

电磁流体动力学方程与 奇异摄动理论

王 术 冯跃红 著



科学出版社

现代数学基础丛书 158

电磁流体动力学方程与 奇异摄动理论

王 术 冯跃红 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要介绍奇异摄动理论和电磁流体动力学方程组的适定性与渐近机理,严格地建立了不同流体动力学模型之间的本质联系和电磁流体动力学模型的多尺度结构稳定性理论. 主要内容包括: 奇异摄动理论与渐近匹配方法,边界层理论与多尺度结构稳定性理论,电磁流体和经典流体之间的本质联系,电磁流体动力学方程组的长时间渐近形态、拟中性极限和零张弛极限,等离子体物理科学中 Euler/Navier-Stokes-Poisson 方程组的大时间渐近性与衰减速率、好坏初值情形下的拟中性极限、耦合的零粘性和拟中性极限,以及半导体漂流扩散方程的拟中性极限与边界层、初始层、混合层多尺度结构稳定性等.

本书适合偏微分方程、实分析、泛函分析、计算数学、数学物理、控制论等方向的研究生、教师以及科研人员阅读参考,也可作为数学系和工科相关专业高年级本科生以及研究生教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

电磁流体动力学方程与奇异摄动理论/王术,冯跃红著. —北京:科学出版社, 2015.7

(现代数学基础丛书)

ISBN 978-7-03-045253-5

I. ①电… II. ①王… ②冯… III. ①电磁流体力学-方程-奇摄动-研究
IV. ①O361.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 170227 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 倩 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏立印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2015 年 8 月第一次印刷 印张: 20 3/4

字数: 418 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》编委会

主 编：杨 乐

副主编：姜伯驹 李大潜 马志明

编 委：（以姓氏笔画为序）

王启华 王诗晟 冯克勤 朱熹平

严加安 张伟平 张继平 陈木法

陈志明 陈叔平 洪家兴 袁亚湘

葛力明 程崇庆

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用。许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益。

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了10余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着。1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会。当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述。据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷。它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用。

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍。既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新。

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科。我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科各个领域。

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动。它获得了广大读者的喜爱。我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献。

杨 乐

2003年8月

前 言

本书是电磁流体动力学方程的渐近机理与多尺度结构稳定性, 以及奇异摄动理论方面的一本专著.

本书主要介绍奇异摄动理论和电磁流体动力学方程组的适定性理论与渐近机理, 严格地建立了不同流体动力学模型之间的本质联系和电磁流体动力学模型的多尺度结构稳定性理论. 全书共 5 章: 第 1 章是引言, 主要概述电磁流体动力学模型, 形式地建立了电磁流体动力学模型和 kinetic 理论中 Boltzmann 方程之间的关系, 以及不同流体动力学模型之间的本质联系. 建立不同模型之间的基本方法是奇异摄动理论, 第 1 章也简介摄动方法的发展史. 在引言的最后给出本书的主要结构. 第 2 章是本书的预备知识, 介绍一些在偏微分方程有重要应用的基本不等式, 概述奇异摄动的基本理论和基本方法, 渐近匹配方法与流体动力学方程的边界层理论. 第 3 章介绍可压等熵和非等熵电磁流体动力学模型大时间衰减速率、拟中性极限和零张弛极限问题. 第 4 章给出等离子体 Euler/Navier-Stokes-Poisson 方程的大时间衰减速率估计, 以及好坏初值情形下 Euler/Navier-Stokes-Poisson 方程的解收敛到经典的不可压 Euler 方程的解. 第 5 章介绍半导体漂流扩散方程组的拟中性极限问题, 给出了绝热边界问题和接触边界问题的解到拟中性约化模型解的收敛性, 以及一般初值情形下半导体漂流扩散方程的边界层、初始层、混合层结构稳定性方面的结果.

