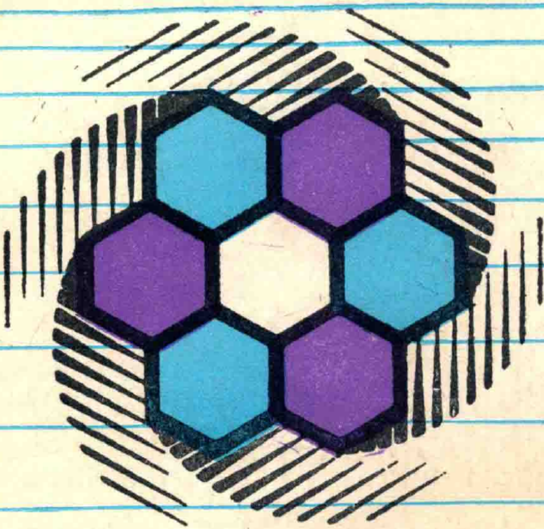
能源出版社 QIAOJIE FANGCHENG

巧解方程

蔡健光 编



中学生自学之友丛书

巧解方程

蔡 健 光 编

能 源 出 版 社

1 9 8 8

中学生自学之友丛书
*
巧 解 方 程
蔡 健 光 编
能源出版社出版　新华书店首都发行所发行
张家口通信学院印刷厂印制
787×1092　1/32开本　印张：6.25　140.4千字
1988年11月第一版　　1988年11月第一次印刷
印数：1—5,000 册
ISBN 7-80018-089-1/O.14
定价：2.20元

前　　言

方程是中学数学中重要内容之一，它与数学其它内容有密切的联系。本书以复习题解的形式编写，希望通过知识的系统复习和解题来巩固这部分知识，解题后的“注意”是防止解题时可能出现错误的地方，也有解题中的一些技巧，这对于加深理解题目和举一反三会有些帮助。

附录提供了北京市高中招生数学试题和全国高考数学试题中的有关方程的题目，供读者学习时参考，这些题目除简单的外，一般都有答案或提示。

本书在编写过程中，得到张本东同志的大力帮助，在此表示感谢。

由于编者水平有限，错误和不足在所难免，请大家提出宝贵意见。

目　　录

一、方程的概念及变形定理

1. 方程的概念

（1） 方程是含未知数的一种等式。等式可分为恒等式和方程。

① 恒等式不论用任何数值（只要是允许的）代替其中的字母，它是都能成立的等式。

② 方程是含有未知数的等式。作为方程的未知数的字母，只有在它代表特定的值（称为方程的解）时等式才能成立，因此方程也叫做条件等式。

③ 能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解。

（2） 求方程的解或确定方程无解的过程叫做解方程。

（3） 在中学学过的方程有两大类：

一类是代数方程：即等式两边只含有代数式的方程。

另一类是初等超越方程：即等式两边不只含有代数式的方程。如指数方程、对数方程、三角方程等。

在代数方程中把未知数叫做“元”。代数方程又可以按其代数式分为有理方程（方程中只含有理式）和无理方程(未知数在根号内也叫做根式方程)。有理方程又可以分为整式方程（方程中只含有关于未知数的整式）和分式方程（未知数在方程的分母中）。整式方程又可按未知数的指数分为

一次（未知数最高次数是一）方程、二次方程（未知数最高次数是二）、三次方程……等。三次以上的方程又叫做高次方程。

上述方程的系统可归纳如下表：

- 等　式
  - 恒等式
  - 方　程
    - 代数方程
      - 有理方程
        - 整式方程
          - 一元方程
            - 一次方程
            - 二次方程
            - 高次方程
          - 多元方程（方程组）
        - 分式方程
      - 无理方程
    - 初等超越方程
      - 指数方程
      - 对数方程
      - 三角方程

2．同解方程和结果方程

（1）同解方程：如果两个方程的解完全一样，即第一个方程的解都是第二个方程的解，并且第二个方程的解也都是第一个方程的解，那么这两个方程叫同解方程。

（2）结果方程：如果第一个方程的解都是第二个方程的解，那么第二个方程叫做第一个方程的结果方程。如果两个方程是同解方程，那么第一个方程可以看作是第二个方程的结果方程；第二个方程也可以看作是第一个方程的结果方程。

（3）解方程时，就是要把给定的方程逐步变成简单形式的方程，使它们保持同解。最后求出方程的解。

3．方程同解变形定理

（1）方程的两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程。

例1． $4x+3=9-2x$．

方程两边都加上$2x-3$，得

$$4x+3+2x-3=9-2x+2x-3.$$

是同解方程。

移项：方程中的任何一项，都可以把它的符号改变后，从方程的一边移到另一边。

（2）方程的两边都乘以（或都除以）不等于零的同一个数，所得方程和原方程是同解方程。

例2. $3x=3$.

方程两边都乘以$\frac{1}{3}$，得

$$3x\times\frac{1}{3}=3\times\frac{1}{3}.$$

是同解方程。

（3）如果方程$f(x)=0$的左端可以分解为两个因式$f_1(x)$与$f_2(x)$的积，那么这两个方程$f_1(x)=0$与$f_2(x)=0$和原方程同解。

例3. $(x+1)(x-3)=0$.

