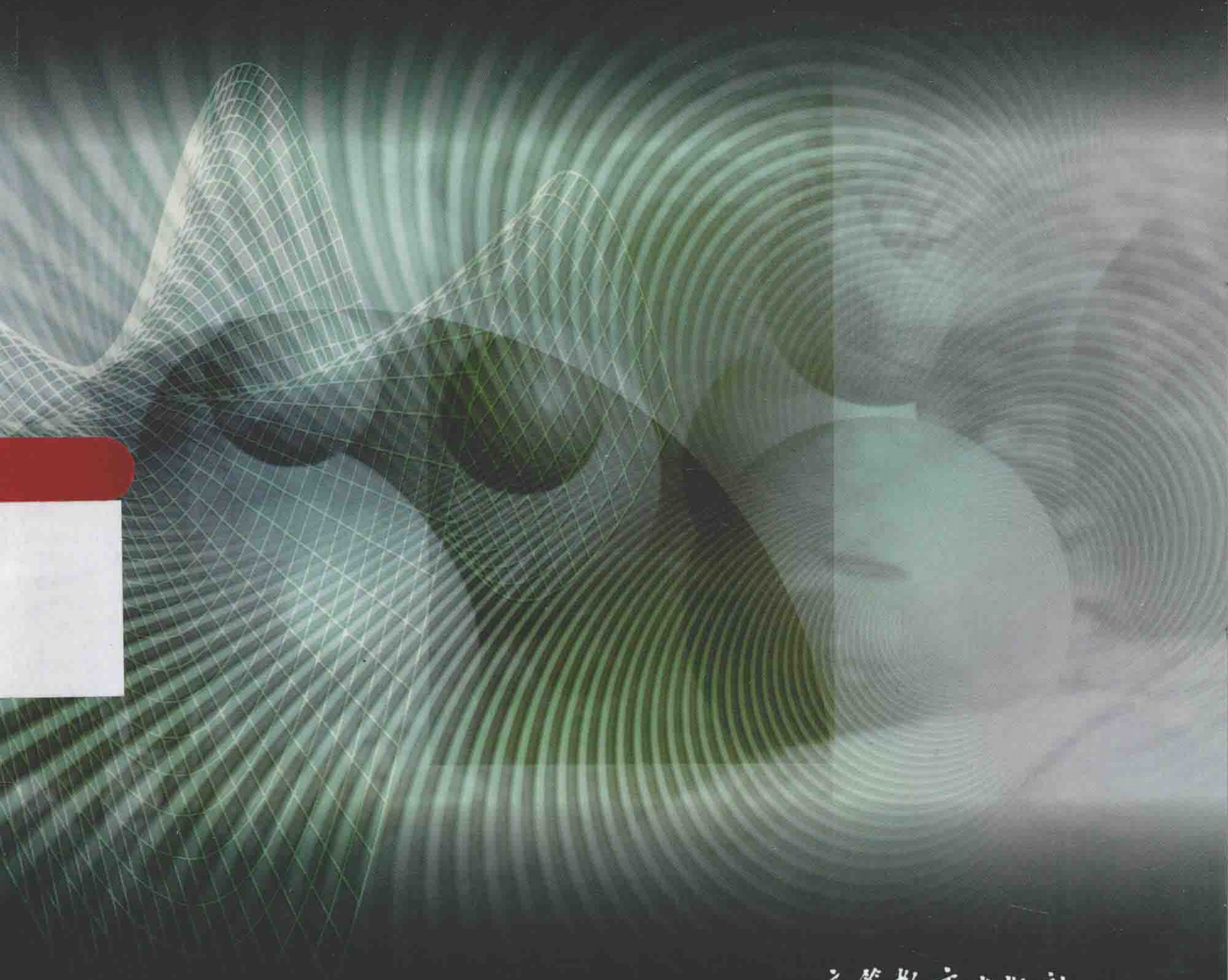
数学分析 第三版 上册

郭大钧 陈玉妹 裘卓明 编著



高等教育出版社

数学分析 第三版 上册

Shu Xue Fen Xi

郭大钧 陈玉妹 裘卓明 编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是郭大钧教授几十年教学经验的总结，从77级大学生开始，一直作为山东大学数学系(院)数学分析课的教材，已使用了三十多年。本书具有概念明确、重点突出、由浅入深、循序渐进、启发性强、便于自学等特点，并重视疑难、关键性问题的解惑，重视提高读者利用数学分析解决实际问题的能力。

