TURING 图灵数学·统计学丛书

ВОСЕМЬ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

数学分析八讲

[苏] А. Я. 辛钦 著

王会林 齐民友 译

（修订版）

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书

ВОСЕМЬ ЛЕКЦИЙ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ

数学分析八讲

[苏] А. Я. 辛钦 著
$\boxed{\text{王会林}}$ 齐民友 译

(修订版)

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

数学分析八讲/（苏）辛钦著；王会林，齐民友译.
—修订本. —北京：人民邮电出版社，2015. 8
（图灵数学·统计学丛书）
ISBN 978-7-115-39747-8
Ⅰ.①数… Ⅱ.① 辛… ②王… ③ 齐… Ⅲ.①数学分析 Ⅳ. ① O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 143885 号

内 容 提 要

本书通过八讲内容（连续统、极限、函数、级数、导数、积分、函数的级数展开、微分方程）概述了数学分析的基本思想、基本概念和基本方法，使读者可以在短时间内对数学分析的全貌有初步了解，并开始学会掌握数学分析的精髓.

本书原本是写给那些想提高数学分析水平的工程师，但出版半个多世纪来的读者反馈表明，它对于数学专业及其他与数学相关的经济学、计算机科学等领域的教师和学生也具有非凡意义. 本次修订改正了一些错误，新增加了一些注解.

◆ 著 [苏] A. Я. 辛钦
译 王会林 齐民友
责任编辑 明永玲 楼伟珊
责任印制 杨林杰
◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷
◆ 开本：700×1000 1/16
印张：11.5
字数：222 千字 2015 年 8 月第 2 版
印数：9801–13 800 册 2015 年 8 月河北第 1 次印刷
ISBN 978-7-115-39747-8

定价：29.00 元

读者服务热线：(010) 51095186 转 600 印装质量热线：(010) 81055316

反盗版热线：(010) 81055315

广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号

站在巨人的肩上
Standing on Shoulders of Giants

TURING
图灵教育

iTuring.cn

站在巨人的肩上
Standing on Shoulders of Giants

TURING
图灵教育

iTuring.cn

中文版再版序

本书中译本于 1998 年出版至今已经 12 年了. 在这段时间里, 不断有读者告诉我这本书对他们很有帮助, 其中有正在教数学分析课程或比较简单的高等数学课程的教师, 更多的则是学习数学分析课程的大学生 (包括非数学专业的大学生). 总的意见与原作者辛钦的期望一致, 他们认为本书以短小的篇幅和通俗易懂的笔法为他们释疑解惑, 读后获益匪浅. 所以, 我首先要感谢人民邮电出版社愿意重印此书, 满足读者的要求. 在再版此书之际, 我也有一点想法愿与读者商讨, 向读者求教.

书中一再提到如数学分析这样成熟了的数学分支, 内容一直比较稳定, 这对于教学两方面增加了不少便利. 但是即便如此, 新的教材、参考书仍然一再出现, 说明科学的发展必然影响教学工作. 我在本书第一次出版的译后记里曾提出, 原书对于紧性的处理似尚有改进余地. 现在又过了十多年, 这个感觉更加突出. 所以借这次再版的机会, 增加了好几个脚注, 目的是提请读者注意这个问题. 上次的译后记里说到, 在数学分析的教学中, 可以不求一律地添加教师愿意告诉学生的内容. 现在看来, 由于数学的应用领域日益扩大, 应用的深度也今非昔比, 这门课程看来仍应以着重加深对基础概念和方法的理解深度以及运用的熟练程度为好. 译后记里还曾提到几本经典著作, 实际上, 近年来这方面的佳作不少. 即以人民邮电出版社出的书为例, 我深切希望读者注意小平邦彦的《微积分入门 I, II》和陶哲轩的《陶哲轩实分析》两本书. 它们虽没有讲到数学分析的新应用, 但是对于真正以数学发展为基础的许多新学科、高科技方面的从业者 (更具体说是工科数学教师和大学生), 加强基础的教学会大有好处, 更不说数学专业的师生了. 但是, 它们都比较深, 本书则可视为踏脚石.

这次再版, 由程少兰教授对原书和原译稿比较仔细地重新推导了一遍, 改正了一些错误, 同时又增加了一些脚注. 书中错误应该少一些, 但难免留存, 仍希望读者提出批评和改进意见.