则 $(x+1)=0$，$(x-3)=0$.

与 $(x+1)(x-3)=0$. 是同解方程。

（4）如果方程两边都乘以同一个整式，那么得到的方程是原方程的结果方程。

例4. $2x-1=x+3$.

$x=4$.

方程两边都乘以整式$x-1$.

$$(2x-1)(x-1)=(x+3)(x-1).$$

$$x_1=4,\qquad x_2=1.$$

因为$x=1$不是$(2x-1)=(x+3)$的解，而是$(2x-1)(x-1)=(x+3)(x-1)$的解。所以$(2x-1)(x-1)=(x+3)(x-1)$是$(2x-1)=(x+3)$的结果方程。

（5） 如果方程的两边都作同次的乘方，那么所得的方程是原方程的结果方程。

例5. $x=2$与$x^2=4$不同解，$x^2=4$有根$x=\pm 2$，它是$x=2$的结果方程。

注意：如果第二个方程是第一个方程的结果方程，那么是第二个方程的根而不是第一个方程的根，方程对于第一个方程来说叫做增根。在解方程时，如果把方程的两边都乘以同一个整式或乘方同样次数时，往往会产生增根。对于经过这样变形而求得的解，需要代入原方程进行验算。增根的原因是扩大了定义域（自变量的允许值范围）。

同样，如果方程两边同除以一个整式或开方同样次数往往会产生失根。失根的原因是缩小了定义域。

二、 方程的解法

1. 一元一次方程的解法

（1） 一元一次方程的一般形式

$$ax=b \quad (a\neq 0)$$

（2） 一元一次方程的解的讨论

① 若$a\neq 0$，则方程有一解$x=\frac{b}{a}$；

② 若$a=0$，$b\neq0$，则方程无解；

③ 若$a=0$，$b=0$，则方程有无数个解。

（3） 解一元一次方程的一般步骤

① 去分母；

② 去括号；

③ 移项；

④ 合并同类项，化成最简方程$ax=b$，$(a\neq0)$的形式；

⑤ 方程两边都除以未知数的系数，得出方程的解 $x=\frac{b}{a}$。

（4） 例题

例1. 解方程：

$$\frac{2x-1}{6}-\frac{x-3}{20}=\frac{3x+2}{15}.$$

〔解〕 去分母（两边都乘以60），得

$$10(2x-1)-3(x-3)=4(3x+2).$$

去括号，得

$$20x-10-3x+9=12x+8.$$

移项，得

$$20x-3x-12x=8+10-9.$$

合并同类项，得

$$5x=9.$$

方程两边都除以5，得

$$x=\frac{9}{5}.$$

例2. 解方程：

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=1.$$

〔**解**〕 去分母（两边都乘以6），得

$$2\sqrt{3}x+3\sqrt{2}x=1.$$

合并同类项，得

$$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})x=6$$

$$x=\frac{6}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad x=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$$

注意：

（1） 在去分母时要将不含分母的项同乘以6。

（2） 在系数为分数、小数或无理数时要注意化简。

如：$\frac{6}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{6(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$

$$=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

例3． 解关于x的方程：$ax+b=0$.

〔**解**〕 $ax=-b$.

（1） 当$a\neq0$时， $x=-\frac{b}{a}$.

（2） 当$a=0$，且$b=0$时，原方程变为$0\cdot x=0$，在这个等式中x可以取任意值，等式都成立，所以它是恒等式，我们把恒等式可看成x为无穷解的方程。

（3） 当$a=0$，且$b\neq0$时，原方程变为$0\cdot x=b\neq0$，由于使$0\cdot x\neq0$是不可能的，所以方程无解。

注意：含有字母系数时，方程都要进行讨论。讨论前要

把方程化成$ax=b$的形式，按上例分三种情况进行。

例4. 解关于x的方程：$m^2x-m=n^2x+n$。

〔**解**〕 $m^2x-n^2x=m+n$

$(m^2-n^2)x=m+n$

$$x=\frac{m+n}{m^2-n^2}.$$

讨论：

（1） 当$m^2-n^2\neq0$时，即$m+n\neq0$且$m-n\neq0$，

$$x=\frac{m+n}{m^2-n^2}=\frac{1}{m-n}.$$

（2） 当$m+n=0$时，$m=-n$，

方程变为$0\cdot x=0$，x为任意值，方程有无穷解。

（3） 当$m-n=0$，即$m=n$，且$m+n\neq0$时，方程变为$(m+n)\cdot0\cdot x=m+n\neq0$.

即 $0\cdot x=(m+n)\neq0$，方程无解.

例5. 解关于t的方程：

$$\frac{t+1}{a+b}+\frac{t-1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}.$$

〔**解**〕 求出最简公分母（经常用Q表示）

$Q=(a+b)(a-b)$.

去分母，得

$(t+1)(a-b)+(t-1)(a+b)=2a$.

去括号，得

$at+a-bt-b+at-a+bt-b=2a$.