本书上册主要介绍了极限理论和一元函数微积分学的基本理论和基础知识，包括函数、极限、连续函数、微分学及其应用、积分学及其应用；下册主要介绍了级数和多元函数微积分学的基本理论和基础知识，包括级数、多元函数的微分学及应用、广义积分、含参变量的积分、重积分、线积分与面积分、场论、傅里叶级数等内容。书中有较多的习题，每章后还有综合性补充题，书末附有习题的参考答案。

本书可作为综合性大学和师范院校数学系（院）的教材，也可作为理工科院校学生学习数学分析的参考书，还可供中学教师及广大读者自学数学分析之用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析. 上册/郭大钧，陈玉妹，裘卓明编著. --3版. --北京：高等教育出版社，2015.6
ISBN 978-7-04-042346-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①郭… ②陈… ③裘… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第057144号

策划编辑 李冬莉　责任编辑 李冬莉　封面设计 张　楠　版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘　莉　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京人卫印刷厂
开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 23.25
字　　数 420千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 1982年6月第1版
　　　　 2015年6月第3版
印　　次 2015年6月第1次印刷
定　　价 35.80元

物 料 号 42346-00

第 三 版 序

从 77 级开始，本书一直作为山东大学数学系(院)“数学分析”课的教材。同时，也被其他多所高校相关专业(例如,华东石油大学应用数学专业)选作“数学分析”课的教材。本书最初是油印本，后于 1982 年 6 月正式铅印出版，再后来到 2000 年 8 月出第二版就是计算机排版了。本书 2001 年在山东大学百年校庆教材成果展中被评为“百部优秀参展教材”。它有这样一些特点：例如，通过对典型例子仔细分析其来龙去脉，以加深学生对数列极限概念“$\varepsilon-N$”语言的理解；又如，对数列极限理论中的六个主要定理进行了难点分析，并以比较直观的区间套定理作为主要证明工具，这比把六个主要定理集中讲授并以戴德金(Dedekind)定理作为主要证明工具的传统讲法更易被学生接受；再如，在场论部分，作为例子我们增加了流体力学中的连续性方程、电学中的高斯(Gauss)定理以及电磁学中的安培(Ampère)环路定律，这样就使得微积分的应用更加丰富多彩。

第三版基本上是第二版的重印。同时，我们也对第二版从内容到习题以及习题答案和提示进行了若干必要的修改或修正，从而使本书进一步完善。

在第三版的出版过程中，得到高等教育出版社理工出版事业部数学分社的大力支持，特致谢意。

郭大钧

2014 年 2 月 9 日

于山东大学南院

第 二 版 序

从77级大学生开始，本书一直作为山东大学数学系数学分析课的教材，已使用了二十多年。本书1986年获山东大学优秀教材二等奖。

第二版基本保持第一版原样，只对个别习题中不妥之处做了修正。杨连中教授指出了这些不妥之处，特表示感谢。另外，博士生徐西安、戚仕硕、张克梅、路慧芹、孙金丽对文稿进行了仔细地校阅，对他（她）们也表示感谢。

郭大钧

2000年3月15日

于山东大学南院

目　录

第一章　函　　数

§1　函数的概念

1.1　函数的概念

我们知道：微积分是研究变量的数学. 客观世界中许多变量，它们之间不是孤立的，而是相互联系，相互制约，相互影响的. 变量之间的相互联系抽象到数学上，就是所谓函数关系. 下面我们先看几个例子.

例 1　自由落体运动. 由物理学知道，空中的物体自由下落(即初速度为零)，如果忽略空气的阻力，经过时间 t(单位:s)后下落的距离 s(单位:m)有如下的公式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2. \tag{1.1-1}$$

其中 g 是重力加速度，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$(图 1-1)，这里，t 和 s 是两个变量，它们之间不是孤立的而是由公式(1.1-1)联系起来，对于每一个时刻，物体都有一确定的位置，即是说对于 t 的每一个数值，s 都有一个对应值，例如 $t=1$ s 时，$s=4.9$m. 所以公式(1.1-1)事实上反映了 s 和 t 之间的对应关系，单知道公式(1.1-1)还不能对整个运动情况完全了解，还必须知道 t 的变化范围，设物体在时刻 T 落到地上，则显然 t 的变化范围为 $0\leqslant t\leqslant T$(T 和物体离地面的高度 H 有关,我们有

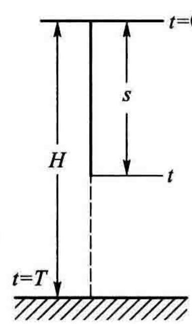


图 1-1

$$H=\frac{1}{2}gT^2,$$

故

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}},$$

例如,如果 $H=122.5$ m,那么 $T=5$ s)，知道了对应关系(1.1-1)和 t 的变化范围，整个运动情况完全清楚了.