齐民友

2010 年 3 月

原版第三版前言

第三版相比第一版变化不多, 其中最主要的是我从基本引理中删去了 “归纳法原理”, 因此所有依赖此原理进行的证明都代之以其他原理. 我期望大多数读者能因此而更易于掌握本书, 因为依我看来, 这个原理以及赖以进行的研究, 在逻辑方面对读者提出的要求, 比起本书中一般采用的要更高一些.

其他变化中值得一提的, 只有泰勒公式的新解释以及有界变差函数这一节.

原版第一版前言

高等数学教程在相当多的高等院校里都或多或少要讲授. 所有的工科院校以及大部分军事院校、农业院校和经济院校的学生们都了解数学分析的基础, 更不用说综合大学以及师范院校专门系科的学生了. 所有这些在各类学校讲授的教程不仅在其范围上, 而且在其赖以建立的原则、思想以及逻辑的基础上都十分不同. 另一方面, 从本质上讲, 只有综合大学的教程才达到了较为可靠的科学水平, 其余的则不得不进行压缩, 只能满足或局限于科学观远远落后于现代科学的思想–逻辑基础, 而有时由于大纲的限制, 只能满足于有限的教学要求.

然而我们却时常遇到这样的情况：工程师、教师、经济学家原来是依照那种简易的教程来学习高等数学的, 现在开始感觉需要拓宽自己的数学知识, 且先要有更加牢固的基础. 这种需要可能产生于该专家在其专业领域内的某个具体的研究, 或者是由于一般的拓宽科学和生活视野而必然提出来的——不管怎样, 这个要求当然应当得到满足. 乍看起来, 做到这一点很简单：拿一本完整的数学分析教程, 如Немыцкий 的[①]或者Фихтенгольц 的[②], 然后凭借自己已有的不太牢固、不太深刻的知识来系统地钻研它. 但是经验表明, 这个看似自然的途径几乎从来就不能达到目的, 除少数例外, 都会让学习者失望, 时常就放弃了按此既定方向继续尝试. 问题在于, 一方面, 我们的学生为自己提出的目标一般只安排了十分有限的时间, 因此研究多卷的大教程是不可能的. 另一方面, 可能是最重要的, 他还没有坚实的科学基础且不是专业的数学家, 没有人指导, 不可能自己从研究中区分出哪些是原则性的内容, 因而可能会以全部精力注意于没有实质意义的微不足道的小事上, 最终迷失方向. 就像俗话所说的, 只见树木, 不见森林.

然而要完全满足这类学生的要求和需要, 其实所需非常有限. 几年前, 我有机会在国立莫斯科大学讲授了一门专门为此目的而设的课程, 总共 12 讲, 每讲两小时, 学生则是想要提高自己数学水平的工程师们. 应当承认, 起初我对此项任务几乎毫无信心, 然而后来我不得不承认, 我的课程满足了学生们的要求, 尽管它很简略. 取得这个成功的诀窍在于, 我找到了解决摆在我面前的教学难题的秘诀：从一开始就拒绝了充分详细地讲授本课程哪怕只是某一章的想法, 而只限于讲授那些

---

① Немыцкий и др., Курс математического анализа, т. I-II, Гостехиздат, 1944.

② Фихтегольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Гостехиздат, 1947. [第八版有中译本: [俄罗斯] 菲赫金哥尔茨,《微积分学教程》, 高等教育出版社, 2006. —— 译者注]

具有原则性、扼要、突出、具体且使人有难忘印象的发展. 我讲的更多的是关于目的和趋势、问题和方法、基本的分析概念之间的以及它们与应用之间的关系, 而不是个别的定理及其证明. 我宁愿在许多情况下抛开不具有原则意义的证明细节 (有时是一连串定理及其证明), 而让我的学生去看教科书. 但要是为阐明某个有着主导作用和原则意义的概念、方法或者思想, 我则不吝时间, 力求用各种手段, 通过各种各样的表述、直观形象等, 尽可能明白而有效地把这些基本内容灌输给我的学生. 我坚信: 有了这种修养, 他们每一个人在需要更深入地研究数学分析的某一章节时, 就能够独立地找到他所需的材料, 然后进行研究. 也就是说, 可以自立地区分主要和次要、本质和非本质.

