

系 统 测 辨 导 论

张 启 人

内 容 提 要

通过测辨建立动态系统的数学模型是现代系统理论中最重要也最活跃的问题之一。本书讨论了控制系统测辨和建模的基本原理和各种算法，重点放在便于工程技术人员学习、掌握的最小二乘估计上。对建模的一般方法、极大似然估计、卡尔曼过滤、多变量系统测辨、非线性系统测辨等，也作了初步阐述。

四川省自动化学会
湖南省自动化学会 联合出版
湖南省系统工程学会

— 1982 —

(印刷：长沙铁道学院劳动服务公司印刷厂)

写在前面

数学模型化历来是控制系统设计和动态系统分析的主要环节。在数字计算机支持下，现代建模方法已逐渐形成了两门独立的、但相得益彰的学科领域，即：系统测辨（系统辨识）和系统仿真。本书讨论通过测辨建立系统数学模型的基本原理和方法。

为了让不熟悉现代控制理论和概率统计知识以及随机过程理论的部分读者，也能从本书中获得大部分测辨建模的概念，对个别不可或缺的基础知识作了必要的复习或提示，但没有过多追求叙述上的严谨性。

虽然重点放在便于工程技术人员掌握的、包括相关法和最小二乘法在内的参数估计算法上，但对近年来发展的其他方法仍有所论及。“阳春白雪”和“下里巴人”异曲同工。

趁付梓之际，谨向冒着酷暑协助制图和校对的下列同志表示感谢：陈德池、肖大光、熊桂林、罗正才、欧阳小红。长沙铁道学院劳动服务公司印刷厂的同志给了本书的印刷以巨大支持，附此一并志谢。

最后，由于个人水平、条件所限，难免的错误热望读者批评指正，庶几能补苴罅漏于来兹。

张启人

1982.7.24

金華升編自學川西

出版合規金華升編自學南德

金華升工究委省南德

—— 2681 ——

(1982) 金華升編自學南德

目 录

写在前面

绪论..... (1)

0—1 模型化..... (1)

引言 (1) 模型分类 (2)

建模过程 (4)

0—2 测辨..... (5)

基本概念 (5) 非参数模型测辨

(7) 参数模型测辨 (8) 通

过参数估计的建模过程 (9) 测

辨模型的用途 (11) 测辨模型化

的原则 (11) 模型失灵的原因 (11)

1 数学模型..... (13)

1—1 理论模型..... (13)

理论模型概述 (13) 分布参数系

统的建模 (14) 例 (15)

1—2 外部描述模型..... (19)

微分方程 (19) CARMA 模型 (23)

1—3 状态空间模型..... (25)

状态向量 (25) 状态空间模型 (25)

典范形 (32)

1—4 与建模有关的问题..... (39)

延迟时间 (39) 微分方程的计算

机求解 (40) 线性化 (41)

2 频域测辨法..... (45)

2—1 基本知识..... (45)

引言 (45) 付里叶变换 (45)

传递函数 (48)

2—2 频率响应测辨..... (50)

Bode (伯德) 图 (50) 通过伯德

图测辨传递函数 (54)

2—3 阶跃响应测辨..... (58)

阶跃响应 (58) 特性参数测辨 (60)

2—4 脉冲响应测辨..... (67)

图解测辨 (67) Levy 法 (69)

第2章附录..... (72)

3 相关函数法..... (76)

3—1 预备知识..... (76)

引言 (76) 随机过程 (76) 例

题 (82)

3—2 白噪声输入测辨..... (84)

维纳-何甫方程 (84) 白噪声输

入测辨 (85)

3—3 伪随机噪声输入测辨..... (86)

利用随机信号 (86) 伪随机噪声

输入 (87) 伪随机二位式信号发

生 (88) 二次剩余码 (91)

3—4 数值计算问题..... (91)

相关函数计算 (91) 谱计算 (93)

3—5 解卷法测辨..... (94)

解卷 (94) 例 (94)

4 最小二乘估计..... (97)

4—1 最小二乘法..... (97)

引言 (97) 线性最小二乘理论 (97)

最小二乘估计量的统计性质 (101)

4—2 序贯最小二乘估计..... (105)

基本概念 (105) 矩阵反演引理和

递推公式 (106)

4—3 几种推广..... (108)

多变量系统 (108) 增多参数数目

的递推估计 (108) 实时最小二乘

算法 (110)

4—4 脉冲响应的最小二乘估计..... (111)

加权序列的最小二乘估计 (111)

与互相关测辨的关系 (113) 最优

输入信号 (115) 多变量系统脉冲

响应测辨 (117)

4—5 学习模型测辨..... (119)

在线最小二乘测辨 (119) 学习模

型测辨 (121)

5 线性参数模型测辨..... (124)

5—1 基本测辨问题..... (124)

引言 (124) 方程误差判据 (124)

最小二乘解 (125) 参数估计的统

计特性 (127) 在线最小二乘测辨

	(128)	学习模型法(128)	实时 测辨(131)
5—2		标准测辨模型……………(133)	
		状态空间法测辨(133)	自适应观 测器(134)
5—3		<i>Kalman-Bucy</i> 过滤……………(137)	
		状态估计(137)	卡布滤波器用于 参数估计(141)
		修正状态估计算法 (142)	
5—4		时序列估计……………(145)	
		平稳时间序列的离散模型(145)	
		<i>Yule-Walker</i> 估计(147)	<i>Levinson</i> - <i>Durbin</i> 算法(148)
		最终预测误差 法(148)	判据自回归传递函数 (149)
		一般信息判据(151)	白化 滤波器(151)
		多维 <i>AR</i> 模型拟合 算法(153)	
5—5		<i>ARMA</i> 模型……………(154)	
		相关函数(154)	状态空间表示 (155)
		在线估计(156)	阶数测 辨(156)
6		最小二乘测辨法的推广……………(160)	
6—1		广义最小二乘估计……………(160)	
		相关残差的偏差问题(160)	广义 最小二乘算法(161)
		讨论(164)	肖氏算法(167)
6—2		辅助变量法……………(170)	
		基本概念(170)	辅助变量(170)
6—3		扩充最小二乘估计……………(171)	
		扩充最小二乘原理(171)	递推测 辨算法(172)
6—4		多阶段最小二乘估计……………(173)	
		方法 I (173)	方法 II (176)
		方法 III (176)	
6—5		系统阶数确定……………(180)	
		检验模型拟合优度(180)	检验模 型误差的独立性(181)
		时延测辨 (182)	
7		极大似然法和预测误差法……………(183)	
7—1		概率性贝叶斯估计……………(183)	

