国家级教学名师执笔高等代数配套辅导

高等代数

习题答案与提示

丘维声　著

科学出版社

国家级教学名师执笔高等代数配套辅导

高 等 代 数

习题答案与提示

丘维声 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书为《高等代数》(丘维声著，科学出版社 2013 年 3 月出版) 配套的习题解答与提示，汇集了该书的全部习题，计算题给出了答案，证明题给出了关键性的提示，并且对于相当一部分习题给出了详解，这些解法都很有特色，是高等代数课程的组成部分.

本书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校的高等代数课程教学参考书或配套辅导资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数习题答案与提示/丘维声著；—北京：科学出版社，2014.10
ISBN 978-7-03-042060-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①丘… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-题解 Ⅳ.①O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 227447 号

责任编辑：王胡权／责任校对：陈玉凤
责任印制：阎 磊／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 10 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2014 年 10 月第一次印刷 印张: 13
字数: 257 000

POD定价： 48.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书是为《高等代数》(丘维声著, 科学出版社 2013 年 3 月出版) 配套的习题答案与提示, 计算题给出了答案, 证明题给出了关键性的提示, 并且对于相当一部分习题给出了详解. 在习题解答和提示中, 提到的 "本书" 都是指上述《高等代数》教材.

上述《高等代数》教材是作者积 40 多年在北京大学从事教学和科研工作的经验和心得写成的, 有一些独到的科学见解, 其主要特色如下:

1. 更加鲜明地突出了"研究线性空间的结构及其态射 (即线性映射)" 这条主线. 用这条主线把高等代数课程的教学内容串起来, 形成了科学的讲授体系.

2. 按照数学的思维方式讲授数学知识, 所有重要概念的引入非常自然. 提出要研究的问题, 引导读者探索, 猜测可能有的规律, 进行证明, 这样做使得所有重要定理的引入也很自然, 证明的思路非常清晰.

3. 有一些独到的科学见解. 例如, 明确提出并且证明了域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 和 n 元多项式环 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的通用性质. 运用多项式环的通用性质清晰且简捷地研究了多项式环的结构; 运用一元多项式环的通用性质研究了域 F上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的最简单形式的矩阵表示. 又如, 抓住了实内积空间 (或酉空间)的结构的内在本质给出如下定义: 设 V 和 V' 是实内积空间 (或酉空间), 如果有 V 到 V' 的一个满射 σ 保持向量的内积不变, 即 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in V$, 那么称 σ 是 V 到 V' 的一个保距同构 (映射), 此时称 V 与 V' 是保距同构的. 然后证明了 V 到 V' 的保距同构 σ 一定是线性映射, 且是单射, 从而是双射.

4. 力求使高等代数与几何水乳交融. 线性空间和线性映射的所有重要概念都从几何空间中的例子受到启发而引入; 所有重要定理都从几何空间中的有关结论受到启发, 猜测在线性空间中也可能有类似的结论, 然后进行证明; 从几何空间中的问题受到激励, 提出并且研究高等代数的问题, 得出了一般结论后, 又应用到解决几何空间中的问题.

5. 准确地、科学地阐述概念和定理. 例如, 什么是数域 K 上的一元多项式? 什么是数域 K 上的n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值? "n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数" 这句话准确吗? 准确地、科学地叙述这个定理应当是: "n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的复根都是实数."

6. 精心配备每一节的例题和习题. 例题经过精心挑选, 每一节都配置了适量的习题. 例题的解答和本书给出的相当一部分习题的详解都很有特色, 丰富了高等代数课程的内容.

正是由于上述《高等代数》教材有以上特色, 因此学习高等代数 (或线性代数) 的读者都可以来作本书的习题, 这对于学好高等代数 (或线性代数) 肯定会有帮助.

感谢科学出版社的昌盛编辑和王胡权编辑，他们为本书的编辑出版付出了辛勤劳动.

坦诚欢迎广大读者对本书提出宝贵意见.