通过同个别或一组学生进行的许多次谈话以及课堂授课, 我确信自己所选择的道路是唯一正确的道路. 我愿借此机会指出: 大课堂上坐满了学习本课程的工程师, 他们大多数直到课程结束都没有退席, 这充分证明了工程师们广泛存在着要求提高自己数学知识水平的愿望.

这本书与我刚刚提到的那门课程都是为了同一目的, 并且力求以同样的方法来实现它, 因而一开始就应当告知读者: 你在这里找不到大学数学分析教程的完整表述, 或者哪怕是本课程个别选定章节的完整表述. 我给自己提出的任务仅仅是给出数学分析的一般的、尽可能容易了解和记忆的基本思想、基本概念和基本方法的概述. 这种概述对任何人都是容易阅读和掌握的, 即使是只学过最简单的数学分析课程的人. 而且一旦掌握了它, 它就能使你任意并独立地研究本课程的任何一部分、任何一章的所有细节.

我相信, 国立大学数学系的许多学生阅读本书也能带来实质性的收益. 问题在于, 无论是教科书还是讲座, 自然要受到大纲和时间的限制, 只可能充分注意原则问题的讨论, 而对阐述具体问题的所有细节必然有所限制. 然而, 谁都知道, 有时撇开树木来观察森林是多么有好处. 我希望本书能对某些未来的数学家, 首先是着手研究数学分析的人有所帮助.

目 录

第一讲 连 续 统

1.1 为什么数学分析必须从研究连续统开始?

"如果对于变量 x 的每一个值, 变量 y 都有唯一确定的值与之对应, 那么变量 y 称为变量 x 的函数." 这句话可以用来开启高等数学领域的大门: 借助于这句话我们可以定义最重要的、最首要的数学分析概念——**函数关系**. 在此概念中, 已经奠定了借助数学工具来把握自然现象和技术过程的完整思想的萌芽. 这就是为什么我们必须毫不含糊地要求这个定义有完全的、无可指责的明确性, 其中的每一个字都不应有引起一点怀疑的阴影. 在此, 极小的一点歧义都可能危及所构筑的庄严的大厦. 这个大厦就是科学, 它就是以此概念为基础建造起来的, 而歧义会使得这座大厦不完善, 需要从根本上重建.

同时, 在对开始时的那个简单表述做进一步研究时, 我们发现在许多地方含义不明并且容许不同的解释. 我们在这里只注意这种不清楚的地方, 因为恰恰是试图把这一点最后弄清楚, 才把我们紧紧地引向了今天的讲义内容.

我们的定义包含了这样的字眼: "对于变量 x 的每一个值". 为了不留下任何含糊之处, 我们必须无条件地向大家解释清楚术语 "变量的值" 的意义. 更重要的是, 定义中说到的是 "每一个值". 由此得知: 要想充分了解这个定义, 只掌握变量 x 的某些个别值的概念是不够的. 最要紧的是, 应当完全精密地理解这些值的**整个**集合, 整个的 "储备", 对于这些值中的任何一个都应当有一个确定的变量 y 的值与之对应. 我们应当了解在数学分析中, 称为已知函数的 "定义域" 的是什么东西.

什么是变量的个别值? 我们知道, 这就是数. 如果是这样, 则所有这些值的集合就是某些数的集合——某个所谓的**数集**. 这个集合是什么样的? 它包含什么样的数? 我们从一开始就排除了虚数, 而假设所有的变量 x 和变量 y 的值都是实数. 那么所有的实数都可以作为变量 x 的值吗? 如果不是, 那么什么样的值可以, 什么样的值不可以呢?

关于所有这一切, 我们的定义里没有说, 但这是可以理解的, 因为不可能对所有函数使用同一方式回答这个问题 (实质上, 甚至对同一个函数在不同的问题中也不行). 函数的定义域既取决于该函数的性质, 也取决于那些特定的问题, 正是为了解决这些问题, 我们才在当前的研究中需要这个函数. 因为很容易明白, 同一个函数在不同的问题中是对不同的自变量值进行研究的. 对所有这一切, 我们知道许多例子. 例如函数 $y = x!$ 只对正整数 x 研究才有意义 (至少在初等数学范围内); 函

数 $y=\lg x$ 只对 $x>0$ 有意义, 等等. 可以容易地想出这类例子, 其中函数的自然定义域会是结构十分复杂的数集.