例 2　某气象台用自动记录仪，记录了某一天气温 T 随时间 t 的变化曲线（图 1-2），这个曲线本身就反映了 T，t 之间的依赖关系，这时 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$，对这范围的每一时刻 t 都可在图上量出对应的温度 T，例如 $t=3$ 时（早晨 3 点钟），$T=12$ ℃；$t=13.5$ 时，$T=22$ ℃（从图中可知下午一点半时气温最高，为 22 ℃）.

例 3　考察某河流的一个断面上各处水的深度 y（单位：m），显然水的深度 y 随测量点离岸边的距离 x（单位：m）而变（图 1-3）. 设每隔 1 m，测量一次河深，得数据如下表：

x/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y/m	0	0.2	0.3	0.5	0.6	0.9	1.2	1.3	1.6	1.9	2.1	2.3	2.4	2.2	2	1.8	1.5	1.2	0.9	0.7	0.5

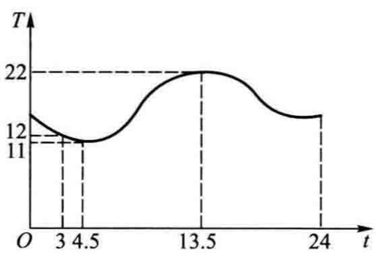


图 1-2

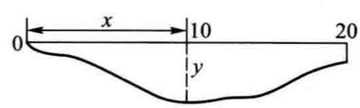


图 1-3

这里，变量 x 与 y 之间的依赖关系可通过上面所列的表反映出来. x 的变化范围是 $0\leqslant x\leqslant 20$，在这范围内，对每一 x 值，都确定了唯一的 y 值，例如，$x=6$ m 时，$y=1.2$ m，y 的变化范围是 $0\leqslant y\leqslant 2.4$. 注意，上面列的表反映 x 与 y 之间的依赖关系是不完全的，例如，当 $x=7.5$ m 时，从表上就查不出 y 的数值，所以测得的数据越多，列的表越细，反映的就越完全.

例 4　在机械工业中（例如冲床上），广泛应用着曲柄连杆机构（图 1-4（a）），设半径为 r 的主动轮按反时针方向以等角速度 ω 旋转，于是，连杆（设其长为 l）BA 带动滑块 A 作往复直线运动，所以曲柄连杆是把转动转换成直线往复运动的一种机械结构. 现在我们来求滑块 A 的运动规律.

设 OA 的长为 s（图 1-4（b））. 我们要建立的就是 s 随时间 t 的变化规律，由 B 点作 OA 的垂线，设垂线足为 C，于是

$$s=OC+CA,$$

显然

$$OC=r\cos\omega t,$$

$$CA=\sqrt{BA^2-CB^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}\ .$$

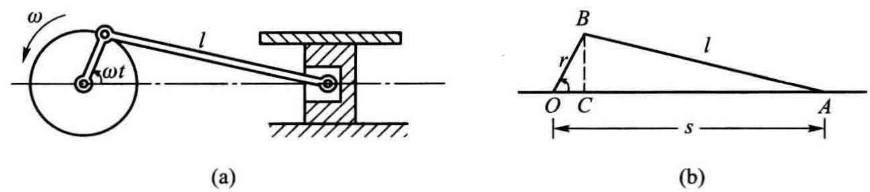


图 1-4

于是，所要求的规律就是

$$s=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}\ . \tag{1.1-2}$$

变量 t(时间)的变化范围是 $0\leqslant t<+\infty$（注意，$+\infty$（正无穷大）是一个符号，不是数，$0\leqslant t<+\infty$ 相当于 $0\leqslant t$)，s 的变化范围是 $l-r\leqslant s\leqslant l+r$(当 $t=0$ 时，$s=l+r$；当 $t=\dfrac{\pi}{\omega}$时，$s=l-r$).