本书曾在北京工业大学的偏微分方程研讨班中讲过多次, 王术的学生杨建伟博士、王可博士、吴忠林博士生、徐自立博士生、刘春迪博士生、王娜博士生等都曾提出过宝贵意见, 在此一并致谢. 同时, 本书的部分内容来自于作者和合作者的一些论文, 在此向合作者表示衷心的感谢. 在本书出版之际, 王术借此感谢他的老师叶其孝教授、谢春红教授、肖玲研究员、辛周平教授和 Peter A. Markowich 教授, 感谢他们的无私奉献, 感谢他们在学术研究中给予的悉心指导和在生活中给予的帮助和关心.

本书的出版得到国家自然科学基金、北京市长城学者项目、首都社会建设和城市管理协同创新中心和北京市自然科学基金重点项目 (B 类) 的资助支持, 在此表示感谢. 同时王术感谢妻子李世红的长期支持、生活上的照顾和对本书的文字润色.

本书作为偏微分方程方面的一本专著, 适合偏微分方程、实分析、泛函分析、计算数学、数学物理、控制论等方向的研究生、教师以及科研人员阅读参考, 也作

为数学系和工科相关专业高年级本科生以及研究生的教材或教学参考书.

由于作者学识有限, 不妥、片面甚至疏漏之处在所难免, 欢迎专家和读者批评指正.

王 术 冯跃红

2015 年 4 月 10 日于北京工业大学

目 录

第 1 章	引言	1
1.1	电磁流体动力学模型概述	1
1.1.1	Boltzmann 方程	3
1.1.2	Maxwell 方程	8
1.1.3	形式的推导	10
1.2	摄动方法的发展史	13
1.3	本书的主要内容介绍	15
第 2 章	预备知识	18
2.1	不等式技巧	18
2.1.1	几个常用的不等式	18
2.1.2	Hardy 型不等式	21
2.1.3	其他不等式	24
2.2	奇异摄动方法介绍	27
2.2.1	正则问题和奇异问题	27
2.2.2	奇异摄动问题的近似方法	34
2.2.3	总结	43
2.3	流体动力学方程的边界层理论	44
2.3.1	一个边界层例子	44
2.3.2	Prandtl 边界层理论	45
第 3 章	电磁流体动力学可压缩 Navier-Stokes/Euler-Maxwell 方程的渐近机理	50
3.1	电磁流体动力学可压缩 Navier-Stokes/Euler-Maxwell 方程的大时间渐近性与衰减速率	50
3.1.1	等离子体双极等熵可压缩 Euler-Maxwell 方程组解的整体存在性	50
3.1.2	双极完全可压缩 Navier-Stokes-Maxwell 方程组整体光滑解的渐近行为	63
3.1.3	双极非等熵可压缩 Euler-Maxwell 方程组 Cauchy 问题整体光滑解的渐近性态	77
3.2	电磁流体动力学可压缩 Euler-Maxwell 方程的拟中性极限	107
3.2.1	e-MHD 的适定性及其主要结果	110

