

中等职业学校“十二五”规划教材

SHUXUETONGYONGJIAOCHENG

数学通用教程

张 鸽 陈冠峰 主编

中等职业学校“十二五”规划教材

数学通用教程

张 鸽 陈冠峰 主编



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书符合教学改革发展方向,立足智力开发和创新思维的培养,突出与技校学生实际的适应性,为技校数学课教学提供更加实用、适用、好用的教材.与人力资源和社会保障部颁布的通用教材相比,精简了内容,难度适宜,与专业课教学结合更加紧密.本书内在逻辑清晰,章节分配合理,分6章,内容包括函数的概念,逻辑代数基础,三角函数,平面解析几何,向量与复数,导数与微分.可供不同专业数学教学的需要选择使用.每个章节前的引导语,使本书变得更加富有亲和力.每节后设置适量的练习题,难易适度,便于学生复习巩固所学知识.本书可作为普通高中、中职及中技的数学教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学通用教程 / 张鸽, 陈冠峰 主编. -- 上海:
同济大学出版社, 2013. 8
ISBN 978-7-5608-5248-5

I. ①数… II. ①张… ②陈… III. ①数学课—技工学校—教材 IV. ①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 179758 号

中等职业学校“十二五”规划教材

数学通用教程

张 鸽 陈冠峰 主编

责任编辑 陈佳蔚 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 9.5

印 数 1—3 100

字 数 190 000

版 次 2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5248-5

定 价 23.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

《数学通用教程》是根据技校学生的实际情况自编的校本教材,由数学高级讲师张鸽任主编,数学讲师陈冠峰任副主编.张鸽老师从事技校数学教学工作近30年,有着深厚的专业知识和丰富的教学经验,尤其对技校学生的数学基础和学习特点有着准确的了解和把握.陈冠峰是一位颇具创新精神的年轻老师,走上讲台后便致力于数学课教学方法的改革,面对学习基础差异较大的学生,做到了讲课深入浅出,使课堂教学充满活力.

本书在编写过程中,参考了现行普通高中、中职及中技的数学课教学大纲,立足智力开发和创新思维的培养,突出与技校学生实际的适应性,精简了内容,降低了难度,与专业课教学结合更加紧密.本书内在逻辑清晰,章节分配合理,可供不同专业的教学需要选择使用.每个章节前的引导语,使数学教材变得更加富有亲和力.每节后设置适量的练习题,难易适度,便于学生复习巩固所学知识.

由于编写匆忙,书中可能存在诸多的问题和不足,欢迎大家批评指正.

编 者

2013年7月

目 录

前言

第一章 函数的概念	1
§ 1.1 函数的概念和性质	2
§ 1.2 指数的运算与指数函数	9
§ 1.3 对数的运算与对数函数	14
§ 1.4 幂函数	19
第二章 逻辑代数基础	23
§ 2.1 计数制与码制	24
§ 2.2 逻辑函数及其表示方法	29
§ 2.3 逻辑代数的公式化简	36
第三章 三角函数	40
§ 3.1 角的概念的推广	41
§ 3.2 任意角的三角函数	46
§ 3.3 诱导公式	50
§ 3.4 两角和与差的三角函数	57
§ 3.5 正弦型三角函数的图像及其应用	63
§ 3.6 正弦定理与余弦定理及其应用	68

第四章 平面解析几何	75
§ 4.1 直线的方程	76
§ 4.2 圆的方程	82
§ 4.3 椭圆的方程与性质	88
§ 4.4 双曲线的方程与性质	95
§ 4.5 抛物线的方程与性质	101
§ 4.6 参数方程与极坐标	106
第五章 向量与复数	109
§ 5.1 向量的概念及运算	110
§ 5.2 向量的坐标运算	115
§ 5.3 复数的概念及性质	119
§ 5.4 复数的表示形式及运算法则	124
第六章 导数与微分	131
§ 6.1 函数极限的概念	132
§ 6.2 导数的概念及其运算	136
§ 6.3 微分的定义及应用	142

第一章 函数的概念

函数一语,最早见于1692年德国数学家莱布尼兹的著作.1718年,约翰·伯努利(Johann Bernoulli)把函数定义为“一个变量的函数是指由这个变量和常量以任何一种方式组成的一种量.”记号 $f(x)$ 则是由数学家欧拉(Leonhard Euler)于1724年首次使用的.1775年,欧拉在《微分学原理》一书中又提出了函数的定义:“如果某些量以如下方式依赖于另一些量,即当后者变化时,前者本身也发生变化,则称前一些量是后一些量的函数.”我国引进函数概念,首见于1859年清代数学家李善兰(1811—1882)的译作.