		基本概念(183)	充分统计量(184)
		优良估计量(185)	
7—2		极大似然估计……………(186)	
		引言(186)	独立观测(187)
		顺序观测(188)	极大似然估计 量的性质(189)
		鲁棒性(189)	
7—3		实际参数估计……………(189)	
		似然函数(189)	预测误差判据 (191)
		计算问题(192)	恒定采 样周期(192)
		<i>CARMA</i> 模型(193)	其他模型结构(195)
		验前信息和 贝叶斯估计(195)	计算机对话 式计算例(195)
7—4		极大似然法的实践……………(199)	
		标准实例(199)	偏差(200)
		外界因素(201)	时间延迟(202)
		量化和舍入(202)	反馈(203)
8		多变量系统和非线性系统测辨……………(205)	
8—1		传递函数矩阵测辨……………(205)	
		引言(205)	传递函数阵(205)
		测辨算法(206)	
8—2		脉冲响应矩阵测辨……………(207)	
8—3		状态空间模型测辨……………(208)	
		模型(208)	结构确定和参数估计 (209)
8—4		汉克尔模型——阶数测辨……………(210)	
		<i>Hankel</i> 模型(210)	汉克尔模型里 马氏参数数的误差函数(221)
		H, H^T 阵的行列式(216)	汉克 尔阵的奇异值分解(216)
8—5		非线性系统测辨……………(218)	
		涅尔特拉级数(218)	参数为线性 的非线性差分方程(219)
		参数非 线性的非线性差分方程(220)	汉 氏模型(221)
		维纳模型(225)	
附录一		概率和统计……………(227)	
附录二		<i>PRBS</i> 计算机生成程序……………(249)	
附录三		矩阵反演引理……………(250)	
主要参考文献		……………(250)	

绪 论

0-1 模 型 化

1. 引言

模型是对事物、对象、现象、过程或系统的客观写照或缩影，是进行系统分析和行为预测的有效工具，是人们掌握客观世界规律并进而能动地控制或改造它们的锐利武器。工程实践中建模 (*Model Building*) 或模型化 (*Modelling*) 的必要性正如目的在于了解周围世界的对象、现象或过程的科学研究中必须建立模型一样。一般说，一个模型就是在表征被研究对象、现象或过程的复杂因果关系中确立的定性或定量的依存关系。

实际存在的对象 (图0-1) 总是受到大量的确定其状态或响应的干扰 (因素) 影响的。既然一个对象会有许多未知的性质，建模正是企图研究这些性质。这意味着研究者要观测作用到对象上的干扰和对象的响应，然后才能产生某种模型。这种模型可以是推测的、定性的或定量的。它可能通过词句、表格、图形或数学方程描述。当然研究者必须承认这样的事实，即如果模型的响应值跟对象输出“几乎相等”，为实际对象建立的模型就是令人满意的。

显然在许多科学和工程领域内，建模的成功与否代表着在这些领域内人类具有的知识水平。不过可以举出不可胜数的实例来说明建模的最终形式都回到0-1的一般框图。例如：生物学模型得到有生命细胞对外来干扰的响应；材料力学模型得到一个结构对外部负荷的响应；生产模型得到生产过程对分批投料的响应；等等。



图0-1 有 m 个输入、 p 个输出的对象

历史上，每个学科分支中取得对世界的了解和建模的问题都是在本身的方法和方式 (方法论) 基础上解决的，其中语言表演着重要角色。直到最近，会话语言仍然是哲学、生物学、社会学、经济学中的基本语言，而数学语言主要贡献于物理学、力学和热力学。工程中常通过图和表来表达，而化学、绘画、音乐都有它们自己特定的语言。只是在过去若干年来，由于现代计算工具的发展，建模的数学方法、技术和认识论的命题才得到了特别重视和普遍关注，并因此形成了一种跨学科的建模语言。由于控制过程复杂性的提高，建模问题在控制论中已成为一切问题的中心。解决一个控制问题 (选择控制系统的参数、结构、算法等)，事先没作建模工作几乎是不能实现的。

2. 模型分类

模型可能取各种不同的形式，并没有统一的分类原则。如果按模型的表现形式，一般说可以粗分为两大类：实体模型 (*Material Models*) 和符号模型 (*Symbolic Models*)。

(1) 实体模型 包括：

- 实物模型 这是按模型相似性理论构造的原系统的小型复制品，如桥梁模型、城市模型、水工实验模型、船舶模型、电机模型、风洞实验中的飞机模型等。

- 模拟模型 这是按不同的物理领域（力学的、电工的、热的、液压的、气动的）内物理意义完全不同的变量之间服从类似规律所作比拟类推的模型。例如在一定条件下由节流阀和气容构成的气动系统的压力响应跟一个电阻电容构成的电路的输出电压特性，在规律上是一致的，从而可通过较易实验的后者来模拟较难测定的前者。模拟计算机、计算尺都是实现模拟模型的手段。

(2) 符号模型（或语言学模型） 包括：

- 1) 数学模型 这是用数学语言描述的一大类模型的总称。它可以是一个或一组代数方程、微分方程、差分方程、积分方程或统计学方程，或是它们的某种恰当组合，通过它们定量（或定性）地描述各变量之间明确的数学关系。其中自然也包括代数几何学或拓朴空间上描绘的某些抽象数学模型。

