iCourse·教材
高等学校通识课程系列

数学大观

李尚志 著

A First Glance
at Math

高等教育出版社

iCourse·教材
高等学校通识课程系列

A First Glance at Math

李尚志 著

数学大观

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是作者主讲的中国大学视频公开课“数学大观”的教材。适合于作为大学理工文管各专业数学文化通识课程的教材，以及向各不同层次、不同职业的读者传播数学文化的科普读物。

“数学大观”得名于范仲淹的文学名篇《岳阳楼记》中“此则岳阳楼之大观也”。既然是大观，主要目的就不是传授数学的“剑法”，而是展示数学的“兵法”和战略。希望引起读者对数学的兴趣，并对数学的思想方法及应用有所了解。对于正在或即将学习微积分、线性代数等大学数学基础课程的大学生、中学生及其他读者，则希望对他们的学习起到导航作用。

本书不是用空洞的说教强迫“我们爱数学”，而是用生动的故事展示“数学爱我们”。故事涉及工农兵学商音乐美术体育旅游各行各业，儒佛道三教九流诸子百家，文史哲诗词歌赋武侠各门各派。所有的故事围绕一个主题——数学的威力和魅力。

图书在版编目（C I P）数据

数学大观 / 李尚志著 . -- 北京 : 高等教育出版社，2015. 8

iCourse · 教材 . 在线开放课程系列

ISBN 978-7-04-043089-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 141145 号

策划编辑 李　茜　　责任编辑 李　茜　　封面设计 张志奇　　版式设计 王艳红
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 高　歌　　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市密东印刷有限公司
开　　本 787 mm × 1092 mm 1/16
印　　张 12.75
字　　数 190 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015年 8 月第 1 版
印　　次 2015年 8 月第 1 次印刷
定　　价 27.80 元

物 料 号 43089-00

前　言

从小学到中学、到大学，学生都要学习数学。

但是，很多学生讨厌数学，害怕数学，数学在他们心目中是一个丑八怪，一个恐怖分子。丑八怪还好一点，你不看他就行了。恐怖分子更可怕，你不看他，他要管你，卡着你的脖子：中学生数学考不好就上不了大学，大学生数学考不好就拿不到毕业证。

数学真的那么丑陋，那么可怕吗？不是！数学本来是一个魅力十足的美人，一个威风八面的英雄。可是，在我们的数学教育中，不断给她涂脂抹粉，搽这样霜那样水，甚至整容，割眼皮隆鼻子，将数学变成了令人讨厌和恐怖的形象。数学工作者和数学教师的职责，不是给数学涂另外的脂和粉，搽另外的霜和水，整容成另外的形象，而是让数学“恢复出厂设置”，素面朝天面对世人，让更多人看到数学的本来面目，欣赏数学固有的魅力，并借助于数学的威力为人类服务。

要达到这个目的，需要众多的数学工作者和数学教师在不同的数学课堂共同为之努力。本课程的目的，是为实现这个目标做出贡献。达到这个目标并不容易，但只要朝这个目标不断前进而不是背道而驰，就是好的。

本课程最开始是对文科研究生开设的通识课程。后来扩大到理工文管各个不同专业不同层次的学生，包括研究生和本科生。2012 年 5 月作为中国大学视频公开课上网，受到广大观众的欢迎。从小学数学教师到大学教授、科技工作者，不同层次、不同行业的观众都从中得到了各自的收获。

本课程名曰数学，必然要讲授数学知识，必然要计算。从小学到中学，学生学习数学知识和算法的课程已经很多，大学和研究生阶段还有更多，没有必要开一个新的同类课程去凑热闹。因此，本课程的目的不是为了教会学生某种算法，传授某方面的知识，而是针对很多学生害怕数学、讨厌数学的客观情况，首先是希望尽量引起学生对数学的兴趣。即使不能引起兴趣，退而求其次，能够减少对数学的仇恨也好。

怎样引起兴趣和减少仇恨？我在为视频公开课“数学大观”写的推介词中是这样说的：

踢足球的人是少数，欣赏足球的人却很多。本课程不是教少数人“踢”数学，而是帮助多数人 (包括“踢”数学的人) 欣赏数学。本课程不是用空洞的说教强迫“我们爱数学”，而是用生动的故事展示“数学爱我们”。数学的故事，远在天边，近在眼前。峨眉山的佛光宣讲连续函数，哈尔滨的面

条吃进一维空间。康定情歌高唱等比数列, 宾馆台灯照出圆锥曲线。张三丰教太极剑, 抽象指挥具体。独孤求败写教材, 简单才是正宗。

用生动的故事讲数学, 引起学生对数学的兴趣, 体会数学的思想方法, 不仅是本课程的指导思想, 也是我 42 年教师生涯形成的指导思想。这 42 年中我所做的主要事情, 就是积累了一批这样的故事。我在 2011 年出版的《线性代数》教材的内容简介中, 这样描述这些故事:

本书不是"奉天承运皇帝诏曰"从天而降的抽象定义和推理, 而是一部由创造发明系列故事组成的连续剧。每个故事从颇具悬念的问题开始, 在解决问题的过程中将所要学习的知识一步一步"发明"出来。

