Patton 1985].

习题

1. 导出(2)式.

2. 埃及的 Alexandria(亚历山大市)位于北纬 31°12′、东经 29°55′、Aswan(阿斯旺市,旧称 Syene)位于北纬 24°05′、东经 32°56′,将它们转换成弧度坐标并分别用 km 和 mile 为单位确定它们的大圆距离.

3. 法国城市 Amiens 位于北纬 49°54′46″、东经 2°17′39″,据报道被称为 Malvoisine 的地方位于北纬 48°31′48″、东经 2°25′36″,重复上一题的工作.

4. 早期的地球测量

亚里士多德在公元前 350 年他的著作 De cælo(在天国)[Aristotle 1984] Ⅱ. 14 中说:数学家们得出地球周长为数字 400 000 stade. 这里,stade 假设为 600 希腊尺长的希腊奥林匹克体育场的长度. 相应地 1 希腊尺相当于 16 个 dactyl(或手指). 遗憾的是,亚里士多德并没有指出 400 000 stade 是如何确定的.

据传,Alexandria 图书馆馆长 Eratosthenes(前 276—前 196)曾经观察到两城市 Syene

和 Alexandria 位于同一子午线上,中间隔着 1/50 的子午线圆. 此角度是通过观察在夏至正午位于 Syene 的日晷的指向天顶(直接指向上方)的指针无阴影,而同时设置在 Alexandria 的一个日晷仪的指针投射出的阴影对应于 1/50 的大圆的角度而确定的.

图 3 说明了他的推理. 圆代表通过 Syene(S)和 Alexandria(A)的子午线,太阳光假设是平行地投射到地球上,Alexandria 的指针 AZ 投射出阴影 AB. 由于 BZ 平行于 OS,由内错角定理,圆心角 $\theta = \angle AOS = \angle BZA$. 因为这两个城市之间的距离为 5 000 stade,由此得出,地球的周长是 250 000 stade. Eratosthenes 更正后,这一数字为 252 000 stade. 因为 252 000/360 = 700,这就导致人们怀疑他的意图是让沿子午线 1°的弧的度量是 700 stade[Heath 1932].

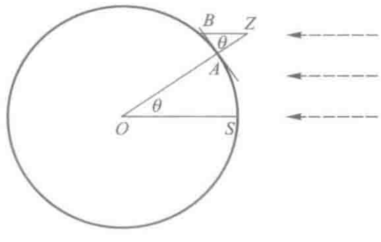

图 3　Eratosthenes 的测量方法

我们对 Eratosthenes 的方法的认知来自 Cleomedes(生卒日期不确定)的 *De motu circulari corporum cælestium*(天体的圆周运动)[Cleomedes 2004]的第一册第 10 章. 他还报告了 Posidonius(约前 135—前 45)确定的数字. Posidonius 声称希腊的 Rhodes 岛和 Alexandria 位于同一子午线上,它们也是相距 5 000 stade. 此外,他观察到老人星在这两个位置的标高相差 1/48 个大圆. 因此,地球的周长是 $5\ 000 \times 48 = 240\ 000$ stade,所以 1°的弧是($666 + 2/3$) stade.

无论 Posidonius 的说法是否是真的. 我们知道 Alexandria 市位于北纬 31°12′、东经 29°55′,而 Rhodes 位于北纬 36°10′、东经 28°0′. 所以两地显然不在同一子午线上,相距也不像 Posidonius 声称的那么远. 事实上,因为这两个城市被地中海隔开,很难想象当时会被很精确地测量.

Claudius Ptolemy 在他的 *Geography*[Ptolemy 2000] Ⅰ.7 中断言 1°的弧仅长 500 stade.

我们没有必要将 stade 转换成米,也没有必要试图在 Posidonius, Eratosthenes 和 Ptolemy 之间调停,因为在古代 stade 根本没有标准化. 重要的是我们注意到 Eratosthenes 采用的方法是完全正确的. 特别地,在地球为球体的假设下,对于落在同一子午线上的两点,如果每个点的纬度和两点间的精确距离是已知的,那么地球的周长就

可以确定.

我们还要提及另外两个测量弧长的历史事件. 其一是发生在公元 833 年 Mesopotamian 平原,即现今的伊拉克西北部,由 Caliph Al-Mamun 领导[Abulfeda 1848]. 另一个是 Jean Fernel 用里程表测量了从巴黎到 Amiens 的距离,其结果发表在 *Cosmotheorie*(1528)上[Butterfield 1906].

5. 椭圆的弧长

地球不是一个球体,但是它的形状十分近似于一个椭圆旋转得到的,称为旋转椭球体. 一个通过两极的平面与旋转椭球体相交得到一个椭圆,因此我们需要研究如何测量椭圆的弧长.

考察一个 xOz 平面上中心位于原点的椭圆,其长短轴分别为 $a,b(a\geqslant b)$,在直角坐标系中,该椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

这里长轴是水平的,短轴是铅直的.

利用代换 $x=a\cos t, z=b\sin t$,得到它的参数表示

$$[x,z]=[a\cos t, b\sin t],\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi \tag{4}$$

我们知道椭圆的离心率

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

它完全取决于 b/a;因此,在中心位于原点,长轴水平和短轴垂直的假设下,参数 a,b 和 e 中任何两个足以唯一地确定一个椭圆.

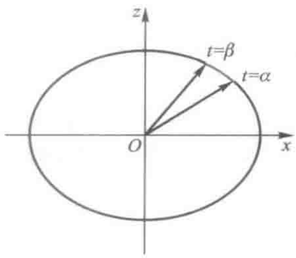

图 4　一个椭圆

图 4 给出了区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 形成的椭圆弧段.

为计算弧长,我们用勾股定理将弧长元表为

$$ds=\sqrt{dx^2+dz^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$