合并同类项，得

$2at=2a+2b$

$$at=a+b$$

$$t=\frac{a+b}{a}.$$

讨论：

（1） 当$a\neq 0$时，$t=\dfrac{a+b}{a}$.

（2） 当$a=0$，且$b=0$时，$0\cdot x=0$，方程有无穷解.

（3） 当$a=0$，且$b\neq 0$时，$0\cdot x\neq 0$，方程无解.

注意：怎样求最简公分母Q和去分母。

（1） 先将分母因式分解。

（2） Q是各分母数字的最小公倍数，与不同底的幂（同底时取高次幂）、不同因式的积（同因式取高次幂）。

（3） 去分母时，可以求出各式分母的补因式$=Q\div$原分母，用它来乘各分子。化成不含分母的整系数方程。

例6. 解关于x的方程：

$$ax-a^2=2ab-bx+b^2.$$

〔**解**〕 $ax-a^2=2ab-bx+b^2.$

$$ax+bx=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)x=(a+b)^2,$$

$$x=\frac{(a+b)^2}{a+b}.$$

讨论：

（1） 当$a+b\neq 0$时，$x=\dfrac{(a+b)^2}{a+b}$，$x=a+b$.

（2） 当$a+b=0$时，x为任意值，方程有无穷解。

注意：在讨论时，有时不一定都存在三种情况，本例就只有两种情况。

例7. 解关于 $|x-2|-3=0$.

〔**解**〕 $|x-2|=3$.

（1） 当 $x-2\geqslant 0$时，即 $x\geqslant 2$时，$|x-2|=x-2$，方程变为$x-2=3$，$x=5$。

（2） 当 $x-2<0$时，即 $x<2$ 时，$|x-2|=-(x-2)=2-x$，方程变为$-(x-2)=3$，$x=-1$。

注意：

（1） 绝对值是非负数

$$|a|=\begin{cases} a(a\geqslant 0) \\ -a(a<0) \end{cases}$$

（2） 有关不等式的同解变形常用：①不等式的两边同时加上（或减去）同一个数（或整式），不等号的方向不变。表示成：若 $a>b$，则 $a+c>b+c$，这可以作移项（变号，不变向）的根据。②不等式的两边同时都乘以(或都除以）同一个正数，不等号的方向不变。表示成：若 $a>b$且 $b>0$，则 $ac>bc$。③不等式的两边同时都乘以（或都除以）同一个负数，不等号的方向改变。表示成：若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$。

例8. 解方程

$$|x-4|+|x-2|=4.$$

〔**解**〕 $|x-4|=4-|x-2|$.

两边平方得：

$$(x-4)^2=16+(x-2)^2-8|x-2|.$$

化简得：

$$8|x-2|=4x+4.$$

$2|x-2|=x+1$,

两边再平方得:

$4(x-2)^2=(x+1)^2$, $4(x^2-4x+4)=x^2+2x+1$.

化简得:

$(x-5)(x-1)=0$, $x_1=5$, $x_2=1$.

检验: $x_1=5$代入, 原方程左边$=|5-4|+|5-2|=4$,

$\therefore$ $x_1=5$. 是原方程的根

$x_2=1$代入原方程, 左边$=|1-4|+|1-2|=4$,

$\therefore$ $x_2=1$也是原方程的根.

注意:

(1) 绝对值方程, 可用平方的方法去掉绝对值符号;

(2) 要将绝对值分散在方程两边, 这样做起来简便;

(3) 由于平方破坏了同解性, 要代回原方程检验根。

练习一 解方程

1. $15-(7-5x)=2x+(5-3x)$

2. $x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16$

3. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x-1\right)-6\right]+4\right\}=1$

4. $\frac{2x-1}{2}-\frac{2x+5}{3}=\frac{6x-7}{4}-1$

5. $\sqrt{3}x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$

6. $2\sqrt{5}x+\sqrt{5}-1=0$

7. $3\sqrt{2}x-1=2\sqrt{3}x$

8. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}x=\dfrac{1}{2}$

9. 解关于x的方程$\dfrac{(x+a)^2}{2}+\dfrac{(x-a)^2}{2}=(x-3a)^2$

10. 解关于x的方程：$mx-m=x-1$

11. 解关于t的方程：$\dfrac{a+t}{b}-2=\dfrac{t-b}{a}$

12. 解关于x的方程：$m^2x-5=25x+m$

13. 解方程 $|32-x|+5=0$

14. 解方程：$x+2|x|=3$

2. 一元二次方程的解法

（1） 一元二次方程的分类

$$\begin{array}{c}\text{标准式}\,ax^2+bx+c=0\\ a\neq0\end{array}\begin{cases}\text{完全的}\ b\neq0,\ c\neq0,\quad ax^2+bx+c=0\\[2ex] \text{不完全的}\begin{cases} b=0\begin{cases}c\neq0 & ax^2+c=0\\ c=0 & ax^2=0\end{cases}\\[2ex] b\neq0\quad c=0\quad ax^2+bx=0\end{cases}\end{cases}$$

ax^2 叫二次项，bx 为一次项，c 叫常数项。a 为二次项的系数，b为一次项的系数。