42 年前我在偏僻山区教公社小学, 现在是在繁华都市教名牌大学, 教学内容和学生程度相差悬殊, 但用生动的故事来讲数学这个指导思想却一脉相承几十年不变。如果说有改变, 那就是对这个指导思想的认识由朦胧变得明确, 由不自觉变得自觉, 在这个指导思想下形成的故事越来越精彩, 故事对于数学的表达和阐述越来越贴切, 越来越接近"随风潜入夜, 润物细无声"的理想境界, 故事组成的连续剧越来越具有系统性。简而言之, 前进方向四十年不变, 路程越走越远。

本书就是由这样的故事组成的连续剧, 剧情涉及工农兵学商、音乐、美术、体育、旅游各行各业, 儒佛道、三教九流、诸子百家, 文史哲、诗词、歌赋、武侠各门各派, 所有的故事围绕一条主线 —— 数学。

本课程和本书讲的实际上是数学文化。何谓数学文化? 古今中外很多圣人、贤人、专家、学者给出了很多定义和描述。但我情愿用一句另类的土话来描述: 数学文化, 就是《九阴真经》的上篇。《九阴真经》是金庸武侠小说《射雕英雄传》中描述的一本至高无上的武学经典著作。为了保密, 防止被一个人得到了全本《九阴真经》, 练成无人能制约的天下第一武功, 这本书被分成上下篇分别保存。上篇讲 idea(指导思想), 下篇讲 technique (具体动作), 只得到半本不能练成高水平的武功。例如, 梅超风夫妇偷到下篇, 练成九阴白骨爪, 走火入魔终究失败。我用《九阴真经》上篇来形容数学文化, 就是说数学文化是讲指导思想而不是传授具体招数, 不是讲授具体数学知识和算法的。学数学当然要学 technique(具体知识和算法)。但是, 有许许多多的课程讲 technique, 而讲 idea 的课程却比较缺乏, 这就是数学文化。缺乏 idea 指导的 technique, 就好像只会踩油门刹车把车开得很快, 却找不到正确的方向和路线, 不能到达既定的目标, 反而可能南辕北辙离既定目标越来越远。

既然讲数学文化, 为什么课程名称不叫"数学文化"而叫做"数学大观"? 在范仲淹的名篇《岳阳楼记》中, 先从总体上描述岳阳楼的风景: "予观夫巴陵胜状, 在洞庭一湖。衔远山, 吞长江, 浩浩汤汤, 横无际涯; 朝晖夕阴, 气象万千。此则岳阳楼之大观也", 然后分别对"淫雨霏霏"和"春和景明"等不同情况详细地描述不同景观。但全文宣传的重点不是这些不同景观下的不同感受, 反而是超越这些不同感受的更高一级的大观: "先天下之

忧而忧，后天下之乐而乐”。本课程受此启发命名为“数学大观”，也是希望从总体上让学生对数学的思想方法有所体会，而不是传授具体的数学知识和算法。尽管课程内容是由一个个小故事组成的，每个小故事都涉及某个数学知识或算法，但课程的目的不是为了传授这些知识和算法，对学生的要求也不是“牢牢记住”“熟练掌握”这些知识和算法，而是通过这些故事体会数学思想方法，在思想的指挥下解决问题，而不是生搬硬套现成方法解决问题。就好比张三丰教张无忌太极剑，虽然教的是招数，教学的要求却不是记住这些招数而是忘掉这些招数，教招数的目的是为了让学生通过招数体会到其中蕴涵的“剑意”，在“剑意”的指挥下随心所欲使出招数去克敌制胜。这就是“大观”。本课程和教材也是这样，讲的故事都是引人入胜的数学问题，但不是为了教这些问题的现成解法，而是通过解决这些问题的故事让学生体会其中蕴涵的简单而精彩的思想，体验在这些思想指导下解决问题的过程。解决问题当然要用到具体知识和算法，但不一定要学习新的方法，而可以在新的简单思想的指导下用老方法解决新问题。例如，用中学甚至小学的方法解决大学问题，在这个过程中不知不觉发明出解决问题的“新”方法。这样的“新方法”其实就是大学教材中所要讲授的方法，前辈数学家早就发明过了，不是新的而是老的。但对于学生来说，这确实是新的，让他们自己重新发明一次，比让他们死记硬背要好得多。发明过程虽然是“虚拟”的，效果却是实在的——培养了学生的创造意识和能力，有利于他们将来进行真正的发明创造。其实，每门课程都应当让学生体验这种“虚拟发明”。但本课程由于课时较少，只能让学生观摩“虚拟发明”的总体方向和大致路线，详细路线和具体步骤则留给有兴趣的学生自己花时间去研究，或在各门具体课程中学习。