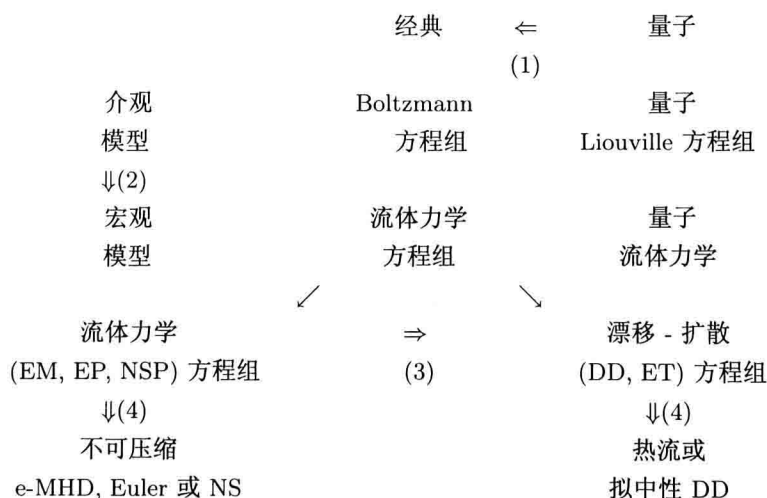
3.2.2	主要结果的证明	112
3.3	电磁流体动力学可压缩 Euler-Maxwell 方程的零张弛极限	132
3.3.1	本节的主要结果	133
3.3.2	误差方程与局部存在	134
第 4 章	等离子体可压缩 Euler/Navier-Stokes-Poisson 方程的渐近机理	142
4.1	可压缩 Euler/Navier-Stokes-Poisson 方程的大时间渐近性与衰减速率	142
4.1.1	全空间上带张弛项的 Euler-Poisson 方程的大时间衰减性	142
4.1.2	等离子体物理中的三维可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程组的渐近性	157
4.2	可压缩 Euler/Navier-Stokes-Poisson 方程的拟中性极限	170
4.2.1	可压缩 Euler-Poisson 方程的拟中性极限	170
4.2.2	可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程的渐近极限	205
第 5 章	半导体漂流扩散方程的拟中性极限	225
5.1	绝热边界问题	225
5.1.1	好初值问题	225
5.1.2	一般初值情形	263
5.2	接触 Dirichlet 边界问题	283
5.2.1	构造近似解和匹配渐近分析	285
5.2.2	收敛性结果及其证明	290
5.2.3	定理 5.2.1 的证明	292
参考文献		302
索引		311
《现代数学基础丛书》已出版书目		315

第 1 章 引言

本章介绍电磁流体动力学模型, 概述奇异摄动方法的发展历史等以及本书的主要内容. 主要内容包括: Boltzmann 方程、Maxwell 方程、流体动力学方程的推导过程, 以及摄动方法等.

1.1 电磁流体动力学模型概述

本节给出一系列描述半导体物理和等离子体的机理模型. 这些模型大致分为两大类^[98]. 这两类模型不同之处在于描述的层次, 包括动理学或介观层次表述与宏观层次表述. 第一类介观表述中使用对应相空间的分布函数, 第二类则基于诸如电量和电流密度等宏观量. 与气体动力学相似, 在一定的假设条件下, 宏观模型可以由动理学模型或介观模型导出, 同时在上述两种层次模型内都存在描述量子效应的量子力学模型. 下面回顾希尔伯特第六问题, 即电磁力学机制模型的渐近机制图:



在上述图中, 我们给出了模型概观示意图. 从物理而不必从数学的观点来看, 除流体力学方程组之外, 模型从上到下、从右到左变得更为简单. 从介观模型到宏观模型或流体力学模型标准的方法是距方法或流体动力学极限 (2). 从流体力学模型到能量输运模型或漂移-扩散模型的途径是所谓的松弛极限 (3). 从漂移-扩散

模型到扩散方程或从 Euler-Poisson (Navier-Stokes-Poisson) 模型到描述不可压流的 Euler (Navier-Stokes) 方程组的途径是拟中性极限 (4). 从量子模型到经典模型是用所谓的经典极限 (1), 那里取尺度化的 Planck 常数趋于零. 形式上, 上述关系是显然的, 但严格的证明却并非易事.

因为拟中性是半导体、等离子体中的一类基本的物理现象, 所以我们以拟中性极限为例来介绍渐近极限问题. 通过对 Euler-Maxwell 方程组取形式极限详细评论上述形式极限, 该方程组出现在电离层等离子体中^[4]. 这些证明将在第 3 章和第 4 章给出.