但如果我们自问: 在数学分析本身及其应用中, 最常见的变量 x 的值的集合是什么样的? 则应该说: 绝大多数情况下, 函数的这类定义域是 "区间"(闭的或开的), 即介于两个已知数之间的**所有**实数的集合 (包含或者除去这两个数或其中之一). 有时这个区间成为半直线 (例如 $x>0$), 这就表明, 变量 x 的值的集合是大于 (或者小于) 某个数的**所有**实数的集合 (有时条件 $>$ 或 $<$ 要代之以条件 $\geqslant$ 或者 $\leqslant$). 最后, 还有这样的情形, 即区间变成整个直线, 即变量 x 的值可以是**所有**的实数. 这时则说函数的定义域是整个实轴或者 "数直线".

无论如何, 对于数学分析中的函数而言, 函数在其上发展且展现其个别特点的域、场地——函数在其中才能成为自然科学和技术的强大数学武器的载体——都是所有实数的集合. 这个集合在数学中称为**连续统**(确切地说, 是**线性连续统**). 完全像培育植物之前必须仔细研究土壤一样, 在高等数学中, 我们期望热心人应当依靠科学, 在以函数关系概念为基础建筑这个科学的整个大厦之前, 仔细地研究这个概念赖以生存和发展的载体. 这就是为什么在所有认真而科学地编成的数学分析教程中, 连续统都是第一个研究对象. 且只有充分掌握其本质以及性质之后, 我们才可能转而对函数关系概念进行根本的研究. 连续统的结构并不像我们初看时设想的那么简单. 展现在我们眼前的实数世界是一个复杂的、富含各种各样细节的结构. 直到现在, 对它作全面的研究仍在继续.

1.2 为什么没有建立完整的实数理论是不能研究连续统的?

如果这样, 连续统是什么样的? 存在什么样的实数? 何时以及为什么我们才能相信实际上已经掌握了**所有**实数?

在初等代数里, 我们掌握了**全部**有理数的集合, 即所有的整数和分数, 既有正的, 也有负的. 但很快我们就开始注意到, 这些数对我们来说是**不够用的**. 这是什么意思? 为什么不能只局限于有理数呢? 我们不能这样做, 是因为在有理数中没有如 $\sqrt{2}$ 这个数. 即找不到平方等于数 2 的有理数. 而为什么必须有这样的数呢? 因为边长为 1 的正方形的对角线的长度恰好为 $\sqrt{2}$. 因此, 如果我们否定这个数的存在, 则对几何学中如此简单地生成的线段的长度, 就无法以任何数来表达了. 显然, 在这种基础上度量几何就不可能得到发展. 这就是说, $\sqrt{2}$ 应当在实数中找到其位置. 但它在有理数中是没有位置的, 因此我们称它为无理数. 但这个 $\sqrt{2}$ 绝对不会只满足于我们承认它的存在: 它马上就会开始要求, 首先在有理数中间给它找到完全确定的位置, 即准确地指出什么样的有理数小于它以及什么样的有理数大于它 (例如 $\sqrt{2}>1$——正方形的对角线长大于其边长). 其次, 它要求我们要学会对它进行运

算, 就像对有理数一样, 还要与有理数的运算相容 (例如正方形的边与对角线的和等于 $1+\sqrt{2}$, 这要求我们对这个数也赋予意义, 即把它归并入实数集合之中). 新数的所有这些要求都完全是根本性且合理的. 如果我们目前还不回答这些问题, 则只是因为我们马上还要将另外的许多新数引入我们的领域, 它们都全部毫无例外地对我们提出同样的要求, 所以最简单的办法是在今后同时满足所有这些新数的要求, 而不对每一个数个别地处理其细节.