教学实践证明，从范仲淹老先生那里借来的“大观”这个名称受到了不少学生的欢迎。北京航空航天大学法学院一位学生在课后体会中这样说：

“犹记得开学伊始，当我们面对全无了解的待选课程时，‘数学大观’这个名字第一时间地赢得了我的好感。何谓‘大观’？一谓人所瞻仰，二谓宏远之观察，再谓盛大壮观的景象。将数学与如此具有神采的古语相结合，又布化和归化得这般形象和贴切，使人脑中顿生写意画面，我在悠悠十余载的求学道路上还是第一次遇到。当时我就暗自忖度，具有如此人文情怀的老师，想必不会是板着生硬面孔不苟言笑、只管灌输解题思路和考试策略的学究吧。

果然，第一节课便验证了我的想法。老师先是讲解了这一课程的定位和教学目的，然后解释了课程的命名经过，进而自精心设计的浅显例子着手由浅入深地开始讲解，通过现实世界中这种看似毫无关联的生活故事，来彰显生动的数学思维逻辑。数学课居然可以自然地荟萃世间万事万象，道佛儒教、武侠风云、诗歌音乐、见闻逸事皆可贯穿其中。让我们得以觉察，原来在我们生活的每时每刻每处每景，或抽象或具体，都有数学的存在

正等着我们去发现。从宏大叙述到微观论证，老师将数学汇聚的百态这样地娓娓道来，的确是蔚为大观。可见我们的课程丝毫没有辜负‘数学大观’这一动人心弦的名称，‘盛名之下，庶几无虚’，堪称真正的名副其实。”

本课程和教材定位于面向理工文管各不同专业、不同层次的学生，希望让他们都有收获，必然面临众口难调的问题。文科的学生只要“外行看热闹”听听故事就行了，理工科甚至数学专业的学生还必须“内行看门道”，从故事中学到几招真功夫。如果理工科学生也只是到本课程来“外行看热闹”，回避了大学数学的具体内容，离开本课程之后还得到高等数学或者线性代数课上去受苦受难，还不如在本课程给他们提供更多的帮助，让他们更能胜任这些课程的学习。本教材在最后两章对微积分和代数课程进行了导航，介绍了其中最关键的内容。当然不是按照教科书的方式按部就班地传授知识，而是尽量在故事中“随风潜入夜”，将最重要的思想方法以最简单的方式呈现出来。其中难免有推理有计算。书中的推理尽量讲思路，书中的计算尽量借助于计算机给出答案 —— 这也符合实际应用的需要。不喜欢繁琐计算和推理的读者可以直接将这些部分跳过去，只要欣赏故事就行了，就好比看足球时可以不看脚法而只管胜负和比分。总之，不同的读者可以从本书中欣赏不同的部分，就好比在餐馆吃饭时不同的顾客可以点不同的菜。另一方面，同样的部分也可以有不同的欣赏方式，有的走马观花，有的下马看花，有的还要亲自体验种花的过程。不奢望大家都能欣赏所有的部分，只要每位读者都能找到自己喜欢的部分并且有收获，编者就很满意了。

讲这门课的老师和学这门课的学生都关心一个问题：这门课程怎么考试？按惯例，最有可能采用的考试模式是从教材中选几个数学问题来考学生会不会解答、或者选几首数学诗来考学生会不会背诵。如果真的这样考试，达到的效果很可能是制造或加深学生对数学题和数学诗的仇恨。我在课程的第一分钟就宣布要“引起学生对数学的兴趣，或者减少对数学的仇恨”，还说：“如果一门数学课上课之前学生对数学有神秘感，上课之后变成了仇恨感，这样的课还不如不上。”如果上完课之后却用这样的考试方式来加深仇恨，岂不是宣布自己讲的那些冠冕堂皇的话都是骗人的，自己打自己的耳光？另一种考试模式是，出填空题让学生填写对数学是爱还是恨，出问答题让学生回答“你学数学快乐吗?”效果很可能是逼迫学生说假话，这样的课也不如不上。