丘维声

北京大学数学科学学院

2013年9月

目　录

引言的习题 1
第一章　线性方程组的解法 2
习题　1.1 2
习题　1.2 2
习题　1.3 3
补充题一 3
第二章　行列式 5
习题　2.1 5
习题　2.2 5
习题　2.3 5
习题　2.4 6
习题　2.5 6
习题　2.6 7
补充题二 7
第三章　线性空间 8
习题　3.1 8
习题　3.2 8
习题　3.3 8
习题　3.4 9
习题　3.5 9
习题　3.6 11
习题　3.7 11
习题　3.8 11
习题　3.9 13
习题　3.10 14
习题　3.11 14
习题　3.12 15
补充题三 16
第四章　矩阵的运算 18
习题　4.1 18
习题　4.2 20
习题　4.3 21
习题　4.4 22

习题 4.5 …… 24
习题 4.6 …… 25
习题 4.7 …… 29
习题 4.8 …… 30
补充题四 …… 31
第五章 一元多项式环 …… 33
习题 5.1 …… 33
习题 5.2 …… 34
习题 5.3 …… 34
习题 5.4 …… 36
习题 5.5 …… 39
习题 5.6 …… 39
习题 5.7 …… 42
习题 5.8 …… 44
习题 5.9 …… 46
补充题五 …… 48
第六章 线性映射 …… 50
习题 6.1 …… 50
习题 6.2 …… 51
习题 6.3 …… 53
习题 6.4 …… 56
习题 6.5 …… 61
习题 6.6 …… 66
习题 6.7 …… 74
习题 6.8 …… 81
习题 6.9 …… 86
习题 6.10 …… 93
习题 6.11 …… 94
习题 6.12 …… 102
习题 6.13 …… 107
补充题六 …… 112
第七章 双线性函数, 二次型 …… 119
习题 7.1 …… 119
习题 7.2 …… 121
习题 7.3 …… 125
习题 7.4 …… 130
习题 7.5 …… 133
习题 7.6 …… 138

补充题七 ······ 142
第八章 具有度量的线性空间 ······ 145
习题 8.1 ······ 145
习题 8.2 ······ 147
习题 8.3 ······ 155
习题 8.4 ······ 160
习题 8.5 ······ 170
习题 8.6 ······ 181
习题 8.7 ······ 182
习题 8.8 ······ 188
习题 8.9 ······ 190
补充题八 ······ 191
第九章 n 元多项式环 ······ 192
习题 9.1 ······ 192
习题 9.2 ······ 193
习题 9.3 ······ 195
补充题九 ······ 198
参考文献 ······ 200

引言的习题

1. 参看参考文献 [7] 的第 3 页的命题 2.
2. 参看参考文献 [7] 的第 204 页的 "引言的习题" 第 3 题.
3. 参看参考文献 [1] 的第 232 页的例 1.
4. 参看参考文献 [1] 第 232~233 页的例 4.
5. (1) 用反证法, 且根据映射的定义.

(2) 令 $S = \bigcup\limits_{b \in f(A)} f^{-1}(b)$, 去证 $A = S$. 然后用第 (1) 小题的结论.

第一章　线性方程组的解法

习　题　1.1

1. (1) $(1,-2, 3)'$; (2) $(2, -1, 1, -3)'$; (3) $(-8, 3, 6, 0)'$; (4) $(-2, 1, 3, -1)'$, 提示：第 (4) 小题的第一步：把第二行的 (-1) 倍加到第一行上, 使得矩阵的左上角元素为 1.

2. (1) 给 A_1, A_2, A_3 分别投资 $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, 7.5$ 千元.

(2) 相应的线性方程组的解是 $(-5, 10, 5)$, 单位为千元, 这不是可行解. 因此投给 A_3 的钱不能等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和.

习　题　1.2

1. (1) 无解;　(2) 有无穷多个解, 一般解是

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{11}{7}x_3 + \dfrac{23}{7}, \\ x_2 = -\dfrac{5}{7}x_3 - \dfrac{1}{7}, \end{cases}$$

其中 x_3 是自由未知量;

(3) 有无穷多个解, 一般解是

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - 3, \\ x_2 = x_3 + x_4 - 4, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 是自由未知量.

2. 原线性方程组有解当且仅当 $a = -1$, 此时它的一般解是

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{18}{7}x_3 + \dfrac{1}{7}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{7}x_3 + \dfrac{2}{7}, \end{cases}$$

其中 x_3 是自由未知量.

3. 原线性方程组有解当且仅当 $a \neq -\frac{2}{3}$, 此时方程组有唯一解. (详细参考文献 [1] 的第 19 页例 2.)

4. 原线性方程组有解当且仅当 $c = 0$ 且 $d = 2$, 此时它的一般解是

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 2, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 3, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4, x_5 是自由未知量.