考察尺度化的单极 Euler-Maxwell 方程组^[4, 121]

$$\partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0, \quad (1-1)$$

$$\partial_t (nu) + \nabla \cdot (nu \otimes u) + \nabla P(n) = -n(E + u \times \gamma B), \quad (1-2)$$

$$\gamma \nu \partial_t E - \nabla \times B = -\gamma j, \quad \gamma \partial_t B + \nabla \times E = 0, \quad (1-3)$$

$$\nu \nabla \cdot E = \rho, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \rho = 1 - n, \quad j = -nu. \quad (1-4)$$

方程组 (1-1)-(1-4) 描述具有单位密度的静止离子一致背景下的等离子体物理中可压缩电子流动力学运动规律. n, j 与 u 分别表示电子密度、电流密度和电子速度. 场函数 E 和 B 分别表示电场和磁场强度. Maxwell 方程组中的 E 和 B 通过作用于电子的 Lorentz 力与 Euler 方程耦合. 无量数参数 ν 与 γ 可以通过合适的尺度互相独立选取. 物理上, ν 和 γ 分别与 Debye 长度以及 $\frac{1}{c}$ 成正比, 其中 c 为光速. 极限 $\nu \rightarrow 0$ 称之为拟中性极限, 极限 $\gamma \rightarrow 0$ 称之为非相对论极限.

从单极 Euler-Maxwell 方程组 (1-1)-(1-4) 出发, 借助于不同的尺度变换, 可以推得一些不同的极限模型.

尺度变换 1: 非相对论极限, 拟中性极限

下面, 先取非相对论极限, 随后再取拟中性极限.

首先, 固定 ν , 令 $\gamma \rightarrow 0$, 形式上可得方程组:

$$\partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0, \quad (1-5)$$

$$\partial_t (nu) + \nabla \cdot (nu \otimes u) + \nabla P(n) = -nE, \quad (1-6)$$

$$-\nabla \times B = 0, \quad \nabla \times E = 0, \quad (1-7)$$

$$\nu \nabla \cdot E = \rho, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \rho = 1 - n, \quad j = -nu. \quad (1-8)$$

上述极限模型就是描述可压电子流的 Euler-Poisson 方程组.

然后, 在 Euler-Poisson 方程组 (1-5)-(1-8) 中令 $\nu = 0$, 可得

$$n - 1 = 0 \quad (\text{拟中性}),$$

然后推得描述理想流体的不可压 Euler 方程:

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (1-9)$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p^0 = 0. \quad (1-10)$$

尺度变换 2: 拟中性与非相对论联合极限

取 $\gamma = \nu$, 令 $\gamma = \nu \rightarrow 0$, 从 Maxwell 方程组 (1-7)-(1-8) 易得

$$n - 1 = 0 \quad (\text{拟中性}),$$

$$\nabla \times E = 0, \quad \nabla \times B = 0, \quad \nabla \cdot B = 0.$$

于是, 我们就从 Euler-Maxwell 方程组 (1-1)-(1-4) 得到了描述理想流体的 Euler 方程组 (1-9)-(1-10).

尺度变换 3: 拟中性极限, 非相对论极限

该尺度变换对应的情况是先取拟中性极限, 再取非相对论极限.

首先, 固定 γ , 令 $\nu \rightarrow 0$ 可得

$$n - 1 = 0 \quad (\text{拟中性}),$$

然后从 Euler-Maxwell 方程组 (1-1)-(1-4) 可得

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p^0 = -\gamma u \times B, \quad (1-11)$$

$$-\nabla \times B = \gamma u, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad (1-12)$$

$$\gamma \partial_t B + \nabla \times E = 0. \quad (1-13)$$

上述方程组称之为电子-磁流体动力学模型 (e-MHD).