$\sqrt{2}$ 以后, 我们的领域自然且不可避免地要包含所有的有理数的平方根 (正的和负的), 然后是立方根以及一般的所有形如

$$r^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

的数, 其中 r 是任意的正有理数, n 是任意一个 $\geqslant 2$ 的整数. 但众所周知, 事情还不止这些. 像前面作出正方形的对角线的表示一样, 还有许多具体的问题要求我们在一系列情况下把全部代数方程的根作为新的数. 只要已知方程的根尚未在我们已经引入的数中, 就会发生这样的情况, 因为我们不能否认这些根的存在, 也不能剥夺某些完全具体确定的量具有数的特征.

让我们在此方向上继续探索. 我们称形如 $P(x)=0$ 的方程的所有根 (实的) 为**代数数**, 其中的 $P(x)$ 为带整系数的任意多项式. 这样就把所有实的代数数都引入了我们的领域, 特别地, 引入所有形如 (1) 的数. 因为数 $r^{\frac{1}{n}}$ 可定义为方程 $qx^n-p=0$ 的根, 其中 $\dfrac{p}{q}=r$是有理数 r 的一般分数表示. 更为特殊的情况, 任何有理数 $r=\dfrac{p}{q}$ 作为方程 $qx-p=0$ 的根也应属于代数数的集合之中.

可以很容易将代数数的整个领域进行 "排序", 即给出一个法则, 使得对任意两个代数数都能确定谁大谁小; 稍微困难一点但还不太复杂的是, 确定一个法则对这些数进行任何通常的代数运算, 使得运算的结果仍然是代数数. 因此 (这是关键点), 对代数数进行代数运算只会得出代数数, 而不需要引入什么新的数.

也许我们现在就能够停下来, 认为实数域的构造完成了, 并且因此把所有的代数数的集合当作连续统?

众所周知, 我们不能这样做, 并且也熟知为什么不能这样做. 如果说对于许多代数理论而言, 我们可以满足于至此为止所构造的数, 但恰恰是对于数学分析而言, 限于代数数是完全不行的. 问题在于, 数学分析的第一步就是要对初等代数运算添加基本且最重要的分析运算——**极限过程**. 在很多情形下, 有完全具体的理由迫使我们了解这个或那个数序列极限的存在. 况且, 这个极限是作为有着具体而现实意义的数显现在我们面前的, 而且我们还期望今后对它进行代数运算和分析运算. 如果我们认为应当具有确定极限的任何代数数序列, 其极限实际上同样存在于代数数的范围之内. 则可假设代数数这个范围也就是连续统. 除代数数之外, 数学分析不

再需要任何其他实数.

但事情并非如此. 如果我们取一个半径为 1 的圆, 并且作出其内接正多边形, 无限地增加其边数, 则所有这些多边形的周长都可以用代数数表示. 我们称这个数序列的极限为圆周长. 否认这个极限的存在就意味着在几何学中不能提及圆周的长度. 容易想象, 这种禁令不仅使几何学, 而且令所有其他用到圆形的精确科学都会崩溃.

与此同时, 可以证明, 在代数数中是没有这个极限的. 摆脱这种情形的出路在哪里? 显然, 我们不得不承认, 对于数学分析而言, 只有代数数是不够用的, 必须再给它添加新的实数. 所有这些非代数数的实数通常称为 “超越数”. 我们上面构造的数 (半径为 1 的圆的周长) 表示成 2π, 这就意味着 π 是一个超越数. 在数学分析中, 另一个重要的超越数是我们熟悉的数 $e=2.718\cdots$, 正如我们了解的那样, 它也是从有理数出发由简单的极限过程产生的. e 和 π 的超越性很晚才被证明, 即在 19 世纪的后半叶. 但是引入超越数的必要性在较早就被提出, 即 19 世纪的中叶, 这是在另一些更简单且不太重要的例子中给出的 (由法国数学家刘维尔作出).

这样, 我们的连续统仍然没有建成. 继续下去, 我们应当怎样做呢? 我们能否停留于此并且说: “连续统就是所有的代数数的全体, 再加上 ‘根据需要, 从代数数通过极限过程得出的但其本身又不是代数数的数 (像 e 和 π, 作为超越数)’? ” 我们之所以提出这个问题, 是因为大多数 “简易的” 数学分析教程正是以此为基’ 嘈吹当然, 通常没有明说), 而回避了阐述完整的无理数理论.