5. (1) l_1,l_2,l_3 有唯一的公共点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(2) 令 $l_4: 4x-4y=-3$, 则 l_1,l_2,l_4 没有公共点. (详见参考文献 [1] 的第 19~20 页例 3.)

6. 不存在二次函数, 其图像经过点 P、Q、M、N.

7. (1) 有非零解. 它的一般解是

$$\begin{cases} x_1=-3x_4, \\ x_2=x_4, \\ x_3=2x_4, \end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量. (详见参考文献 [1] 的第 21~22 页例 5.)

(2) 方程个数 3 小于未知量数目 4, 因此齐次线性方程组有非零解. 它的一般解是

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{55}{41}x_4, \\ x_2=\dfrac{10}{41}x_4, \\ x_3=-\dfrac{33}{41}x_4, \end{cases}$$

其中 x_4 是自由未知量.

8. 总利润的最大值为 1.35 万元, 最小值为 1.25 万元. 投给 A_1,A_2,A_3 的钱分别为 0, 5, 5(万元) 时, 总利润达到最大值 1.35 万元. (详见参考文献 [1] 的第 20~21 页例 4.)

习　题　1.3

1. 类似于本节例 1 的证法.

2. 类似于例 1 的证法.

补 充 题 一

1. $x_i=\dfrac{b_i}{a_i}-\dfrac{1}{a_is}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{b_j}{a_j}, \quad i=1,2,\cdots,n$, 其中 $s=1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$. (详见参考文献 [1] 的第 25~26 页的补充题一的第 1 题.)

2.

$$x_i=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}b_j\right)-b_i+b_{i+1}\right], \quad i=1,2,\cdots,n-1;$$

$$x_n=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}b_j\right)-b_n+b_1\right].$$

(详见参考文献 [1] 的第 26~27 页的第 2 题.)

3. 一般解是:

$$\begin{cases} x_1 = -x_{n+2} - \cdots - x_{2n} + n, \\ x_2 = x_{n+2} - 1, \\ x_3 = x_{n+3} - 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = x_{2n-1} - 1, \\ x_n = x_{2n} - 1 \\ x_{n+1} = -x_{n+2} - \cdots - x_{2n} + n + 1, \end{cases}$$

其中 $x_{n+2}, x_{n+3}, \cdots, x_{2n}$ 是自由未知量. (详见参考文献 [1] 的第 27 页的第 3 题.)

第二章　行　列　式

习　题　2.1

1. (1) 6, 偶排列; (2) 11, 奇排列; (3) 15, 奇排列; (4) 15, 奇排列; (5) 18, 偶排列; (6) 36, 偶排列.

2. $\tau(n(n-1)\cdots 321)=\dfrac{1}{2}n(n-1)$. 当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时, $n(n-1)\cdots 321$ 是偶排列, 当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 是奇排列. (详见参考文献 [1] 的第 32 页例 2.)

3. (1) $\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$; (2) $n-1$.

4. $\dfrac{1}{2}n(n-1)-r$. (详见参考文献 [1] 第 32 页例 3.)

5. $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i\right)-\dfrac{1}{2}k(k+1)$. (详见参考文献 [1] 第 32 页例 4.)

6. (1) 11; (2) 0; (3) 0; (4) λ^2+a^2; (5) λ^2+4.

习　题　2.2

1. (1) $(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$; (2) $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$.

2. 0. (详见参考文献 [1] 的第 37 页的例 3.)

3. x 的 4 次多项式. x^4 项的系数为 7, x^3 项的系数为 -5. (详见参考文献 [1] 的第 37~38 页例 4.)

4. 详见参考文献 [1] 的第 38 页的例 5.

5. 提示: 在 $|A|$ 的表达式中, 每一项或者等于 1, 或者等于 -1. 设有 k 项等于 1, 则有 $(n!-k)$ 项等于 -1.

习　题　2.3

1. (1) -500. (详见参考文献 [1] 的第 44~45 页例 1)　(2) 160.

2. $(-1)^{n-1}b^{n-1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)$.

3. (1) 利用性质 3. (2) 利用性质 3.

4. (1) $a_1-a_2b_2-a_3b_3-\cdots-a_nb_n$. (提示: 把第 2 列的 $(-b_2)$ 倍加到第 1 列上, $\cdots$, 把第 n 列的 $(-b_n)$ 倍加到第 1 列上.)