数学模型可以横向划分为下述几类：

- i 理论模型 这是按各不同学科内发展的基本理论、采用统一的数学语言建立的数学模型，可以用该学科内特定的定律或法则解释模型内各变量间的关系。例如按物质守恒定律建立化学模型；能量守恒和动量守恒建立力学模型；按哈代 (*G.H. Hardy*) 温伯格 (*W. Weinberg*) 定律建立群体遗传学模型；按供需平衡法则建立列昂节夫 (*W. Leontief*) 投入—产出模型。机电系统的二阶微分方程模型；生态学中渥尔特拉 (*Vito Volterra*) 的弱肉—强食 (*Predator-Prey*) 模型；管理科学中的库存模型、排队模型等都属于这一类。

理论模型还可以进一步细分成：

- 明确型 指在公理基础上建立的有明确物理意义的模型。例如电网络方程模型、机构传动模型之类。

- 经验型 指在历史实测数据基础上建立的经验公式模型。它的解释也只能凭经验，或充其量作近似的推理说明。例如工程设计中常用的一些经验方程式之类。

- 规范型 指在常识范围内建立的模型，认为“当然如此”，既不需要公理化，也用不着实验验证。例如一个被控对象要求外加转矩 1 公斤·米，则控制器指挥下的执行机构必须能输出大于或等于这一数量级的转矩，而不能小于它；经营管理中用的库存模型也类似。

- ii 实验模型 这是根据已有的实际装置、模拟装置或通过推理对实际上尚不存在的对象所建立的理论模型进行实验分析建立的模型，或叫测辨模型。它包括：

- 非参数模型 即直接或间接从实验分析得到的响应（如脉冲响应、阶跃响应），或者按对象的实测输入输出数据得到的图表。非参数模型总是确定性的，无法加进随机特征。但可以借助一定的测辨算法把非参数模型过渡到参数模型，这时要有很复杂的结构测

辨支持。

• **参数模型** 即通过理论模型（方程、函数等）或按验前知识已肯定模型结构（或至多用迭代寻优决定了模型阶数、静寂时间等）的某种数学式子，在选定的测辨算法支持下最优地估计出方程中的参数所建立的模型。可见利用统计数据直接测辨理论模型，得到的总是参数模型。获得参数模型的先决条件是足够的有关系统结构的验前知识。参数模型可分成确定性和随机性两类，后者往往是在前者基础上加进随机项的产物（虽然理论上讲，参数本身都可能是随机性的）。随机项的概率特性一般是通过实验确定的，许多场合下往往设作常见的概率分布型（例如高斯型）。

iii **优化模型** 这是在理论模型或测辨模型基础上，加入性能指标（目标函数）、约束条件（等式或不等式约束）组成的一种模型。在动态优化模型中，还须给定容许控制集。

iv **决策模型** 这是在决策分析中经常用到的一类数学模型的总称。它可以是单目标的，也可以是多目标的；可以是单一决策人，也可以是多个决策人。多决策人的决策模型可以称为对策模型，特别是结合了最优控制理论的动态对策模型，通常叫做微分对策模型。

2) **结构模型** 结构模型更多关心模型内的结构（几何）特点和因果关系，而把变量间的数学关系放到次要地位。例如运筹学中的活动网络或网络流模型、大系统理论中的布尔网络模型、近年来常用于社会经济系统分析和大工程项目规划分析（以至世界经济预测）中的解释性结构模型（ISM）、交叉影响分析模型（CIA）、系统动力学模型等等。生物系统分析中常用的间室分析模型原则上也属于这一类型。

3) **仿真模型** 仿真模型也是符号模型之一，它是通过数字或混合计算机上运行的程序来表达模型的。数学模型和结构模型都可能过渡到仿真模型，只要采用适当的仿真语言或依据相应的仿真程序。随机仿真中使用的Monte Carlo法也属于这一类。与测辨模型相比，仿真模型回避了较麻烦的测辨算法，能够在计算机上直接并立即显示运算结果。不过，仿真模型得到的结果往往是数值或图形，不是闭形的解析式子，因而在分析和综合系统时不如测辨模型方便。二者各有所长，所以在近年发展的机辅设计或机辅制造技术中，往往兼收并蓄。

本书只讨论通过测辨建立数学模型的各种基本方法。

数学模型也可以纵向分类。例如：

i **动态和静态** 一根管子中流量和平均速度间的关系是静态的，即流量等于速度和截面积之积。这个简单的线性代数方程只描述了稳态过程。质量-阻尼-弹簧组成的机械系统，其输入输出变量关系可以用一个二阶线性常系数常微分方程描述，我们能据以了解系统的瞬态过程（如阶跃响应、振荡特性等），因此是动态模型。动态模型须根据问题的性质加以化简，否则碰到复杂的动态过程很难用单一方程表达。常用的化简办法有四种：分开描述一个系统的不同部分，再组合起来变成（比方说）一组微分方程和一组边界条件；将一个复杂系统（大系统）的模型分解成若干个子模型；分快、中、慢过程建立多时标模型；集结降阶。

ii **线性和非线性。**

iii **集总参数和分布参数。**

iv **连续时间和离散时间。**

v **定常、时变和延迟。**

上面这些分类原则都是读者所熟悉的。

进一步,按建立数学模型的目的,可以分成面向设备的模型和面向控制系统的模型。

• 面向设备 根据理论建立的模型,往往是非动态的,帮助决定设备尺寸和其他基本参数。同时还有对计划中的设备建立供选择的经济模型;对设备现代化作出决策的经济模型等也属于面向设备的模型。

• 面向系统 主要是帮助控制系统定量设计所采用的动态模型,适用于较宽的过程运行范围。也包括粗略地逼近设备的简单模型,但含有某些可作经济定量分析的变量,以便于人们决定系统的范围和类型。此外,作为控制系统的一部分用作在线控制的简化动态模型也属于面向系统的模型。

应当声明,所有上面提到的分类原则并不是一成不变的,它们在很多场合下可能转换、兼用。仿真可以跟测辨同时进行;在小信号条件下非线性可能线性化;建立数学解析模型有时要借助物质流图、方块图、网络图等结构,有时要利用曲线和表。