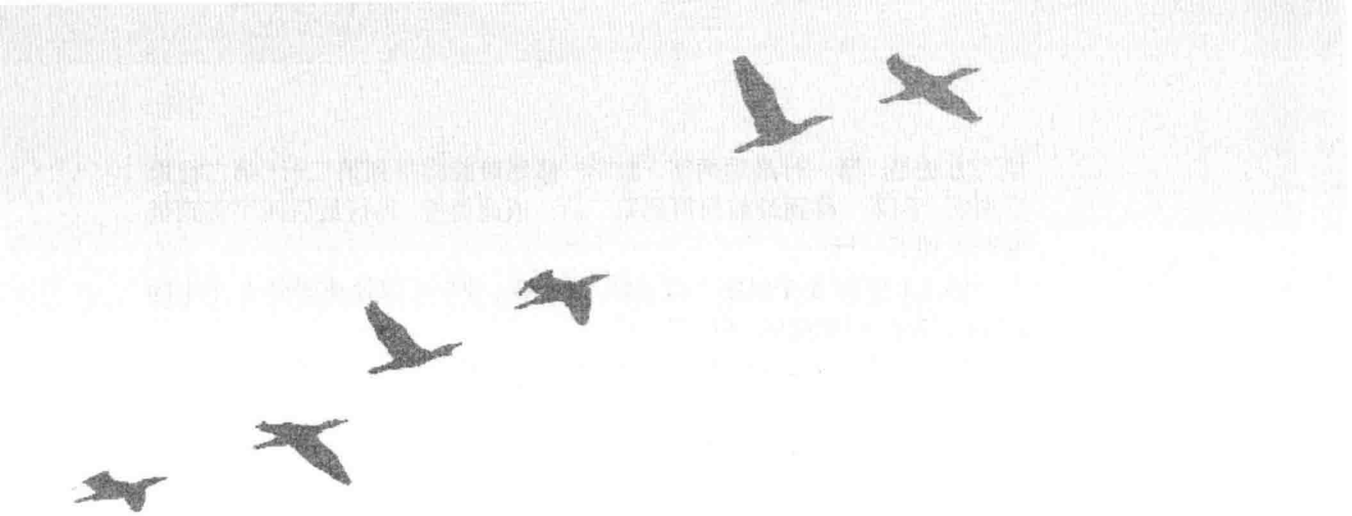
但是，既然上课，就必须给出能够反映学生学习效果的真实成绩。我选了一个最老生常谈的考试方法：写一篇文章实话实说学习本课程的收获体会，或者自己讲述一个生活中的数学故事。有的学生问：写多少字？我回答：“如果限制至少要写多少字，那就是明知你们不会有收获硬要你们说假话。我自信你们一定有收获，把真实收获写出来就行，写成多少字都可以。如果你能像‘床前明月光，疑是地上霜。举头望明月，低头思故乡。’那样用 20 个字写出真实感受，你的成绩就是特优。估计你的水平还没那么

高, 那就多写几句把自己的收获说清楚。” 事实证明, 大部分学生都写出了富有真情实感的文章, 生动可信地讲述了各自不同的收获。每届学生都写出了一些高水平的文章, 不仅谈到数学, 还由本课程联想发挥, 对教育和教学方式的改革发表了很好的见解。还有的学生提供了生活中的数学的精彩案例。例如, 法学院一个学生针对美国著名的辛普森案件中律师的辩词, 恰当地利用概率统计的数学知识进行了有力的反驳, 堪称佳文。

“写收获体会” 最容易出现的弊病是学生到网上下载一篇相关的文章来交差。如果他到网上下载一篇文章读了真有收获, 并且与本课程的目标一致: 引起对数学的兴趣, 对数学的思想方法有所了解, 应当允许和赞扬。问题是, 从网上下载的文章根本不看, 不知道自己下载的什么, 下载的内容基本上都比我讲的课难懂得多, 他们不可能懂, 也没有必要懂。对这样的论文理所当然应当判为不及格。我还给他们发电子邮件指出: “本来是希望减少你对数学的仇恨, 如果这个目的达不到, 只好再退一步, 让你明白学数学不准造假。” 还有一种论文讲述自己从小到大与数学考试的恩怨, 考过了如何高兴, 考不过如何悲伤。这样的高兴和悲伤可以理解, 但绝不是本课程的收获体会。本课程的目标恰好相反, 要让学生跳出考试的恩怨, 直接体会数学的威力和魅力, 因此这样的论文也不能及格。发现这些情况之后, 我不但在数学大观第一堂课就向学生明确宣布考试要求是实话实说本课程的收获体会, 而且反过来明确宣布了两种不及格的论文: 1. 从网上下载自己也不懂的东西。2. 不是本课程的收获体会, 例如数学考试成败的故事。有个学生在论文中讲述了一个故事: 第一次上数学大观课程, 认定了数学是不可能有趣, 戴了一个耳机听英语。后来发现其他同学听课时突然笑起来了, 很奇怪为什么数学课还能使人发笑, 摘掉耳机想听听是怎么回事, 以后再也没有戴上耳机。由此我联想到, 那些从网上下载文章的, 大概也是预先认定了数学不可能有趣, 下决心不听课, 但没有像这位同学那样 “摘下耳机” 幡然悔悟。我给了他们不及格, 让他们补考, 但既不允许他们再次造假, 也不可能给他们重新上课, 就给他们一个机会: 到网上读我的博客中的数学聊斋, 其中包含了我上课的部分内容。他们读了之后确实改变了对数学的看法, 减少了仇恨, 写出了真实而生动的收获体会。现在的机会就更多: 上网进入中国大学视频公开课看我讲课, 或者直接阅读本教材, 扫描书中内置的二维码, 也可迅速、便捷地观看重点内容讲解。

李尚志
2015 年 3 月

目　录



第 1 章

数学爱我们

§1.1 幻方 —— 简单攻克复杂

例 1.1 图 1–1 是一个 5×5 的方格表, 第一行填上了 “我、们、爱、数、学” 这 5 个字. 试在其余各行以适当顺序填上这 5 个字, 使每行、每列、每条对角线上都是这 5 个字的某个排列.

我	们	爱	数	学

图 1–1

解 图 1–2 是一个合乎要求的答案.