(2) 当 $n\geqslant 3$ 时, 行列式的值为 0; 当 $n=2$ 时, 行列式的值为 $(a_1-a_2)(b_2-b_1)$; 当 $n=1$ 时为 a_1+b_1.

习　题　2.4

1. (1) 100; (2) 726.

2. (1) $(\lambda-1)(\lambda-3)^2$; (2) $(\lambda+2)^2(\lambda-2)^2$.

3. $D_n=n+1$. (详见参考文献 [1] 第 56 页的例 5.)

4. $D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$. (详见参考文献 [1] 第 56 页例 6.)

5. $D_n=(n+1)a^n$. (详见参考文献 [9] 第 435~436 页第 4 题的解答.)

6. $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2}(n+1)n^{n-1}$. (详见参考文献 [1] 的第 57~58 页例 7.)

7. $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\dfrac{1}{2}(n+1)n^{n-1}$. (提示：把第 $n-1$ 行的 (-1) 倍加到第 n 行上, 把第 $n-2$ 行的 (-1) 倍加到第 $n-1$ 行上, 依次类推, 把第 1 行的 (-1) 倍加到第 2 行上; 然后把第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列上.)

8. $-2(n-2)!$. (提示：把第 1 行的 (-1) 倍分别加到 $2,3,\cdots,n$ 行上, 然后按第 2 列展开.)

9. $D_n=\dfrac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$. (详见参考文献 [1] 的第 369 页第 7 题的解答.)

10. 利用性质 3. (详见参考文献 [1] 第 58 页的例 8.)

11. (1) $n\geqslant 3$ 时, 行列式的值为 0; $n=2$ 时, 行动式的值为 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)$; $n=1$ 时为 $1+x_1y_1$.

(2) $n!\left(1+t+\dfrac{t}{2}+\cdots+\dfrac{t}{n}\right)$.

12. $D_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$. (详见参考文献 [1] 的第 59~60 页例 11.)

13. $3^{n+1}-2^{n+1}$. (提示：先按第 1 列展开, 然后用类似于第 4 题的解法.)

14. $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$. (详见参考文献 [1] 第 59 页例 10.)

习　题　2.5

1. 唯一解. (详见参考文献 [1] 的第 65~66 页例 1.)

2. 当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时, 有唯一解; 当 $a=1$ 且 $b=\dfrac{1}{2}$ 时, 有无穷多个解; 当 $a=1$ 且 $b\neq\dfrac{1}{2}$ 时, 无解; 当 $b=0$ 时, 也无解. (详见参考文献 [1] 的第 66~68 页例 3.)

3. 有非零解当且仅当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$ 或 $\lambda=5$. (详见参考文献 [1] 的第 66 页例 2.)

4. 利用本节定理 1 和范德蒙行列式可得, 存在唯一的次数小于 n 的多项式函数经过所给的 n 个点.

习 题 2.6

1. $(-1)^{kt}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix}$,

2. $\mathrm{C}_{n-1}^{j-1}\prod\limits_{k=1}^{n-2}k!$. (详见参考文献 [1] 第 71 页例 2.)

3. $\left(a^2-b^2\right)^n$. (详见参考文献 [1] 第 71 页例 3.)

补 充 题 二

1. 最大值为 2. (详见参考文献 [1] 第 73 页第 3 题.)
2. 最大值为 4. (详见参考文献 [1] 第 73~74 页的第 4 题.)
3. 用数学归纳法, 把 $|A|$ 按第 1 行展开. (详见参考文献 [1] 第 74 页的第 5 题.)
4. 最大值为 16. (详见参考文献 [1] 第 74 页的第 6 题.)
5. 详见参考文献 [1] 的第 74~75 页的第 7 题.

第三章　线性空间

习　题　3.1

1. (1) 不是; (2) 是. (详见参考文献 [2] 的第 163 页的例 3.)

2. 是. (详见参考文献 [2] 的第 161~162 页例 1(1).)

3. 是. (详见参考文献 [2] 的第 162 页例 2.)

4. 是. (详见参考文献 [10] 的第 884~885 页的第 6 题的解答.)

5. 是. (提示：零函数既是偶函数, 又是奇函数.)

6. 是.

*7. 详见参考文献 [2] 的第 164~165 页例 6.

习　题　3.2

1. 去证 U 对于加法和数量乘法封闭.

2. 提示：$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_s$.