3. 建模过程

一般的建模过程是一种反复迭代过程,工程控制系统的建模过程相对而言要简单一些。

头一步要搞清建模的目的(问题的定义)是什么,其中包括建模的准则(例如精度标准、定量还是定性等)。除非是简单得不得了模型,一般情况下都要开“诸葛亮会”,对提出来的建模任务作深入细致的讨论研究,把准备建模的对象解剖得一清二楚。

随后才是选择合适的模型形式。这一步的技术性很强,需要建模者有足够的理论基础和实践经验。不过,能用于建模者的各种信息类型往往可以是不相容的,因为它们出现在不同的理论水平上,而且不可能加以结合。比方说,基于较高深的过程理论表达基本过程的方程式可能很详尽和复杂,但引进模型来的次要参数却因此大大膨胀了。反之,描述过程的方程可能是只有极少变量的半经验公式,而这又很难反映过程中的实际动态行为。假定已使方程相容,第二步才是选择方程。有显著影响的方程固然应该首先考虑,而方程对模型行为的影响尚属未知的时候也必须包括进来,它们可以在发现无用时再剔除。不过这种办法有可能一开始就把模型方程搞得大而无当,而且实用上很难消去冗余的方程。较好的办法是首先设计较简单的模型,然后在建模过程中逐步提高。

模型方程中的未知系数应尽可能从文献上或从特别设计的测试法中取得,它们在计算机中以数值形式或查表形式存储。剩下的未知系数就可以用参数估计法确定。为参数估计和模型验证,均需得到足够的数。只有极少数情形可以利用正常的工作记录,大多数情况下均需专门考虑数据搜集方式(包括仪表安装、测量办法、注入特殊干扰之类),尚待设计的系统无法取得实际工况数据时,或是采用现有类似设备的数据,或是通过实体模型。

一般的建模过程如图0-2。

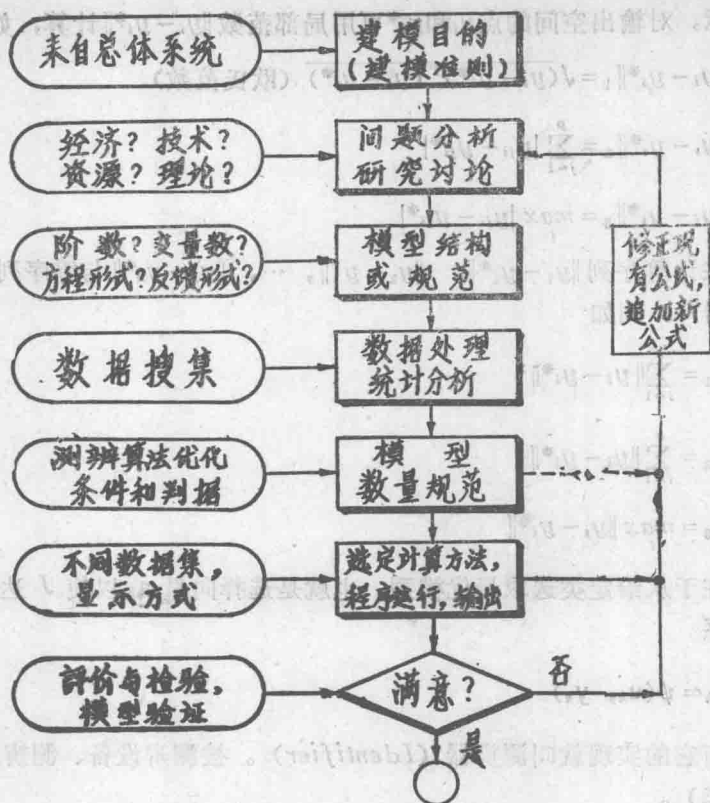


图0-2 建模过程

0-2 测 辨

1. 基本概念

设图0-1所示被测辨对象的输入向量 u 和输出向量 y 分别有维数 m 和 p 。连续实验（在时间区间 $[0, T]$ 上）得到的数据表作 $\{u(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ ，离散实验则得到 $\{u_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 。设备的静态模型写作

$$\bar{y} = \phi(u)$$

或引入参数向量 $a \in R^r$ ，写成

$$y = \phi(u, a)$$

所谓一类模型，指对于所有的 $a \in D_0 \subset R^r$ 关系 $\phi(u, a)$ 的集，这里 D_0 是空间 R^r 中的子空间（整环）。从一个给定类选取一个模型意味着给参数 $a = [a_1, a_2, \dots, a_r]$ 赋以具体数值。

可以通过某种测辨质量判据 J 来计算设备输出 y 与对应于同一输入 u 的模型输出 y^* 之间的偏离程度，或“距离”。也可以在同一输出下度量设备与模型的输入间的距离，距离可

以借助范数表示。对输出空间的点 y_i 和 y_i^* 可用局部范数 $\|y_i - y_i^*\|$ 计算，如

$$\|y_i - y_i^*\|_1 = \sqrt{(y_i - y_i^*)^T (y_i - y_i^*)} \quad (\text{欧氏范数})$$

$$\|y_i - y_i^*\|_2 = \sum_{j=1}^p |y_{ij} - y_{ij}^*|$$

$$\|y_i - y_i^*\|_3 = \max_j |y_{ij} - y_{ij}^*|$$

全局判据则用来计算序列 $\|y_1 - y_1^*\|, \|y_2 - y_2^*\|, \dots, \|y_k - y_k^*\|$ 与零序列间的距离（设一共测了 k 次数据）。例如