我	们	爱	数	学
数	学	我	们	爱
们	爱	数	学	我
学	我	们	爱	数
爱	数	学	我	们

图 1–2

填写方法是: 第一行最后两字 "数学" 移到最前面得到第二行; 第二行最后两字 "们爱" 移到最前面得到第三行. 依此类推, 每行最后两字移到最前面得到下一行. □

例 1.1 中的 5 个汉字 "我、们、爱、数、学" 可以换成另外 5 个不同的字或符号, 例如换成 "甲、乙、丙、丁、戊", "a,b,c,d,e","0, 1, 2, 3, 4". 替换之后就变成一批新的题目. 不过这些 "新" 题目与旧题目其实是一回事, 旧题目答案 (图 1–2) 各行填写的 "我、们、爱、数、学" 这 5 个字相应地换成另外 5 个字或符号, 就得到 "新" 题目的答案.

将图 1–2 中的 5 个汉字换成 "0, 1, 2, 3, 4" 这 5 个不同的数字, 就得到图 1–3.

$A=$

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

图 1–3

图 1–3 中每行、每列、每条对角线上的 5 个数都是 $0,1,2,3,4$ 的一个排列, 这 5 个数还可以相加得到同样的和 $0+1+2+3+4=10$. 很自然联想到关于 5×5 方格表的另一个问题:

例 1.2 (5 阶幻方) 将 $1,2,\cdots,25$ 这 25 个数按适当的顺序填入 5×5 方格表的 25 个位置, 使每行、每列、每条对角线上的 5 个数之和相等.

解 图 1–3 的表 A 中每行、每列、每条对角线上的 5 个数之和也相等, 只不过表中的 25 个数不是 $1,2,\cdots,25$, 而是将 $0,1,2,3,4$ 这 5 个数重复了 5 遍. 将 A 关于第 3 列作轴对称 (将每行的 5 个数颠倒顺序排列) 得到新的 5×5 方格表 B, 每行、每列、每条对角线上 5 个数的和仍相等. 将 A 的每个数乘 5, 再与 B 的数对应相加, 得到的新表 $C=5A+B$ 的每行、每列、每条对角线上 5 个数之和仍相等, C 中的数是 $0,1,2,\cdots,24$ 的一个排列:

$$5\times\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3&4\\\hline 3&4&0&1&2\\\hline 1&2&3&4&0\\\hline 4&0&1&2&3\\\hline 2&3&4&0&1\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 4&3&2&1&0\\\hline 2&1&0&4&3\\\hline 0&4&3&2&1\\\hline 3&2&1&0&4\\\hline 1&0&4&3&2\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 4&8&12&16&20\\\hline 17&21&0&9&13\\\hline 5&14&18&22&1\\\hline 23&2&6&10&19\\\hline 11&15&24&3&7\\\hline\end{array}$$

A $\qquad$ B $\qquad$ C

将 C 中各数同加 1 就得到由 $1,2,\cdots,25$ 组成的 5 阶幻方:

5	9	13	17	21
18	22	1	10	14
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
12	16	25	4	8

□

例 1.2 的幻方设计, 用到的 “知识点” 似乎只有小学算术. 只要会算整数的加法, 会判断加法得到的和是否相等, 就能当 “考官”, 判断别人设计的幻方是否正确. 但要自己当 “考生” 凑出一个幻方, 不但对小学生是难题, 对大学教授也是难题. 稍加分析就发现, 主要的困难在于 25 个数 $1,2,\cdots,25$ 太多了, 填到表中要让每行、每列、每条对角线一共 12 个和相等, 要求的条件也太多, 难以兼顾. 相比起来例 1.1 就容易得多. 例 1.2 的解答方法的精彩之处在于：利用较容易的例 1.1 的答案, 组合出了相当困难的例 1.2 的答案. 这正是数学中最常用的思想方法: 将困难的问题转化为容易的问题来解决!

例 1.1 是给小学生出的算术题, 题目中的五个汉字本来可以任意选择, 为什么偏偏选 “我们爱数学”? 想必是出题的人希望小学生在做算术题的时候接受一次思想教育, 培养对数学的爱. 为什么要进行这样的教育, 想必是因为他知道很多学生不爱数学, 害怕数学甚至仇恨数学. 如果大家都热爱数学, 就不必煞费苦心进行这样的教育了. 这就是老子的《道德经》中说的道理: “大道废, 有仁义 $\cdots\cdots$. 六亲不和, 有孝慈; 国家昏乱, 有忠臣.” 之所以提倡仁义, 是因为道德已经沦丧了; 之所以提倡孝慈, 是因为六亲不和了; 之所以需要比干这样的忠臣, 是因为有纣王这样的昏君. 所以魏徵说过: 千万不要说他是忠臣, 说他是忠臣就等于骂皇帝是昏君.

在算术题中趁机宣传 “我们爱数学”, 精神可嘉. 但如果学生在数学课程的学习和考试中受苦受难甚至苦大仇深, 要说 “爱” 可真不容易. 如果学生处处感到数学并不可爱反而可恨可怕, 或者只有 “我们爱数学” 而数学不爱我们, 如何爱得起来?