3. (1) $\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3$, 表出方式唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出;

(3) 表出方式有无穷多种, 例如, $\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha}_1 - 5\boldsymbol{\alpha}_2$.

4. 线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}$ 的增广矩阵已经是阶梯形矩阵, 从而看出方程组有唯一解; 把增广矩阵经过初等行变换化成简化行阶梯形矩阵, 得出

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1 - a_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (a_2 - a_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + (a_3 - a_4)\boldsymbol{\alpha}_3 + a_4\boldsymbol{\alpha}_4.$$

习　题　3.3

1. 线性相关. (提示：利用本节命题 3.)

2. 线性无关. (提示：利用本节命题 3.)

3. 提示：利用本节命题 3.

4. 线性无关. (提示：利用本节命题 3, 以及习题 2.3 的第 1 题的第 (2) 小题的结果.)

5. (1) 线性无关;

(2) 线性相关, $\alpha_1 = -a_2 - a_3 + a_4$.

6. 提示：$n+1$ 元齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0}$ 的方程个数 n 小于未知量个数 $n+1$, 因此它有非零解.

7. 线性无关. (提示：考虑行列式.)

8. 详见参考文献 [1] 的第 95 页例 11.

9. 详见参考文献 [1] 的第 94 页例 8.

10. 线性无关. (详见参考文献 [2] 第 167 页例 9.)

11. 线性无关. (详见参考文献 [2] 第 167 页例 10.)

12. 线性无关. (提示: 用线性无关的定义, 让 x 分别取值 $1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}$. 详见参考文献 [10] 的第 218 页的例 10.)

13. (1) 线性相关; (2) 线性无关; (3) $n=1$ 时, 线性无关; $n\geqslant 2$ 时, 线性相关. (详见参考文献 [10] 的第 223 页例 18.)

(4) $n\leqslant 3$ 时, 线性无关; $n\geqslant 4$ 时, 线性相关. (详见参考文献 [10] 的第 223~224 页例 19.)

*14. 用数学归纳法. (详见参考文献 [2] 第 167~168 页的例 11.)

*15. 详见参考文献 [2] 的第 168 页例 12.

习 题 3.4

1. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. 秩为 2 (详见参考文献 [1] 第 100~101 页的例 1.)

2. 利用极大线性无关组的定义. (详见参考文献 [1] 第 102 页例 8.)

3. (2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$. (详见参考文献 [1] 第 102~103 页的例 9.)

4. 提示: 去证 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性无关, 然后用本节例 1 的结论. (详见参考文献 [1] 第 101 页例 3.)

5. 提示: 利用第 3.3 节的命题 1.

6. 提示: 必要性利用习题 3.3 第 6 题的结论. 充分性利用本节命题 3 和命题 4. (详见参考文献 [1] 第 101 页例 5.)

7. 提示: 充分性用克拉默法则. 必要性用第 6 题的结果.

8. 提示: 去证向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可以由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表出. (详见参考文献 [9] 第 442 页第 8 题.)

9. 提示: 分别取 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的一个极大线性无关组, 并且利用本节命题 4.

10. 提示: 去证 α_s 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 线性表出.

11. 两个. 提示: 利用第 3.3 节的例 2(即替换定理). (详见参考文献 [1] 第 103 页例 10.)

习 题 3.5

1. 提示: 利用行列式去证 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关, 又由于 $\dim K^n=n$, 因此 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 K^n 的一个基. 解线性方程组 $x_1\boldsymbol{\eta}_1+x_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\eta}_n=\boldsymbol{\alpha}$, 得唯一解: $(a_1-a_2,a_2-a_3,\cdots,a_{n-1}-a_n,a_n)'$, 它就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标.

2. 提示: 解线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}$, 得唯一解: $(a_4-a_3,a_3-a_2,a_2-a_1,a_1)'$. 这表明 K^4 中任一向量 α 都能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出, 又 $\dim K^4=4$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 K^4 的一个基. $\boldsymbol{\alpha}$ 在此基下的坐标为 $(a_4-a_3,a_3-a_2,a_2-a_1,a_1)'$.

3. 提示: 利用行列式判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都线性无关, 又 $\dim K^3=3$, 因此它们都是 K^3 的一个基. 为了求过渡矩阵, 需要分别求 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标, 这需要去解三个线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i, i=1,2,3$. 采用下述方法可以同时解这