$$J_1 = \sum_{i=1}^k \|y_i - y_i^*\|^2$$

$$J_2 = \sum_{i=1}^k \|y_i - y_i^*\|$$

$$J_3 = \max_i \|y_i - y_i^*\|$$

测辨的目的就在于从给定类选取最优模型，也就是选择向量 a_k 以使 J 达到极小。 a_k 与测量结果间的关系

$$a_k = \psi(u_k, y_k)$$

叫测辨算法，而它的实现就叫测辨器（Identifier）。被测辨设备、测辨器和模型组成测辨系统（图0-3）。

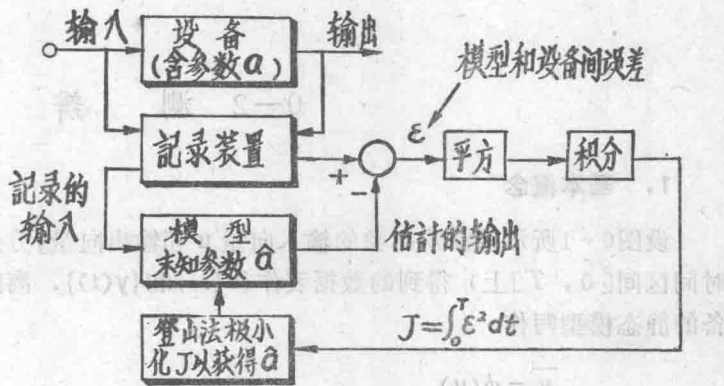
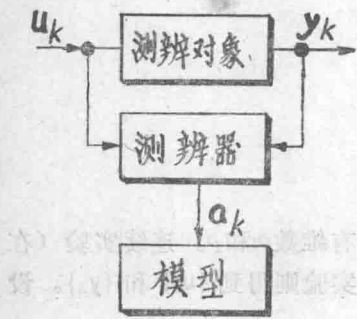


图0-3 测辨系统（离散）

图0-4 登山法找最优估计值 $\hat{a}$

确定最优参数的一种计算机方法叫做登山法。在时间区间 $[0, T]$ 上记录的数据重复输入给模型来得到不同的 J 值。一旦登山程序不再能继续降低纯量值判据 J ，向量 $\hat{a}$ 便是设备参数的最佳估计了（图0-4）。

设有两个未知参数 a_1, a_2 ，从而 J 是 a_1, a_2 的函数（ $J = J(a_1, a_2)$ ）。图0-5所示流程表明简单的登山程序。对于 J 的等值线大致为圆形时，可以很快定出 J 的极小值（图0-6）。如果偏离圆形很远，简单登山法将会失败（图0-7）。实用上可采用边缘跟随技术或修改未知参数的标尺使 J 线近似为圆。

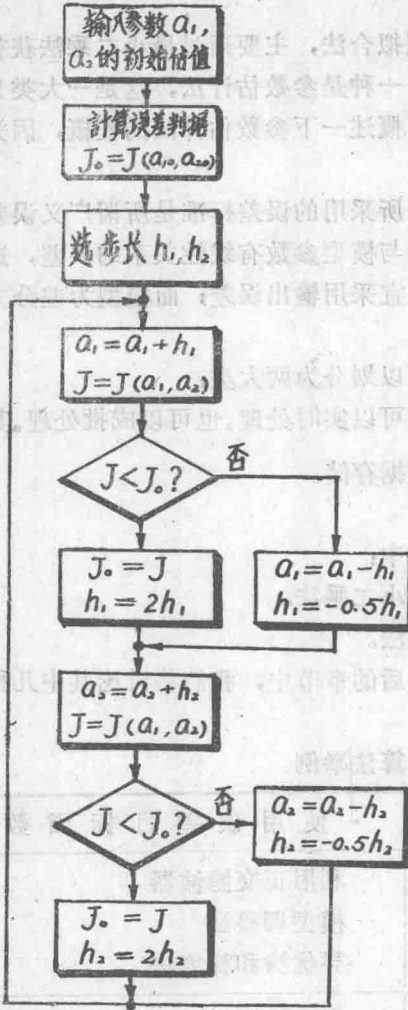


图0-5 一个简单的登山程序

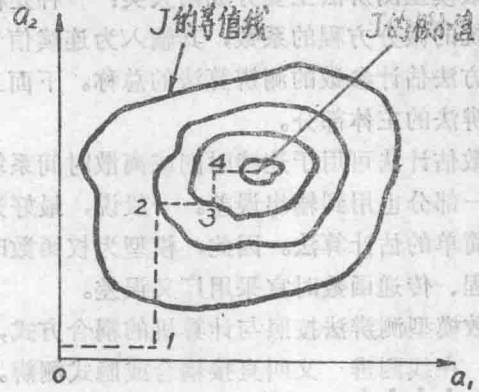


图0-6 园形山上登山

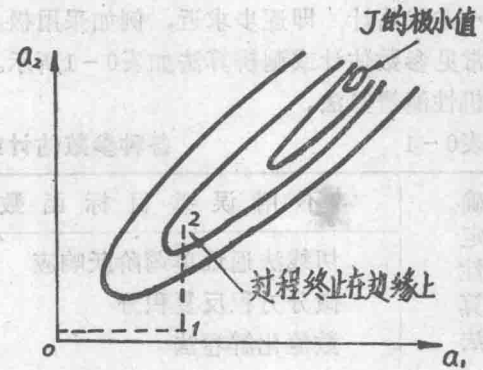


图0-7 在山边的登山过程

2. 非参数模型测辨

非参数模型测辨法适用于线性或可以线性化的系统，但原则上适用于任意复杂系统，对模型结构没有限制。

常用的非参数模型测辨法都属于经典测辨范围，分频域和时域两类。频域测辨只适用于线性定常系统，只能离线测辨。时域测辨可用于在线测辨，也能用于非线性系统。

(1) 付里叶分析 主要用来确定连续信号下线性系统的频率响应特性。用计算机求解时，先通过非递推测辨算法，然后再转入递推测辨算法。

(2) 谱分析 可用于连续时间或离散时间的线性系统，测辨结果是频率响应特性的数值。谱分析容许输入的测辨信号可以是随机信号，也可以用周期信号。

(3) 相关分析 与谱分析的条件相同，但在时域内进行测辨。这样得到的是相关函数（特殊情况下为权函数）。相关分析法是一种递推测辨算法。

3. 参数模型测辨

参数模型测辨法主要分成两大类：一种是模型拟合法，主要通过最小二乘法获得描述线性系统的微分方程的系数，其输入为连续信号；一种是参数估计法，这是一大类采用数理统计方法估计参数的测辨算法的总称。下面主要概述一下参数估计法的梗概，因为它是现代测辨法的主体部分。