不, 当然不能这样说, 也不能停留于此. 对此有一系列简单而有说服力的原因. 首先, 作为**所有**实数的总体的连续统应当定义为某个固定的集合 (例如, 仿照上面定义所有代数数的集合的那种模式), 而不留下以后再添加越来越新的数的可能性. 其次, 在我们的初步定义中, “根据需要” 这个说法显然缺少准确的内容. 如果我们面对一个没有代数数极限的代数数的序列, 从形式的观点来看, 我们现在可以随意回答, 或者认为它有超越数极限或者完全没有极限. 如果不是从形式观点考虑, 而是按照具体的现实考虑来选取这个或那个解答, 那么无论它们多么必要, 这样做法在数学定义中却是不能允许的. 拒绝 π 这个数的存在, 在目前是极为不利的. 而在其他情况下, 做类似的否认可能不会带来任何不便. 但很显然, 那个使我们 “每当没有它就进行不下去” 时就引入超越数的准则, 不论怎么说都不能成为数学准则. 最后, 我们也不能得出, 我们可以就此满足于以这样的途径引入的数, 因为新的数还得进行加法、乘法, 进行极限过程 (对数学分析来说, 不允许对这些数进行这些运算就什么也不能做). 我们从何能够确信, 所有的运算结果都将是我们的连续统的实数? 而如果不是, 我们又要补充它们, 可见我们的连续统还没有包含**所有的**实数.

可以看到, 我们不能坚持所持的这种立场, 即在给出一个或两个超越数后就说 “等等”. 这是不行的, 因为我们刚刚看到, 这样并没有定义任何连续统.

因此我们看到, 要对数学分析做完全的论证, 就不可避免地要建立实数的一般理论, 这个理论不能只限于构造一些作为例子的新数, 而要包含这种构造方法的一般原则, 按此原则可以刻画出所有实数的集合.

1.3 无理数的构造

在科学中有几种不同的连续统理论, 但所有这些理论在处理各自问题时其思想是完全一样的 (牢记这一点很重要). 与这些原则性的统一比较起来, 对待它们之间的差别应当像我们在审查建筑物的建筑设计时对待结构的细节一样.

所有这些理论都有相同的目标, 即把有理数集合作为最初的已知的依据, 而用统一的构造原则得到所有实数的整个集合. 这个原则在各种理论中形式不同, 但其间的相似之处还远不止于我们所指出的那些. 问题在于, 一种构造新的无理数的原则, 在所有的理论中, 尽管存在着形式上的区别, 但都基于同一思想, 这个思想就是: 在构造新数时, 基本的解析运算, 即极限过程, 起首要、主导的作用, 所遇到的种种方法都可归结为它, 看做是它的特殊情形. 我们知道, 即使是整数的平方根也是适当选择的有理数序列 (“近似根”) 的极限, 另外一些情形也是如此.

据上所述, 为了更具体地认识连续统理论的构造, 我们没有必要在细节上研究所有这些不同的论证方法, 取其一作为模型就完全够了, 这里看到的所有原则上重要的内容对其他理论都是同样的. 我们将选择戴德金理论, 这并不是因为它相对其他理论有什么本质上的优越性, 而只是因为一种纯粹外在的理由: 占压倒性多数的最通用的教科书都采用它. 因此对读者来说不难寻找帮助, 可以在那些书里找到我们在表述中漏掉的细节.

1. 在着手引入无理数之前, 我们应当仔细地观察以 R 来表示的有理数的集合. 首先, 我们来注意该集合的一个很初等的性质: **在任何两个有理数 $\boldsymbol{r_1}$ 和 $\boldsymbol{r_2}$ 之间总可以找到第三个有理数**. 最为简单地, 注意到两者和的一半 $\dfrac{r_1+r_2}{2}$ 永远是位于 r_1 和 r_2 之间的有理数, 就可以明白这一点. 作为这一事实的推论, 我们重复运用这一点, 马上就得出: 在 r_1 和 r_2 之间始终存在有理数的无穷集合.