然后令 $\gamma \rightarrow 0$, 可以从 e-MHD 方程组 (1-11)-(1-13) 得到描述理想流体的不可压 Euler 方程组 (1-9)-(1-10):

$$\operatorname{div} u = 0,$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p^0 = 0,$$

$$\nabla \times E = 0, \quad \nabla \times B = 0, \quad \nabla \cdot B = 0 (\Rightarrow B = 0).$$

1.1.1 Boltzmann 方程

假定只存在一种分子, 对任一时刻 t , 可由其位置 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 及速度 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 来描述一个分子的状态. 为了描述分子的分布状况, 引入分布函数

$$f = f(t, x, v),$$

其意义如下: 在时刻 t , 位置落在 x 附近的一个微元体积 dx 中, 而速度在 v 附近的一个微元体积 dv 中的分子的平均数目是

$$dN = f(t, x, v)dx dv, \quad (1-14)$$

其中 $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ 及 $dv = dv_1 dv_2 dv_3$. 于是, f 是在时刻 t , 在 (x, v) 处单位体积及单位速度变化范围中的分子数是一个密度分布函数. 这里, “平均”意味着通过对许多相同的测量分子分布的实验结果取平均来给出函数 f . 若分布函数 $f(t, x, v)$ 为已知, 就可以由它确定出许多宏观的量. 例如, 在给定体积 V 中的分子总数为

$$N = \int_V dx \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv. \quad (1-15)$$

再由 f 的定义, t 时刻在 x 处单位体积内的分子总数为

$$n(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv. \quad (1-16)$$

于是, 所考察的气体在 t 时刻、 x 处的密度为

$$\rho(t, x) = nM = M \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \quad (1-17)$$

其中 M 为分子的质量; 而在 t 时刻、 x 处的平均速度 $V(t, x) = (V_1, V_2, V_3)$, 则由

$$V(t, x) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) dv = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) dv}{\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv} \quad (1-18)$$

来决定. 此外, 在气体分子论中, 在 t 时刻、 x 处的温度 $T(t, x)$ 由

$$\frac{3}{2}nkT(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}M|v - V|^2 f(t, x, v) dv \quad (1-19)$$

决定, 其中 n 及 V 分别由 (1-16) 及 (1-18) 式给出, M 为分子的质量, 而

$$k = 1.380 \times 10^{-16} \text{ 尔格/度}$$

是玻尔兹曼常数. 下面将会看到, 对于处于热力学平衡态的理想气体, (1-19) 式就化为通常的温度的定义; 而即使对于非平衡态的气体, 也由 (1-19) 式给出温度的定义.

(1-19) 式的右边表示每单位体积的热能. 事实上, $v - V$ 是扣除了宏观速度后的分子运动速度, $\frac{1}{2}M|v - V|^2$ 为单个分子的动能, 而 $f dv$ 为对每单位体积、速度在

微元体积 dv 中的分子数. 因此, (1-19) 式右端为单位体积中分子热运动的能量, 它应是温度的函数. 这隐含着所论的气体为理想气体.

至于在时刻 t 、 x 处的压力张量则定义为

$$p_{ij}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} M(v_i - V_i)(v_j - V_j)f(t, x, v)dv \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1-20)$$

在很多我们感兴趣的情况下, f 关于变量 $v - V$ 基本上是球对称的, 因为坐标的取向对 f 几乎没有什么影响, 在将 v 减去平均速度 V 后, 就不再有优势的方向. 特别地, 当 f 只是 $|v - V|^2$ 的函数时, 注意到

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_i u_j f(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)du = 0, \quad \text{若 } i \neq j.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_1^2 f(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)du = \int_{\mathbb{R}^3} u_2^2 f(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)du = \int_{\mathbb{R}^3} u_3^2 f(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)du.$$

易知

$$p_{ij}(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \neq j, \\ p(t, x), & \text{若 } i = j, \end{cases} \quad (1-21)$$

且注意到 (1-19) 式, 有

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 p_{ii} = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} M|v - V|^2 f(t, x, v)dv = nkT(t, x), \quad (1-22)$$

这正好相应于理想气体. 这也说明, 上述讨论的适用范围是理想气体. 最后, 在 t 时刻、 x 处单位体积的总能量是

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} |v|^2 f(t, x, v)dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} (|v - V|^2 + 2(v - V) \cdot V + |V|^2) f dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} |v - V|^2 f dv + \int_{\mathbb{R}^3} M(v \cdot V) f dv - \frac{M}{2} |V|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f dv \\ &= \frac{3}{2} nkT + nM|V|^2 - \frac{1}{2} nM|V|^2 \\ &= \frac{3}{2} nkT + \frac{1}{2} \rho |V|^2. \end{aligned} \quad (1-23)$$