参数估计法可用于连续时间或离散时间系统。所采用的误差标准是所谓广义误差（详后），一部分也用到输出误差。一般说，最好采用与模型参数有线性关系的误差，这样能产生较简单的估计算法。因此，模型为权函数时，宜采用输出误差；而模型为差分方程、微分方程、传递函数时宜采用广义误差。

参数模型测辨法按照与计算机的耦合方式，可以划分为两大类：

(1) 在线测辨 又叫直接耦合或隐式测辨。它可以实时处理，也可以成批处理。其中：

- 递推测辨 适用于实时处理，一般不需要数据存储。
- 非递推测辨 用于大多数成批处理情况。

(2) 离线测辨 又叫间接耦合或显式测辨。其中：

- 直接估计 即直接计算出结果，例如采用最小二乘法。
- 迭代估计 即逐步求近，例如采用极大似然法。

常见参数估计或测辨算法如表0-1所示。在以后的章节中，我们将讨论其中几种主要的随机性测辨算法。

表0-1

各种参数估计或测辨算法举例

确定性算法	不用误差目标函数	使用误差目标函数
	切线法逼近单调阶跃响应 微分方程反复积分 数值化解卷法	利用正交滤波器 模型调整法 寻优法和梯度法
随机性算法	线 性 系 统	非 线 性 系 统
	最小二乘法 普通最小二乘法 OLS 加权最小二乘法 WLS 马尔可夫估计法 随机逼近法 卡尔曼-布西过滤法 辅助变量法 IV 广义最小二乘法 GLS 扩充最小二乘法 ELS 平方根过滤法 极大似然估计法 Bayes 估计法	梯度法 随机逼近法 拟线性化法 差分逼近法 非线性过滤 不变嵌入法 数据处理归组法 $GMDH$

在选择一种测辨方法的时候，重要的是了解哪些主要因素将会影响这种选择。一般讲，并没有统一的标准来作为选择依据，它们常以下列因素为转移：

- 对象所受干扰的类型 例如有的方法只能用于干扰为高斯白噪声的场合，如果干扰是非高斯的，方法显然不能用。

- 最终目的 它影响模型种类和对精度的要求，因而也影响方法。例如在某种放松的正则条件下，极大似然法能得出渐近无偏、相容和有效估计量，但计算量大于最小二乘法，只对特定噪声模型能获得满意结果。当然可以采用近似极大似然法在统计效率和计算量之间折衷，但又影响精度。又如目的在于在线参数测辨，则最常用的是辅助变量法。

- 验前知识 因为各种方法所需的验前知识是不同的。

- 预定性能 如调节器特性要求比例还是积分、系统建立时间（时间常数）、延迟时间、噪声特性等的要求。方法不同，所得模型的性能也有差异。

- 经济考虑 即简便、省事等。

基于上述，常依据几个主要指标比较各种参数估计法的优劣。它们是：

- 被测辨模型的精度（模型误差）和性能跟计算时间的依赖关系（算法收敛性）。

- 计算量（内存空间、计算机时间等）的大小。

- 要求的验前假定、验前知识和要素的多少。

- 测辨过程所耗费的总测辨时间或测辨周期的长短。

- 估计量在统计上是不是无偏的、渐近无偏的；相容的；有效的、渐近有效的以及它的正态性等。

- 是否能令人满意地过渡到预期性能的模式。

在实际学习到有关的参数估计法之前，了解到这些判别依据能帮助我们选择学习的重点。

4. 通过参数估计的建模过程

总的来说，测辨就是通过系统的（载噪）输入输出数据建立数学模型。一般情况下，通过测辨建模的过程主要包括以下四个步骤：

- 实验设计
- 确定模型结构
- 参数估计
- 模型验证和比较

基本流程如图0—8。现择要分述如下：

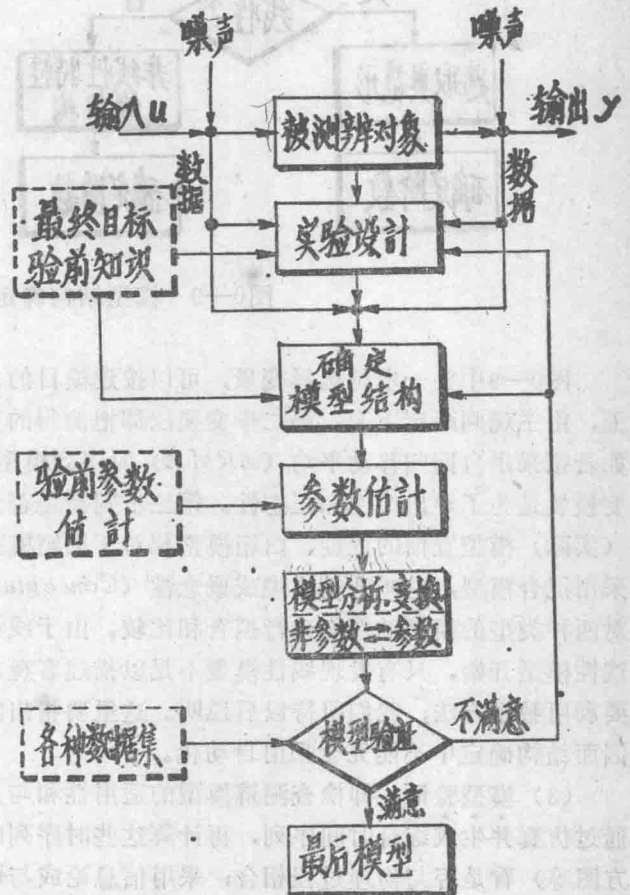


图0—8 通过参数估计建模的流程

(1) **实验设计** 确定输入信号种类、信号是否最优、信号发生方法或仪器；决定测定方法、采样时间、测辨时间；安排数据存储；选择计算设备和分析器；信号过滤方法；传感器类型和规格；区别开环或闭环测辨、在线或离线测辨等。

(2) **结构确定** 简单系统一般可设定模型结构，复杂系统除设定外，尚需通过结构测辨给予验证。结构测辨主要用于黑箱模型，要在判断模型型式后再进行阶数测辨。结构测辨的顺序如图0—9。目前已发展的各种常见阶数检验法可以分成三组，即损失函数检验法、极零相消检验法和残差检验法。