2. 现在, 我们注意观察在寻找或者定义 $\sqrt{2}$ 时产生的情况 (我们取的是正根). 首先在有理数中 (对我们来说, 任何其他的数暂时还不存在) 找这样的数: 它的平方等于数 2. 容易发现, 这种 (有理) 数不存在 (我们在这里将不给出中学教材中对此事实的人所熟知的算术证明). 这就表明: 无论我们选择什么有理数 r, 都将有 $r^2 < 2$ 或者 $r^2 > 2$. 我们首先只研究正有理数的情形. 按照刚才的法则, 它们自然地分成两类: 正有理数 r_1 所构成的 A 类, 其中 $r_1^2 < 2$; 以及正有理数 r_2 所构成的 B 类, 其中 $r_2^2 > 2$. 因为 r_1 和 r_2 都是正数, 则从 $r_1^2 < 2 < r_2^2$ 可以得出 $r_1 < r_2$, 即 **$\boldsymbol{A}$ 类的每一个数都小于 $\boldsymbol{B}$ 类的每一个数**. 很明显, 如果我们把零和一切负 (有理) 数

都归入 A 类, 则上述结论不会改变. 此时我们得到将整个集合 R 分为 A 和 B 两类的一个分割, 同时 A 类的每一个数都小于 B 类的每一个数. 我们约定, 若将集合 R 分成两个非空的类[①](A, B), 且使 A 类中的每一个数都小于 B 类中的任意数, 就称它是一个**分割**(确切地说, 是集合 R 的分划). 由此, 我们得到了集合 R 的某个确定的分割.

我们可以用各种完全初等的方法来建立集合 R 的分割. 例如, 把所有的有理数 $r_1 \leqslant 5$ 归入 A 类, 而把所有的有理数 $r_2 > 5$ 归入 B 类, 显然也会得出集合 R 的一个确定的分割. 如果以通常的方式用直线上的点来表示数, 则所有的分割都很显然地可以用直线上的点分出两个集合的某个 (有理数的) 分划表示出来: 这两个集合中的第一个 (A) 整个位于第二个 (B) 的左边.

初看起来可能会认为, 集合 R 的所有分割都有同样的图像, 两个不同的分割彼此间的区别只在于做出它们的点的位置, 因而其中之一可以通过简单的移动而变为另一个. 但极为重要的是: **这种看法是错误的**. 分割在自身结构上可能有着深刻的 (且对于我们的目的来说, 有重大价值的) 差别.

实际上, 在后一个例子中, 存在一个数 (即有理数, 我们暂时还没有任何其他的数), 它具有这样一条重要的性质, 即使得所有小于它的数都属于 A 类, 而所有大于它的数都属于 B 类. 在我们的例子中, 这个数很明显是数 5. 具有这个性质的数我们将称之为已知分割的**界限**, 因而在这个例子中做出的分割是有界限的.

相反地, **在第一个**(与 $\sqrt{2}$ 相关的)**例子中这样的界限是没有的**. 我们来证明这一点.

设 (有理) 数 r 是界限. 与对任何 (有理) 数一样, 应当或者有 $r^2 < 2$, 或者有 $r^2 > 2$. 为确定起见, 设 $r^2 < 2$. 按照界限的性质, 对每一个 $r' > r$, 应有 $r'^2 > 2$. 但若 $r < 1$, 则设 $r' = 1$, 就会得到矛盾的结果. 而如果 $r \geqslant 1$, 则 $r^2 \geqslant r$, 记 $2 - r^2 = c (> 0)$ 且令 $r' = r + \frac{c}{4}$, 我们有

$$r'^2 = r^2 + \frac{rc}{2} + \frac{c^2}{16} \leqslant r^2 + \frac{r^2 c}{2} + \frac{c^2}{16} = 2 - \frac{7}{16}c^2 < 2,$$

又出现矛盾, 因为由 $r' > r$, 应有 $r'^2 > 2$.

这样一来, 集合 R 的所有分割分为两个类型: 有界限的和没有界限的. 这里需要指出以下几点.

a) 一个分割不可能有两个界限. 如果 r 和 r' 都是这样的界限, 且若 $r < r'$, 则由第一段存在这样的数 r'', 使得 $r < r'' < r'$. 但此时根据界限的性质, 从 $r'' > r$ 得出 $r'' \in B$[②], 而从 $r'' < r'$ 得出 $r'' \in A$, 这就造成矛盾.

① 即每一个类中至少包含一个数.

② 记号 $a \in M$ 表示 a 是集合 M 的元素.