以上这些例子，虽然具体内容各不相同，但它们通过一定的规律反映两个变量之间的依赖关系却是共同的. 这种依赖关系我们叫做函数关系，于是抽象出下面的函数定义.

定义　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的变化范围内的每一个值，都按某一确定的规律有变量 y 的一个值与之对应(粗略地说，就是 y 随 x 变化而变化)，则我们称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x).$$

x 叫做自变量，y 叫做因变量，自变量 x 的变化范围叫做函数的定义域，因变量 y 对应的变化范围叫做函数的值域.

在例 1 中，落下的距离 s 是时间 t 的函数，即

$$s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2.$$

对应规律是由公式(1.1-1)确定，t 是自变量，s 是因变量. 此函数的定义域是 $0\leqslant t\leqslant T$，值域是 $0\leqslant s\leqslant H$. 例 2 中，气温 T 是时间 t 的函数：$T=f(t)$. 对应规律由图 1-2 中的曲线确定，定义域是 $0\leqslant t\leqslant 24$，值域是 $11\leqslant T\leqslant 22$(从图 1-2 的气温曲线上看出).

注 1：函数概念中包括三个要素，即对应规律，定义域，值域. 如果知道了对应规律和定义域，则值域就随之而定(例如，在例 4 中，知道了对应规律公式(1.1-2)，又知道定义域是 $0\leqslant t<+\infty$，则值域就可看出来是 $l-r\leqslant s\leqslant l+r$). 因此，确定一个函数需要知道两个要素：对应规律和定义域.

注 2：定义域和值域我们常用“区间”来表示. 我们说，满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 构

成一个**闭区间**，记为$[a,b]$，从几何上说$[a,b]$就是数轴上从a点到b点包括端点的闭线段(图1-5(a))（我们知道,所有实数和数轴上所有的点是一一对应的,因此,我们把实数a和数轴上的点a不加区别）. 满足$a<x<b$的所有实数x构成一个**开区间**，记为(a,b)，所以，(a,b)就是数轴上从点a到b不包括端点的开线段(图1-5(b)). 有时，我们还要考虑半开闭的区间，例如$[a,b)$就代表左端闭右端开的区间，即由满足$a\leqslant x<b$的所有x构成(图1-5(c)). 总之，读者记住，方括弧代表闭，圆括弧代表开. 另外，经常还要考虑**无穷区间**. 例如$[a,+\infty)$代表满足$a\leqslant x<+\infty$的全体实数x构成的右端无穷的区间(图1-5(d))；$(-\infty,+\infty)$代表满足$-\infty<x<+\infty$的所有x(即全部实数)构成的两端无穷的区间. 这里，我们要再一次强调指出：$+\infty$和$-\infty$（负无穷大）只是为了方便而使用的两个符号，但不是实数. 因此，比如，区间$[a,+\infty]$就没有意义，因为实数x不能等于$+\infty$.

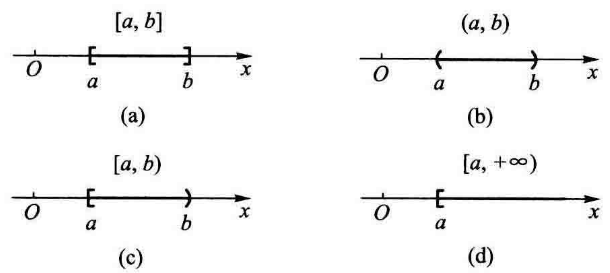


图 1-5

有了区间的概念以后，例1中函数的定义域就可写为闭区间$[0,T]$，值域是闭区间$[0,H]$. 同样，例2、例3、例4中函数的定义域与值域分别为$[0,24]$与$[11,22]$，$[0,20]$与$[0,2.4]$，$[0,+\infty)$与$[l-r,l+r]$.

注3：确定函数的定义域一般分两种情况：

（ⅰ）如果函数是联系着实际问题来考察的，其定义域应根据实际问题而定. 例如，例1的定义域为$[0,T]$，例4的定义域为$[0,+\infty)$；

（ⅱ）在数学上，我们往往从具体问题中抽象出来，一般地去研究函数，这时函数的定义域为使函数有意义的自变量的所有数值构成的.