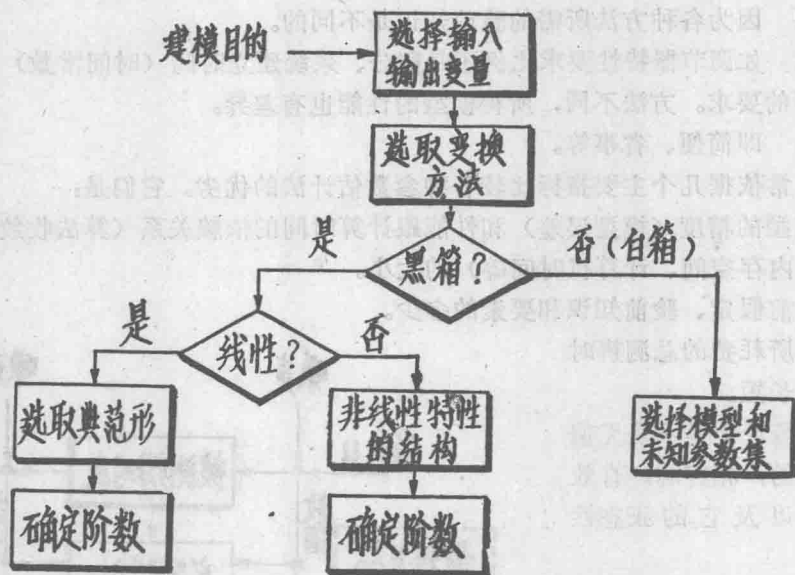


图0—9 模型结构确定中的顺序

图0—9中头一步是选择变量，可以按建模目的、对过程的实际理解和建模的任务范围，由主观判断定下来。第二步变换法即把测得的变量变换成适用于各类模型的形式。例如若拟采用自回归移动平均（*ARMA*）时序列模型或一个线性状态空间模型，所选择的变换就是为了导出线性和正态性。第三步判断是否为黑箱，主要根据建模目的、对白箱（实际）模型置信的程度、白箱模型相对于黑箱模型的复杂性等因素。在许多情况下可以采用混合模型，也叫灰箱模型或概念性（*Conceptual*）模型。或者在最后选定之前，可以对两种类型的模型的性能进行拟合和比较。由于线性模型拟合时比较简单，一般总是先从线性模型开始，只有发现线性模型不足以描述客观对象时才加进非线性特征。第四和第五要利用数学方法，我们留待以后说明。这里要指出的是：每一步都需要一定的经验判断，因而结构确定中不能完全采用自动化。

(3) **模型验证** 即检查测辨模型的适用性和与其他候选模型作比较。常用的方法有：通过仿真并生成综合时间序列，再计算这些时序列的各种统计特性（相关图、功率谱、直方图等）看是否与物理过程相合；采用信息论或与熵有关的判据进行比较；采用 *Bayes* 决策理论法。后者甚至可以比较两个以上特性有很大差别的模型。

5. 测辨模型的用途

利用现代计算机手段,经测辨获得的数学模型广泛用于工程控制系统、经济、生物、医学、生态和许多非工程领域。其主要用途有以下几个方面:

- (1) 更全面地了解系统的动态行为。
- (2) 能据以对系统作出数学处理,提供设计依据。
- (3) 验证理论模型的正确性和适用性。
- (4) 用作系统综合的主要定量根据。
- (5) 预测(外推)信号。
- (6) 取得系统行为的最优化。
- (7) 计算无法直接测得的变量。
- (8) 为系统仿真或生成时间序列提供依据。

6. 测辨模型化的原则

我们通过测辨建立数学模型,目的主要在于应用。因此,同一个对象可能因采用不同的测辨方法而得到复杂程度、经济价值都完全不同的模型。建立测辨模型需要较多的数学知识,而需要的专业知识相对于理论模型来说要少得多,不过仍然要求概念清楚,算法简单容易推广用于其他场合(例如过滤、平滑、调和内插等)。其次,通过测辨来建立数学模型,应能通过测辨算法最大限度地减轻干扰成分的影响,使系统和模型间误差尽可能减至最小。最后,测辨时务求使用较少的仪器设备,争取以较小的计算量完成同一测辨任务。

通过测辨建立模型还必须满足下列四个基本条件:

(1) **目的性 (Objectivity)** 建模是为了什么?预测?控制?分析?这将左右模型形式的选择。例如短期预测模型一般不适用于长期预测。反馈条件下的控制系统可以采用黑箱模型,但不一定能提供足够的有关系统内部情况的了解。

(2) **实在性 (Physicality)** 模型必须反映和使用尽可能多的物理信息。例如有可能时,状态变量应当有物理意义或有物理解释。有必要或希望采用黑箱模型时,被测辨的模型应当受到详细的客观实际的检查和性能合理性的验证。

(3) **可测辨性 (Identifiability)** 着手进行一项测辨任务之先,应回答:面临测辨任务的系统能否通过最佳地安排实验条件,唯一地确定系统的模型或它的等价类?如果对关键变量的观测有困难或受到限制,或是数据不充分,或是系统的验前(理论)知识不够,或是在参数估计之前选了一个不合用的模型结构,都可能导致系统“不可测辨”。这种可测辨性问题,在生物系统和经济系统测辨时尤为突出。

一般说,线性状态空间模型采用典范形能避免这种不可测辨性。

(4) **简洁性 (Parsimony)** 只要模型结构形式是合用的,一般说应尽可能包含最少的参数。比方某时序数据的拟合,用一个10阶自回归AR模型和一个2阶ARMA模型都能得到相似的优度,但AR模型包含11个参数,ARMA模型只包含5个,显然后者更可取。因为用于估计参数的样本量 N 是有限的,参数越少,估计量方差越小。