这里利用了 (1-19)、(1-18) 及 (1-16)-(1-17) 式. 总能量是内能和宏观动能之和. 注意到 $\frac{3}{2} nkT = \frac{3}{2} \frac{kT}{M} \rho$, 单位质量的内能为

$$e = \frac{3}{2} \frac{kT}{M}. \quad (1-24)$$

为了决定分布函数 $f(t, x, v)$, 并论述关于气体非平衡性质的普遍理论, 我们要建立 f 满足的方程 —— 玻尔兹曼方程. 这是分子数守恒律在数学上的描述.

为了得到这个方程, 考察时刻 t 处于 (x, v) 状态的分子的运动. 设作用在分子上的外力为 $F(t, x, v)$ (往往可假设它与 v 无关, 因为外力通常是宏观作用的). 于是作用在单个分子每单位质量上的作用力为

$$g(t, x, v) = \frac{F(t, x, v)}{M}. \quad (1-25)$$

在一个时间间隔 dt 中, 设分子间不发生碰撞, 于是原先在 t 时刻处于 (x, v) 的分子, 在 $t + dt$ 时刻就将处于 (x', v') , 其中

$$x' = x + vdt, \quad v' = v + gdt. \quad (1-26)$$

相应地, 在 t 时刻处于 (x, v) 的体积微元 $dx dv$ 内所有分子, 在 $t + dt$ 时刻就会由于运动而处于 (x', v') 的体积微元中. 注意到

$$dx' dv' = \left| \det \frac{\partial(x', v')}{\partial(x, v)} \right| dx dt,$$

而变换 (1-26) 的雅可比行列式 $\det \frac{\partial(x', v')}{\partial(x, v)}$ 为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dt & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} dt & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} dt & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} dt & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} dt & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} dt & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} dt & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} dt & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} dt & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + O(dt^2).$$

不计在今后讨论中不起作用的高阶小量, 就有

$$dx' dv' = dx dt. \quad (1-27)$$

于是, 在 t 时刻、在 (x, v) 处的体积微元 $dx dv$ 中的分子数为

$$dV = f(t, x, v) dx dv. \quad (1-28)$$

而在 $t + dt$ 时刻、在 (x', v') 处的相应体积微元中的分子数则为

$$dN' = f(t + dt, x', v') dx dv. \quad (1-29)$$

如果分子间不发生相互作用(碰撞),那么 t 时刻在 (x, v) 处的体积微元内的所有分子,在 $t + dt$ 时刻都会运动到 (x', v') 处的相应体积微元之内,从而有

$$dN = dN'. \quad (1-30)$$

但实际上,由于分子间的相互作用(碰撞),一方面有些原先不在 (x, v) 处的体积微元 $dx dv$ 内的分子会散射到 (x', v') 处的相应体积微元内;另一方面,原先在 (x, v) 处的体积微元 $dx dv$ 内的有些分子也会散射到 (x', v') 处的相应体积微元之外.于是, (1-30) 式一般并不成立,而应代之以

$$dN' - dN = J dt dx dv. \quad (1-31)$$

上式右端表示由于散射而引起的粒子在体积微元内的净增益,它应和 dx , dv 及 dt 成正比,故有上述形式,而 J 将在下文中决定.