例如，函数

$$y=4.9x^2 \tag{1.1-3}$$

的定义域为$(-\infty,+\infty)$；函数

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x-3} \tag{1.1-4}$$

的定义域为不等于3的所有实数x，即$(-\infty,3)$和$(3,+\infty)$. 下面我们来求函数

$$y=\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{\sqrt{x}} \tag{1.1-5}$$

的定义域，第一项仅当$1-x^2\geqslant 0$时才有意义（我们只考虑实数）即$x^2\leqslant 1$或$-1\leqslant x\leqslant 1$，第二

项仅当 $x>0$ 时才有意义，故此函数的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 和 $x>0$ 的公共部分，即 $0<x\leqslant 1$ 或半开闭的区间 $(0,1]$（图 1-6）.

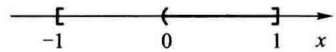


图 1-6

注 4：函数 $y=f(x)$ 中的“f”是一个符号，代表 x 与 y 间的对应规律，切不可把 $f(x)$ 误解为 f 乘 x，正如函数 $\sin x$ 不能看成 sin 乘 x 一样.

当自变量 x 取某特定的值 x_0 时，对应的函数值用 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$ 表示. 例如，对于例 1 中的函数

$$s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2=4.9t^2,$$

我们有

$$s\big|_{t=1}\text{或}f(1)=4.9,$$

$$s\big|_{t=2}\text{或}f(2)=19.6.$$

对于例 4 中的函数

$$s=f(t)=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t},$$

我们有

$$s\big|_{t=0}\text{或}f(0)=r+l,$$

$$s\big|_{t=\frac{\pi}{\omega}}\text{或}f\left(\frac{\pi}{\omega}\right)=l-r,$$

$$s\big|_{t=\frac{2\pi}{\omega}}\text{或}f\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=r+l.$$

另外，当在一个问题中遇到几个函数时，为了区别起见，除 f 外我们往往还用其他的字母，如 g，φ，ψ 等等. 例如，半径为 r 的圆的面积 S，圆周长 L，球体体积 V 为三个函数：

$$S=\pi r^2,\ L=2\pi r,\ V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

我们可分别用 $S=f(r)$，$L=g(r)$，$V=\varphi(r)$ 表示.

今后，我们常用 x，y，$z\cdots$ 代表变量，a，b，$c\cdots$ 代表常量.

1.2 函数的表示法

表示一个函数，一般有三种方法：

(1) 公式表示法. 就是用一个数学公式来表达自变量和因变量之间的对应关系，例如，例 1 中的公式(1.1-1)，例 4 中的公式(1.1-2)都是用公式表示

的函数.

（2）图形表示法．就是用曲线来表达自变量和因变量之间的对应关系．如例 2 中所述的函数就属此类.

（3）列表表示法．就是用表格来表达自变量和因变量之间的对应关系，如例 3 中所述的函数就属此类．另外，如平方表、开方表、三角函数表、对数表等也属于此类.

事物都是一分为二的，三种表示法各有优缺点．图形表示法比较直观，能从图形上直观地看出函数值的变化情况和变化趋势，但不便于作理论研究；列表表示法可不用计算和度量，直接从表上查得函数值，使用方便，但表中所列的函数值不完全，也不便于作理论研究；公式表示法适于对函数作理论研究，但不直观．由于微积分学要对函数进行理论分析和运算，所以在微积分中我们一般都考虑用公式表示的函数.

但是需要特别指出的是，由于函数的对应规律，其表现形式是可以各种各样的，因而函数是一个十分广泛和深刻的概念．在函数的定义中并没有限定变量间的对应关系非要用公式来表示不可．事实上，就是用公式来表示函数时，也经常出现用几个公式来表示一个函数的情形.

例 5

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2, & -\infty<x<0, \\ \sin x, & 0\leqslant x<+\infty \end{cases}$$

就是定义在$(-\infty,+\infty)$上的一个函数，而不是两个函数！其对应规律是在定义域$(-\infty,+\infty)$的两段上分别用两个公式来表示的，即函数在定义域的其中一段$(-\infty,0)$上所对应的值按公式 x^2 来计算，而在另一段$[0,+\infty)$上的函数值则是 $\sin x$．如

$$f(-2)=(-2)^2=4,\quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4},$$

$$f(0)=\sin 0=0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \cdots.$$

这种函数，我们通常称为分段定义的函数.

例 6　另外一种函数关系（即对应规律）是可以用一句话来表示的．例如，“y 是不超过 x 的最大整数”，这就是数论中一个极为重要的函数.