函数的应用十分广泛,在机械专业的学习上,我们充分利用函数的单调性,对称性,奇偶性,把现实生活中的问题上升到数学问题,通过数学知识建立合适的模型,从而达到解决实际问题的目的.

本章主要讲解函数的基本概念及性质,以及三个基本的函数:指数函数、对数函数和幂函数的概念和性质.



§ 1 1 函数的概念和性质

一、函数的概念

1. 函数的概念

设 x, y 是两个变量, 若对于某个特定范围内的每一个 x 值, 按照某种关系式(对应法则) f , 都有唯一的 y 值与之相对应, 则称 y 是 x 的函数, 其中 x 是自变量, 自变量 x 的取值范围称为函数的定义域, 与 x 对应的 y 的值称为函数值, 函数值的全体称为函数的值域.

2. 函数的记法

一般情况下, y 是 x 的函数可以记作 $y = f(x)$. 需要说明的是:

(1) 函数的记法 $y = f(x)$ 的含义是: x 是自变量, y 是自变量 x 的函数(也称因变量), f 是函数 y 与 x 之间的对应法则;

(2) 一个函数式由函数关系式、自变量、因变量三部分组成, 并且由函数的定义域和函数关系式可以确定函数的值域;

(3) 当自变量 x 在定义域内取值 a 时, 对应的函数值记作 $y = f(a)$;

(4) 函数可以用其他不同的符号表示, 如 $g(x), h(x)$ 等.

3. 函数的表示方法

表示函数的方法主要有三种: 解析法、列表法和图像法.

(1) 解析法. 用一个等式来表示函数两个变量的方法称为解析法. 例如, $y = 2x^2 + 1$, $y = \sin x + 3x$ 等都是用解析法表示的函数.

(2) 列表法. 用表格的形式来表示两个变量之间函数关系的方法称为列表法. 例如, 李飞 2012 年度的工资情况如下表所示.

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
工资	3 000	3 100	3 020	3 310	2 980	2 870	2 985	3 200	3 150	3 000	3 300	3 120

上表中, 月份和工资是两个变量, 并列出了不同月份对应的工资, 这就是将函数用列表法描述的情况.

(3) 图像法. 用图像来表示两个变量之间函数关系的方法称为图像法. 例如, 一次函数, 二次函数在坐标系中的图像分别为一条直线和一条抛物线.

二、函数的性质

1. 奇偶性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在定义域范围内有

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 在定义域内为偶函数.

同样, 若函数 $y = f(x)$ 在定义域范围内有

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 在定义域内为奇函数.

如果上面两种形式都不成立, 则称函数为非奇非偶函数.

例如,函数 $f(x) = x^2$ 在实数范围内是偶函数,因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, 满足偶函数定义;而对于函数 $f(x) = x^3$ 在定义域范围内就是奇函数,因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

偶函数的图像关于 y 轴对称,因为若函数 $y = f(x)$ 是偶函数,则 $f(-x) = f(x)$, 此时,若点 $(x, f(x))$ 是图像上的点,则与它关于 y 轴对称的点 $(-x, f(x))$ 也是图像上的点;

奇函数的图像关于原点对称,因为若函数 $y = f(x)$ 是奇函数,则 $f(-x) = -f(x)$, 此时,若点 $(x, f(x))$ 是图像上的点,则与它关于原点对称的点 $(-x, -f(x))$ 也是图像上的点.

2. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 若对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的,函数在这个区间上称为增函数,这个区间 I 称为函数的单调递增区间;若恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的,函数在这个区间上称为减函数,这个区间 I 称为函数的单调递减区间.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数.

例如,函数 $f(x) = x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 在区间 $(-\infty, 0]$ 单调递减,而在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增;但在整个定义域 $\mathbf{R}$ 上,函数 $f(x) = x^2$ 不是单调的.

3. 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个不为零的实数 t , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $(x+t) \in D$, 且函数

$$f(x+t) = f(x)$$

恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, t 为函数的周期.

由函数的周期性的定义我们可得, 一个周期函数的周期有无数个, 通常情况下如果没有特别说明, 我们所说的周期一般是指最小正周期. 如函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

例 1 设函数 $y = f(x) = 2x^2 + 1$. (1) 求 $f(0)$, $f(2)$, $f(2a-1)$ 的值; (2) 判断函数在定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇偶性; (3) 判断函数在 $(-\infty, 0)$ 内的单调性.

解 (1) 因为 $f(x) = 2x^2 + 1$,
所以 当 $x = 0$, $x = 2$, $x = 2a-1$ 时,

$$f(0) = 2 \times 0^2 + 1 = 1;$$

$$f(2) = 2 \times 2^2 + 1 = 9;$$

$$f(2a-1) = 2 \times (2a-1)^2 + 1 = 8a^2 - 8a + 3.$$

(2) 由函数奇偶性的定义可得

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = f(x),$$

所以, 函数在定义域 $\mathbf{R}$ 上为偶函数.

(3) 由函数单调性的定义可得: 在 $(-\infty, 0)$ 内任取两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 代入函数表达式

$$f(x_2) - f(x_1) = 2x_2^2 - 2x_1^2 = 2(x_2 + x_1)(x_2 - x_1).$$

因为 $x_1 < x_2 < 0$,

所以 $x_2 + x_1 < 0, x_2 - x_1 > 0$,

$$f(x_2) - f(x_1) < 0,$$

即 $f(x_1) > f(x_2)$.

因此函数在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减.

例 2 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{2x^2 - 1}; \quad (2) y = \frac{\sqrt{2x+1}}{3x-4}.$$

解 (1) 要使函数有意义, 须

$$2x^2 - 1 \geqslant 0.$$

解不等式, 得

$$x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{或} \quad x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即函数 $y = \sqrt{2x^2 - 1}$ 的定义域为

$$x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{或} \quad x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) 要使函数有意义, 须

$$\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0, \\ 3x-4 \neq 0. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2}, \\ x \neq \frac{4}{3}, \end{cases}$$

即函数 $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{3x-4}$ 的定义域为

$$\left\{x \mid x \geq -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq \frac{4}{3}\right\}.$$

由例 2 我们可以看出,求函数的定义域,一般情况下只要使函数满足式子成立时 x 的取值范围即可.在现实生活中,我们求定义域还要在满足函数有意义的前提下,特别注意其现实意义,在这两种情况下求出的定义域才符合实际.

例 3 一圆柱形容容器,要在里面注水,已知容器的底面半径为 10 cm,容器高为 30 cm,设水的体积为 $V \text{ cm}^3$,写出水的体积 V 与水桶中水面高度 h 的函数关系式,并求出函数的定义域与值域.

解 由圆柱的体积公式可得, V 与水桶中水面高度 h 的函数关系式为

$$V = \pi r^2 h = 100\pi h.$$

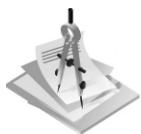
在这里, V 为函数的因变量,它的取值范围即为函数的值域; h 为函数的自变量,它的取值范围为函数的定义域.

而对于函数 $V = 100\pi h$ 来说,在考虑现实情况下,水面的高度不能高于容器的高度,所以, h 的取值范围,也即函数的定义域为

$$0 \leq h \leq 30.$$

同样,对应函数的值域 V 的取值范围,也在零和容器容积范围之内,即函数的值域为

$$0 \leq V \leq 3\,000\pi.$$



课堂练习

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 4};$$

$$(2) y = \frac{2x+1}{\sqrt{3x-6}};$$

$$(3) y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}.$$

2. 设 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$ 的函数值.