7. 模型失灵的原因

并不是任何建模工作都能获得成功,相反,“准备失败”才是比较科学的态度。模型

失灵的原因可能来自许多方面，例如：

- 缺乏足够的测量数据。
- 由于缺乏专业知识、经验或对象知识，模型最初设定的结构就有问题。
- 系统过于复杂，没有很好地分解或降阶；也可能由于数学方法不足。
- 模型技术实现的数值或计算上存在问题。例如：
 - 迭代循环不能收敛。
 - 过多的计算时间要求，从而模型最终是无用的。

下面谈谈迭代循环不能收敛的问题。例如两个要结合起来很复杂的方程可以分别解得，这可以借助迭代过程。设两个方程为

$$(a) \quad y = mx + c$$

$$(b) \quad y = lx + d \quad \text{或} \quad x = l^{-1}(y - d)$$

把初始估计值 x_0 引进 (a) 式，得 y 的估计值 y_0 。将 y_0 代入 (b)，产生估计值 x_1 ，然后代入 (a)，得估计值 y_1 ，一直到 x_n 、 y_n 同时按预期地满足方程。其过程可如图 0—10 所示。这个过程显然是收敛的。什么情况下收敛不好呢？一般须采用不动点定理研究。现在简单地加以说明。

设迭代过程可一般地用公式

$$x_{n+1} = Ax_n$$

表示，其中算子 A 表迭代过程，而 x 可以是具有分量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的向量。若

$$\|Ax\| \leq k\|x\|$$

这里 k 满足 $k \leq 1$ 而 $\|x\|$ 定义为 $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ ，则 A 叫做收缩算子。当 x 为纯量，若

$$|Ax| \leq k|x|$$

且 $k < 1$ 和 $|x|$ 表 x 的模或绝对值， A 也是收缩算子。于是，不动点定理指出：

设 A 为收缩映射，且令 A 对某个正常数 M 和任意 x_1, x_2 满足 $|Ax_1 - Ax_2| \leq M|x_1 - x_2|$ (称里卜希茨条件)。则递推方程 $x_{n+1} = Ax_n$ 收敛到唯一的元素 x 。

例：设用牛顿法递推解出下述方程

$$\left. \begin{array}{l} y = a \ln x \\ y = kx \end{array} \right\} \quad \text{令 } F = a \ln x - kx \quad \text{则 } F = 0$$

暗指 x 满足两个方程

牛顿法引出递推方程

$$x_{n+1} = x_n - F_n / F'_n$$

这里 $F'_n = (d/dx)(F_n)$

可用不动点定理研究这个关系式的收敛性。迭代过程可以写成形式 $x_{n+1} = Ax_n$ ，这里

$$Ax_n = x_n - \left(\frac{a \ln x_n - kx_n}{a/x_n - k} \right)$$

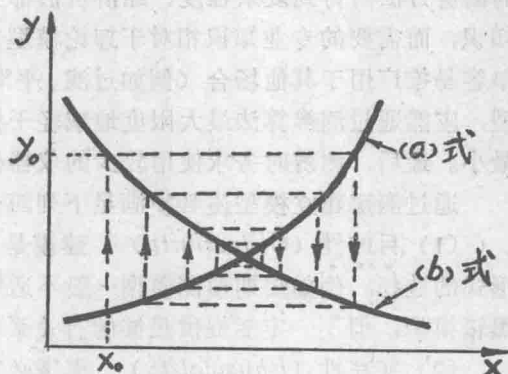


图0—10 迭代过程

算子 A 是连续的和满足里卜希茨要求，因此若 A 是收缩算子，迭代过程将收敛到唯一的 x 。通过代入 a, k 的数值和考虑 x 的赋值范围，可以获得有关收敛性的必要信息。

1 数学模型

1-1 理论模型

1. 理论模型概述

建立理论模型须考虑下述问题:

- (1) 定出系统边界, 将系统划分为与各子空间对应的子系统。
- (2) 对子系统应用不变性原理和平衡原理, 例如列出运动方程或连续性方程。不变性原理引出一组质量平衡方程, 其一般形式是:

$$\text{输出质量 } y = \text{输入质量 } u \pm \text{内存质量 } q$$

对于实际系统, 表示这种质量平衡的方程组可能很复杂。显然对上式微分可得流速关系:

$$dy/dt = du/dt \pm dq/dt$$

其次, 如热平衡方程:

内部生成的热 = 进入产品的显热 - 产品释放的显热 $\pm$ 过程产生或吸收的热

又如能量平衡方程:

时间 t 系统内的能量 = 时间 0 系统内的能量 $\pm$ 时间区间 $[0, t]$ 内系统耗散或馈入能量

平衡方程也包括力学系统的牛顿定律:

$$\text{作用力} = \text{质量} \times \text{加速度} + \text{摩擦力}$$

$$\text{作用力矩} = \text{惯量} \times \text{角加速度} + \text{摩擦力矩}$$

而对于电路系统则可应用克希荷夫定律:

节点上电流的代数和等于零

围绕闭合电路的电压和等于零。

- (3) 线性元件的类比或模拟, 这对许多非电系统几乎是绝对必要的。由于常见的工程系统, 元件特性间的类比主要是在线性范围内进行的, 这就提出非线性方程在适当前提下给予线性化的问题。

作为复习, 表1-1中列出了常用于理论模型推理过程的模拟特性。

- (4) 根据问题的性质或对象的特点, 作出各种合理的假设, 以便简化计算, 又不失精确性。此时, 过程不完善性、非线性、非齐次性等应加以考虑, 往往需更多的专业知识。

例如在一对平行轧辊间热金属带的轧制(图1-1)。令 H 、 h 分别为进料和出料厚度; θ 为带处于辊隙中的温度; R 为辊的半径; S 为不轧时辊间间隙; ω 为辊的角速度; μ 是辊与带间摩擦系数; λ 为被轧材料

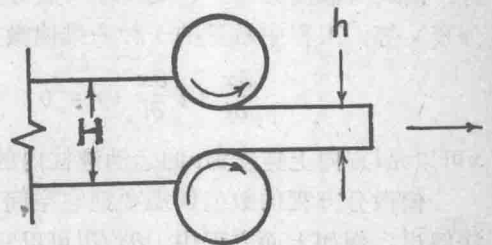


图1-1 金属带的压延