因为对任何给定的实数 x，有而且只有一个不超过它的最大整数 y，如

$x=0$，$y=0$；$x=\dfrac{1}{2}$，$y=0$；$x=1$，$y=1$；$x=2.4$，$y=2$；$x=\pi$，$y=3$；

$x=-\frac{1}{2}$，$y=-1$；$x=-2$，$y=-2$；$x=-2.4$；$y=-3$，….

因而根据函数的定义，这样的整数 y 就是 x 的函数，其定义域是$(-\infty,+\infty)$，由于这个函数在数论中的特殊的重要性，我们用一个特别的记号 $y=[x]$来表示它，即$[x]$表示不超过 x 的最大整数，或者说$[x]$是 x 的整数部分. 容易看到，当

$$n\leqslant x<n+1\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)\text{时，}[x]=n.$$

由此，就不难作出 $y=[x]$的图形(图 1-7)是一个逐段升高的“阶梯”形.

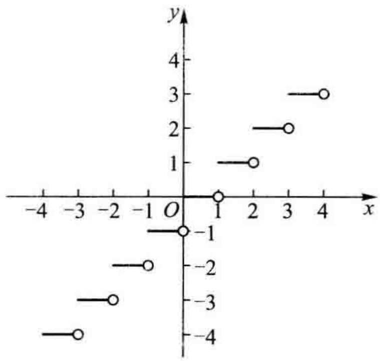


图 1-7

例 7　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

例如，当 $x=-2$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{7}$时，$y=1$；当 $x=\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π 时，$y=0$. 这个函数的图形是画不出来的，但可以作一些直观的想象：有无数多个点，“稠密”地分布在 x 轴上，也有无数多个点“稠密”地分布在直线 $y=1$ 上.

另外，由对应的传递性，我们还可以得到表达函数的另一种重要的形式即复合函数. 所谓对应的传递性，就是：若 x 对应 u，而 u 对应 y，则通过 u，x 就与 y 建立了对应.

例如，

$$y=\sin u,\quad u=a^x\quad(a>0).$$

容易看出，y 是 x 的函数，即

$$y=\sin a^x\quad(a>0).$$

这种形式的函数称为复合函数.

一般地说，若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，则通过变量 u，y 就是 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，并称它为前两个函数的**复合函数**，而变量 u 则称之为中间变量.

必须注意：复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应该是使 $u=\varphi(x)$的函数值属于 $y=f(u)$的定义域的那些 x 所组成，因此经常只是 $u=\varphi(x)$的定义域的一部分.

例 8 设 $y=\lg u$，$u=\sin x$，求复合函数 $y=\lg(\sin x)$ 的定义域.

函数 $u=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而复合函数 $y=\lg(\sin x)$ 的定义域应该是使 $u=\sin x>0$ 的所有 x 所组成，即

$$2n\pi<x<(2n+1)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

总之，由于对应规律表现形式的多样性，我们可以得到各种不同的函数.

习 题 一

1. 设一物体从离地面 490 m 处自由下落，经过时间 t（单位:s）以后，它离地面的高度设为 h（单位：m），试将 h 表示为 t 的函数，并求出此函数的定义域和值域.

2. 试求下列函数的定义域：

(1) $y=x+3$；

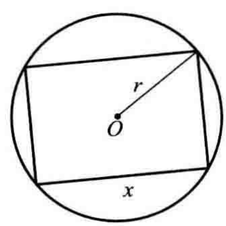
(2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$（并求 $f(0)$，$f(2)$）；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$（并求 $f(0)$，$f(a)$，$f\left(\dfrac{1}{b}\right)$，其中 $0\leqslant a<1$，$b>1$）；

(4) $y=2\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x^2}$（并求 $y\big|_{x=2}$，$y\big|_{x=x_0}$，其中 $1<x_0<2$）；

(5) $g(x)=\sqrt{3x-x^3}$ （并求 $g(-2)$，$g(1)$）.

3. 在半径为 r 的圆中内接一矩形，设矩形的一边长为 x，试将此矩形的面积 S 表示成 x 的函数，并指出此函数的定义域.



（第 3 题）

4. 函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

作出此函数的图形，并证明

$$|x|=x\operatorname{sgn} x.$$

5. 设 $f(x)=1+[x]$，求 $f(0.9)$，$f(0.99)$，$f(1)$，$f(-0.9)$，$f(-\pi)$.

6. 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(\pi)$.

7. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$，$f[f(x)]$.

8. 设 (1) $\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$；

(2) $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$