将 “我们爱数学” 填入表中, 颠来倒去也只有这 5 个字. 换成 $0,1,2,3,4$, 经过乘法和加法运算就变出 25 个不同的数, 得到幻方. 将 25 个数组成的复杂幻方归结为 0 到 4 的 5 个数组成的简单幻方, 再由简单的 $0\sim4$ 幻方组合出复杂的 $1\sim25$ 幻方, 困难问题就迎刃而解了. 这个小小的例子, 展示的是数学的威力和魅力, 是 “数学爱我们”. 这样的威力和魅力不但数学有, 科学领域中比比皆是. 例如, 世界上的物质的种类多得不可胜数, 却都是由元素周期表上不到 120 种不同元素的原子组成, 更进一步归结为少数几种基本粒子 (质子、电子、中子) 组成, 这是科学的威力和魅力的一个经典杰作.

数学爱我们, 这是千真万确的! 大爱无言, 数学不说话, 数学的爱需要我们去体会, 数学教师和数学工作者有责任帮助学生和大众去体会. 数学的爱是博爱, 不偏爱任何人, 不偏爱阿基米德、欧几里得、牛顿、高斯和伽罗瓦, 不偏爱刘徽和祖冲之, 也不鄙弃我们中的任何一个人. 数学是宇宙间不以人的意志为转移的客观规律. 正如荀子所说, “天行有常, 不为尧存, 不为桀亡. 应之以治则吉, 应之以乱则凶.” 我们掌握了数学的客观规律, 可以顺应和利用客观规律为人类造福. 不掌握数学的客观规律, 数学不会吃亏, 我们吃亏.

再回到例 1.2 来总结成功的经验, 看我们是怎样将复杂变为简单, 困难变为容易的. $1 \sim 25$ 这 25 个数太多, 太复杂, 我们将其中每个数 d 除以 5 得到商和余数, 其中余数在 $0 \sim 4$ 的范围内. 为了使商也在这个范围内, 将 $1 \sim 25$ 的每个数 d 减 1, 变成 $0 \sim 24$ 范围内的 $c = d-1$. c 被 5 除的商 a 和余数 b 都在 $0 \sim 4$ 的范围内, c 被分解为 $c = 5a+b$ 的形式. 让所有的商 a 和余数 b 各组成一个方格表 A, B, 这两张表的每行、每列、每条对角线上的 5 个数 $0,1,2,3,4$ 之和都相等, 则由 c 组成的表 $C = 5A+B$ 中的所有这些和也就都相等. 再将表 C 中各数同加 1 就得到了由 $1,2,\cdots,25$ 组成的幻方.

金庸的武侠小说《天龙八部》的主人公之一段誉, 由于机缘巧合得到一本武功秘笈, 学的第一招就是逃命功夫 "凌波微步". 为什么先学逃跑? 别的武功一时练不会, 先学逃跑, 遇到强敌, 打不赢就跑, 先保存自己. 也不能老是逃跑, 而是跑到打得赢的地方再打. 遇到问题难以解决, 转化成容易的问题来解决, 也是 "打不赢就跑, 跑到打得赢的地方再打". 这样的思想方法也可以称为 "凌波微步". 25 个整数组成的幻方难以设计, 变成 $0,1,2,3,4$ 来设计, 这也是 "凌波微步".

有一个问题值得注意: 为什么由 0,1,2,3,4 组成的 A, B 得到的 $C = 5A+B$ 正好由 0 到 24 的 25 个整数组成? 既然 A, B 中最小的数都是 0, 最大的数都是 4, $C = 5A+B$ 中的数肯定在 $5\times 0+0=0$ 与 $5\times 4+4=24$ 之间. 只要 $C = 5A+B$ 中的 25 个数不重复, 就一定恰好取遍 0 到 24 的 25 个不同整数. 我们来看 C 中任何两个不同位置的数 $c_i = 5a_i+b_i$ 与 $c_j = 5a_j+b_j$ 为什么不相等. $0 \sim 24$ 的每个整数 c 被 5 除得到唯一的商 a 和余数 b, 组成的数组 (a,b) 可以看成 $c = 5a+b$ 的坐标. 只要坐标 (a_i,b_i) 与 (a_j,b_j) 不同, 两个整数 $c_i = 5a_i+b_i$ 与 $c_j = 5a_j+b_j$ 就不同. 观察例 1.2 中的 A, B 可以发现: 虽然 $0 \sim 4$ 中的每个数 a 在表 A 中都出现 5 次, 但这 5 个相同的 a_i 在 B 中的对应位置的 b_i 都各不相同. 例如, 商 $a=0$ 在表 A 的 1 至 5 行分别出现在第 $1,3,5,2,4$ 列, 而在表 B 中的这些位置的余数 b 分别为 $4,0,1,2,3$, 各不相同. 我们保证了 $5A+B$ 的不同位置的坐标 (a_i,b_i) 与 (a_j,b_j) 不同, 得出的 c_i 与 c_j 也不同, 保证了 C 中 25 个数没有重复, 取遍 $0 \sim 24$ 的 25 个不同整数.

例 1.2 的问题可以推广到任意正整数 n: 在 $n\times n$ 的方格表中按适当顺序填入从 1 到 n^2 的前 n^2 个正整数, 使每行、每列、每条对角线上 n 个数的和相等. 最简单的情况是 $n=3$:

例 1.3 (3 阶幻方) 将前 9 个正整数 $1,2,\cdots,9$ 按适当顺序填入 3×3 的方格表中, 使每行、每列、每条对角线上的 3 个数之和相等.