3. 判断下列函数哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些是非奇非偶函数?

$$(1) y = x(1-x^2);$$

$$(2) y = \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$(3) y = x^3 - 2x;$$

$$(4) y = 3^x + 3^{-x}.$$

4. 判断函数 $y = 2x^2 + 5$ 在区间 $(-\infty, -2]$ 内的单调性.

5. 一半径为 r , 高度为 h 的圆柱形钢件, 要加工成一个底面与圆柱底面重合的圆锥形工件, 试写出圆锥的体积 V 与高度 h 的函数表达式, 并说明函数的定义域和值域.



§ 1 2 指数的运算与指数函数

一、指数运算

1. 根式

定义 若 $x^n = a$ (n 是大于 1 的整数), 则称 x 为 a 的 n 次方根.

当 n 为奇数时, 正数的 n 次方根是正数; 负数的 n 次方根是负数, 都表示为 $\sqrt[n]{a}$. 特别地, 零的 n 次方根是零; 负数没有偶次方根. 这样, 形如 $\sqrt[n]{a}$ 的式子就称为根式, 其中 n 称为根指数, a 称为被开方数.

根式的性质:

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (n \text{ 是大于 } 1 \text{ 的整数});$$

$$(2) (\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} a & (n \text{ 为奇数}), \\ |a| & (n \text{ 为偶数}). \end{cases}$$

2. 分数指数幂

以前我们已经学习过整数指数幂的运算法则, 如果把根式变化成指数形式, 就会使运算更加简便, 为了化简方便, 我们进行如下规定:

设 $a > 0$, m, n 是正整数, $\frac{m}{n}$ 是既约分数, 则

$$(1) \text{ 正分数指数幂: } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

(2) 负分数指数幂: $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}$;

(3) 零的正分数指数幂为零, 零的负分数指数幂无意义.

二、指数函数

定义 形如 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的函数称为指数函数. 如 $y = 2^x$ 就是一个指数函数.

1. 指数函数的图像

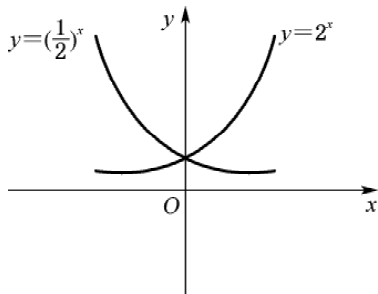
我们以 $y = 2^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为例, 研究指数函数的图像和性质.

在同一坐标系内作出函数 $y = 2^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像.

列表:

x	-2	-1	0	1	2	...
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...

描点、连线:



2. 指数函数的性质

由上面函数的图像我们可以得出指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的性质:

- (1) 定义域为 $x \in \mathbf{R}$;
- (2) 值域为 $y > 0$;
- (3) 过定点 $(0, 1)$;
- (4) 当 $a > 1$ 时, 函数单调递增; 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调递减.

例 1 比较下列两组实数的大小.

$$(1) 0.5^3 \text{ 与 } 0.5^{3.5}; \quad (2) 3^{2.5} \text{ 与 } 3^{3.5};$$

$$(3) 5^{\frac{1}{2}} \text{ 与 } \left(\frac{1}{2}\right)^5; \quad (4) \sqrt[3]{5} \text{ 与 } 5^{\frac{1}{3}}.$$

解 (1) 由指数函数的性质可得: 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 单调递减.

因此, 函数 $y = 0.5^x$ 为单调递减函数.

又因为 $3 < 3.5$,

所以 $0.5^3 > 0.5^{3.5}$.

(2) 由指数函数的性质可得: 当 $a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 单调递增.

因此, 函数 $y = 3^x$ 为单调递增函数.

又因为 $2.5 < 3.5$,

所以 $3^{2.5} < 3^{3.5}$.

$$(3) \text{ 因为 } 5^{\frac{1}{2}} > 5^0 = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1,$$

所以 $5^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

$$(4) \text{ 因为 } \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}},$$