由 (1-28)-(1-29) 及 (1-26) 式,不计高阶小量,就有

$$\begin{aligned} dN' - dN &= f(t + dt, x', v') dx dv - f(t, x, v) dx dv \\ &= (f(t + dt, x + v dt, v + g dt) - f(t, x, v)) dx dv \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + g \cdot \nabla_v f \right) dx dv dt, \end{aligned} \quad (1-32)$$

其中记

$$\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \nabla_v = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \frac{\partial}{\partial v_3} \right).$$

由 (1-31)-(1-32) 式,就得到 $f(t, x, v)$ 应满足的偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + g \cdot \nabla_v f = J, \quad (1-33)$$

它称为玻尔兹曼方程.在上述方程中,可将其右端 J 写为

$$J = J_+ - J_-, \quad (1-34)$$

其中 J_+ 与 J_- 的意义如下:表示在时间间隔 $[t, t + dt]$ 中因为碰撞而离开原先考察的体积微元 $dx dv$ 的分子总数,即具有下述性质的碰撞的次数,其中两个碰撞分子中有一个开始在 (x, v) 处的体积微元 $dx dv$ 中;而表示在时间间隔 $[t, t + dt]$ 中因为碰撞而进入原先考察的体积微元 $dx dv$ 的分子总数,即具有下述性质的碰撞的次数,其中两个碰撞分子中有一个开始在 (x, v) 处的体积微元 $dx dv$ 中;这样, J 就是在 $[t, t + dt]$ 时间内粒子在 (x, v) 处的体积微元 $dx dv$ 中的净增益数, J 称为碰撞项.

当分子在电磁场中运动时,外力表示为: $g = E + \frac{v}{c} \times B$.

1.1.2 Maxwell 方程

电磁场的基本方程组又称为 Maxwell 方程组, 其积分形式为

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q, \quad (1-35)$$

$$\oint_C E \cdot dl = - \oint_C \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS, \quad (1-36)$$

$$\oint_S B \cdot dS = 0, \quad (1-37)$$

$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 \sum I_c + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dS. \quad (1-38)$$

(1-35) 表示, 电场强度对任意封闭曲面的通量, 只决定于包围在该封闭曲面内的电量的代数和, 它反映了电荷以发散的方式激发电场, 这种电场的电场线是有头有尾的. 这一方程就是高斯定理, 它是以库仑定律为基础导出来的, 原只适用于静电场, Maxwell 把它推广到了变化的电场.

(1-36) 式表示, 电场强度对任意闭合路径的环流取决于磁感应强度的变化率对该闭合路径所圈围面积的通量, 它表明变化的磁场必伴随着电场, 而变化的磁场是涡旋电场的涡旋中心. 这一方程式来源于法拉第电磁感应定律, 它是一个普遍的结论.

(1-37) 式表示磁感应强度对任意封闭曲面的通量恒为零, 它反映了自然界中不存在磁荷这一事实. 这一方程式原来是在稳恒磁场中得到的, Maxwell 把它推广到变化的磁场中.

(1-38) 式表示磁感应强度对任意闭合路径的环流取决于通过该闭合路径所圈围面积的传导电流和电场强度的变化率的通量, 它反映了传导电流和变化的电场都是磁场的涡旋中心, 同时也表明变化的电场必伴随着磁场. 这一方程式起源于稳恒磁场的安培环路定理, 加上 Maxwell 的位移电流假设后, 已使用于随时间变化的电流和磁场.

(1-35)-(1-38) 式就是根据特殊条件下的场方程, 经过推广和修正得到的电磁场的基本方程组. 其正确性将由方程组所预言的结论是否被实验事实而判定.

Maxwell 方程组中, 同一方程式内既有磁学量, 又有电学量, 说明随时间变化的电场和磁场是不可分割地联系在一起的. 若场矢量不随时间变化, 即 $\partial B/\partial t=0$, $\partial E/\partial t=0$, 则 Maxwell 方程 (1-35)-(1-38) 式就分成两组独立的方程组: 一组为静电场的基本方程, 另一组为稳恒电流磁场的基本方程.

Maxwell 方程组在形式上并不对称. E 对封闭曲面的通量不为零, 但 B 对封闭曲面的通量恒为零. E 的环流只决定于 $\partial B/\partial t$, B 的环流不仅与 $\partial E/\partial t$ 有关, 还与