解 仿照例 1.2 的方法, 先在 3×3 的方格表的每行按适当顺序填入 $0,1,2$, 使每行、每列、每条对角线上的三个数的和相等, 得到方格表 A. 再将 A 作轴对称得到 B. 由 $C = 3A+B$ 得到由 0 到 8 的 9 个数组成的幻方, 再将各数同加 1 得到 $1 \sim 9$ 组成的三阶幻方 D:

$$3\times\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&0\\\hline 0&1&2\\\hline 2&0&1\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&2&1\\\hline 2&1&0\\\hline 1&0&2\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&8&1\\\hline 2&4&6\\\hline 7&0&5\\\hline\end{array}\xrightarrow{+1}D=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&9&2\\\hline 3&5&7\\\hline 8&1&6\\\hline\end{array}\qquad\square$$

例 1.3 仿照例 1.2 构造 5 阶幻方的方法得出了 3 阶幻方，但也不是完全照搬例 1.2 的方法. 例 1.2 中的 A 的每行、每列、每条对角线上都是 $0,1,2,3,4$ 的一个排列，因而和相等. 例 1.3 不可能做到每行、每列、每条对角线都是 $0,1,2$ 的排列，其中有一条对角线是 1 重复三次，不过这三个 1 之和 1+1+1 仍与其他的和 $0+1+2$ 相等. 实际上，例 1.3 构造 A 的方法是先将 $0,1,2$ 的平均值 $\dfrac{0+2}{2}=1$ 重复 3 次填在一条对角线上，再从这些 1 出发在每行填上 $0,1,2$ 的某个轮换. 这个方法也可以照搬到 5 阶幻方. $0,1,2,3,4$ 的平均值是 $\dfrac{0+4}{2}=2$，先将 2 重复 5 次填在一条对角线上，扩充成

$$A=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&3&4&0&1\\\hline 1&2&3&4&0\\\hline 0&1&2&3&4\\\hline 4&0&1&2&3\\\hline 3&4&0&1&2\\\hline\end{array}$$

再按照例 1.2 的方法得到 $1\sim 25$ 组成的 5 阶幻方. 进一步，用这个方法可对任意奇数 $n\geqslant 3$ 构造出 n 阶幻方. 你不妨对 $n=7$ 的情况自己试一试. 当 n 为偶数时 $0,1,\cdots,n-1$ 的平均值 $\dfrac{0+(n-1)}{2}$ 不是整数，因此这个方法不能用. 但仍能够由每行 $0\sim n-1$ 的简单幻方 A,B 组合出 $0\sim n^2-1$ 的整数组成的幻方 $C=n\times A+B$，再加 1 得到 1 到 n^2 组成的 n 阶幻方. 例如:

例 1.4 构造 4 阶幻方.

$$4\times\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3\\\hline 3&2&1&0\\\hline 3&2&1&0\\\hline 0&1&2&3\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&3&3&0\\\hline 1&2&2&1\\\hline 2&1&1&2\\\hline 3&0&0&3\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&8&12&13\\\hline 14&11&7&2\\\hline 15&10&6&3\\\hline 4&5&9&16\\\hline\end{array}$$

$\square$

据说，在大禹时期，洛河里浮出一只神龟，背上刻着一幅图，就是 3 阶幻方的答案 (图 1–4). 这当然只是传说而不是历史，但却说明了中国古代很早就开始研究幻方. 前人对幻方有各种各样的构造方法，可以写成很厚的书. 我们不是研究幻方的，没有必要死记硬背前人的解法. 本书给出的解法也是醉翁之意不在酒，不是为了研究幻方，而是以此为例说明数学的思想方法：将复杂的问题转化为简单问题来解决. 懂得了这个思想方法，你可以解决许许多多别的问题.

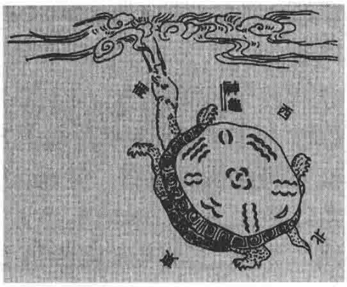


图 1–4(1)

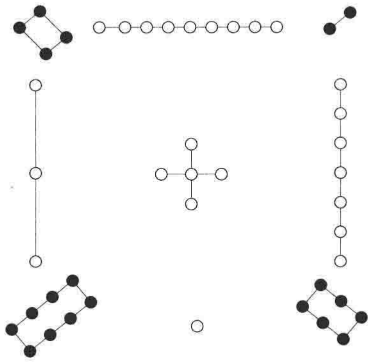


图 1–4(2)

§1.2　一网打尽 3 阶幻方

例 1.5　由例 1.3 得到的 3 阶幻方 D 构造出尽可能多的 3 阶幻方.

解　将例 1.3 得到的 3 阶幻方 D 绕中心沿逆时针方向旋转 $90°, 180°, 270°$ 可以得到 3 个新的 3 阶幻方. 将 D 关于每条对称轴作轴对称可以得到一个新的 3 阶幻方. D 有四条对称轴: 两条对角线, 对边中点的连线 (过中心分别穿过第 2 列、第 2 行), 做轴对称可得到 4 个新的幻方. 这样就可以得到 7 个新的 3 阶幻方, 连同原来的 D, 共是 8 个 3 阶幻方. 例如, 下面就是由旋转和轴对称得到的两个幻方:

逆时针方向旋转 270°

8	3	4
1	5	9
6	7	2

关于第 2 列对称

2	9	4
7	5	3
6	1	8

请你自己写出通过旋转和轴对称所能得到的其余幻方.　□

例 1.5 中通过旋转得到的新幻方还可以再做轴对称, 然后再旋转, 再对称. 不断地做下去, 是否能够得到更多的新幻方呢? 你不妨自己试一下, 就会发现: 这样得到的 "更多" 的幻方与已经得到的 8 个幻方是重复的, 始终不能再越雷池一步. 经过多次失败之后, 应当反思一下: 9 个整数的不同排列本来就只有有限多个, 不可能超过 9!, 其中大量的不符合幻方的要求, 有可能最多就是只有 8 个. 你的任务就变成: 或者证明 8 个已经是最多的, 不可能超过; 或者还能再找出几个, 然后证明你找出的已经达到最大限度, 不能再超过.

有的人狂妄地认为: 数学家证明了的结论我偏要推翻, 我就打倒了所有的数学家成了世界第一. 还用一句古语 "有志者事竟成" 来鼓舞自己坚持到底. 须知还有另一句古语叫做 "识时务者为俊杰". 识时务就是认识到了客观规律. 顺应客观规律去当 "有志者", 才能做到 "事竟成". 有的 "事竟成" 是坚持到底, 有的 "事竟成" 是回头是岸, 有的 "事竟成" 是改弦更

张, 到底哪一种能够 "事竟成", 要靠 "识时务", 也就是靠正确认识客观规律, 包括正确总结经验教训. 如果违背客观规律死不回头还自以为是 "有志者", 那其实是 "带着花岗岩头脑去见上帝". "识时务者为俊杰" 经常被叛徒卖国贼拿来为自己的叛变行为辩护. 但是, 谁是 "识时务者" 不由花言巧语或神仙皇帝说了算, 而是由客观规律说了算. 那些叛徒卖国贼都已经身败名裂, 历史已经证明了他们不是 "识时务者". 反过来也不能因为叛徒卖国贼喜欢用这句话就说这句话不对. 数学上的 "识时务" 大多数情况下并不需要长期的历史去鉴别, 而是根据已经由长期历史鉴别为正确的基本逻辑和规律经过推理来鉴别. 一个最有说服力的例子是: 法国数学家伽罗瓦 20 岁就因决斗而死, 他的论文颠覆了所有数学家关于代数方程的观念, 当时最有名的数学家都不能理解, 他死后十几年论文才公之于世, 又经过几十年才终于获得数学界的承认, 他成为告别古典代数、开创近世代数的 "祖师爷", 就好比欧几里得是开创几何学的祖师爷一样. 伽罗瓦是一介草民, 既无社会地位也无学术地位, 居然敢于向最权威的数学家挑战, 为什么能成功? 就是因为不论多大的数学权威, 都服从共同的逻辑和数学规律, 按照这些逻辑和规律来鉴别, 不得不承认伽罗瓦的真理. 就好比不论是贝利还是马拉多纳, 都服从足球场上共同的游戏规则, 都有可能被无名小卒拉下马, 还输得心服口服. 如果你不服从足球场上的规则, 哪怕你用枪逼着马拉多纳承认你是冠军, 你仍然不是足球赛冠军.

例 1.6 由一个 3 阶幻方经过旋转和轴对称总共能得到多少个不同幻方?

解 幻方的各个数排成正方形. 旋转和对称将正方形的四个角仍变成角, 四条边仍变成边, 两条对角线仍变成对角线. 因此, 角上的数仍变到角上, 同一条边上的三个数仍变到同一条边上, 同一条对角线上的三个数仍变到同一条对角线上.

以例 1.3 的幻方 D 为例, 四个偶数在四个角上. 特别地, 2 在角上, 经过旋转和轴对称仍在角上. 将经过旋转和轴对称所能得到的所有幻方按 2 的位置分组, 2 在同一个位置的为同一组, 一共有 4 组 (2 的位置分别在右上角、左上角、左下角、右下角). 只需算出同一组有几个不同的幻方, 就可以知道幻方的总数:

以 2 在左上角的一组为例:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

在这一组中, 2 被固定在左上角,2 所在的对角线上的另外两个数 5,8 也被固定不变. 唯一能够变动的是: 2 所在的两条边 (第 1 行和第 1 列) 可以相互变动, 也就是关于 2 所在的对角线做轴对称变成另一个幻方. 这两条边再固定之后, 幻方的 4 条边上的 8 个数就全部固定了, 幻方也就被固定了.