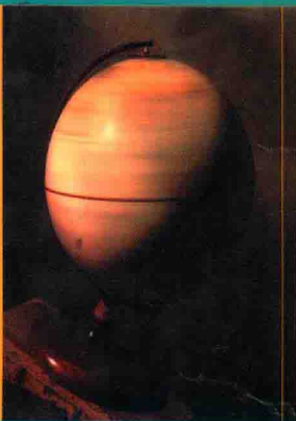
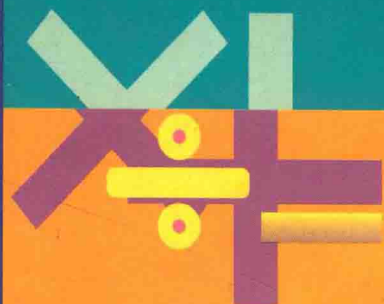


中学数学专题丛书

叶尧城

主编



朱宗贵 编著

函数

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

中学数学专题丛书

叶尧城 主编

函数

朱宗贵 编著

9

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

函数/朱宗贵编著. —武汉:湖北教育出版社, 2001

(中学数学专题丛书/叶尧城主编)

ISBN 7-5351-3165-4

I. 函… II. 朱… III. 函数-中学-教学参考资料

IV. G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 086955 号

出版 发行:湖北教育出版社
网 址:<http://www.hbedup.com>

武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店

印 刷:文字六〇三厂印刷

(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)

开 本:787mm×1092mm 1/32

6.5 印张

版 次:2002 年 4 月第 1 版

2002 年 4 月第 1 次印刷

字 数:126 千字

印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3165-4/G·2570

定价:8.50 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

总 序

随着素质教育的深入推进,需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁,以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建?改革教材成为了人们选择的突破口!当前,国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用,新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而,我国幅员辽阔,地区间的教育水平的差异大,个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”,发展学生的个性特长,让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高,还需要通过特定的教学过程来完成,其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等)。因此,我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物,以专题讲座的形式,帮助学生了解知识的发生、发展过程,学会分析、解决问题的思想方法,深化、拓宽相关知识。

有鉴于此,我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子,各册相对独立又相互联系,小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触,介绍一点数

学史料,有助于学生吸收各种不同的数学经验,理解各种不同的数学思想观点,体会数学的人文价值;着力反映知识的纵横联系,并以范例的形式予以说明;精选典型例题,揭示重难点,说明重在何处,难在哪里,如何理解,着重分析解题思路,阐释思想方法;选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题,引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题,供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生,可系统阅读,也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲,该套丛书具有如下特点:

1. **帮助学生夯实基础。**通过知识精讲、典例剖析、归纳小结,落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力。**精选思想性强的综合题,启迪学生的思维,开阔学生的思路,落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用。**精选密切联系生活实际和社会实践的应用题,促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新。**精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题,培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功。**选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型,有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩,走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试,难免出现这样或那样的疏漏和不足,敬请读者提出批评和建议,以便再版时修改,使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

函 数

“函数”是中学数学的重要内容,它提供了研究两个变量之间数量关系的一般理论和基本方法,这些知识又是解决许多数学问题的工具。因此,它是学好中学数学的基础之一。此外,函数思想是解决数学问题时应用最广泛、最基本的数学思想,它贯穿于整个中学数学之中。基于上述原因,“函数”在中学阶段的学习中占有十分重要的地位。

目录

第一节 映射与函数	1
1.1 映射	1
1.2 函数的概念	4
1.3 函数的图象	13
1.4 二次函数	20
1.5 二次函数与方程、不等式	25
1.6 函数的最值	33
第二节 函数的性质	50
2.1 函数的奇偶性	50
2.2 函数的单调性	56
2.3 反函数	61
第三节 指数函数与对数函数	75
3.1 指数函数	75
3.2 对数函数	82
3.3 指数方程与对数方程	95
第四节 函数方程	113
4.1 基本概念	113
4.2 函数方程的解法	114
第五节 函数的实际应用	136
5.1 建立反比例函数模型	137
5.2 建立一次函数模型	139
5.3 建立二次函数模型	143
5.4 建立指数函数模型	149

5.5	建立 $y = Ax^p + \frac{B}{x^q}$ 函数模型	151
5.6	建立分段函数模型	155
5.7	建立 $y = ax + b + \sqrt{g(x)}$ 型模型	161
附录	全国高考数学试题汇编 (函数部分)	171
	参考书目	201

第一节

映射与函数

1.1 映射

定义 1 设 A, B 是两个集合, 如果按照某种对应法则 f , 对于集合 A 中的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 那么这样的对应 (包括集合 A, B 以及 A 到 B 的对应法则 f) 叫做集合 A 到集合 B 的映射. 记作: $f: A \rightarrow B$.

$f: A \rightarrow B$, 如果 A 中的元素 a 通过映射 f 有 B 的元素 b 与它对应, 这时 b 叫做元素 a 在 f 之下的象, a 叫做 b 的原象.

对映射定义的理解要注意以下几点:

(1) 有两个集合 A, B , 它们可以是数集, 也可以是其他集合, 但要注意先后次序, 即从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射一般是不同的.

(2) 存在从 A 到 B 的对应法则, 这个法则可以是解析的, 也可以是表格、图象及其他形式.

(3) 集合 A 中的任何元素都必须有象, 而且象是唯一的. 这是映射定义的核心.

(4)不要求集合 B 中每一个元素都有原象.即使有原象也不要求唯一.如果集合 B 中的每一个元素都有原象,就称 f 是 A 到 B 上的映射(亦称满射),这是映射的一种特殊情形.

定义 2 设 A, B 是两个集合, $f: A \rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 的映射,如果在这个映射下,对于集合 A 中的不同元素,在集合 B 中有不同的象,而且 B 中每一个元素都有原象,那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射.

在映射 $f: A \rightarrow B$ 中,象的集合 $C \neq B$ 时的映射不是一一映射,也就是说, $C = B$ 是一一映射的必要条件.

例 1 判断下列对应法则是不是 A 到 B 的映射.

(1) $A = R, B = [0, +\infty), f: x \rightarrow x^2;$

(2) $A = [0, +\infty), B = R, f: x \rightarrow \pm\sqrt{x};$

(3) $A = \{\text{正整数}\}, B = \{\text{正整数}\}, f: n \rightarrow n-1.$

解 (1)是.这是因为任何实数的平方都是唯一确定的非负实数.

(2)不是.因为 $x > 0$ 时, $f(x) = \pm\sqrt{x}$, 不能由 x 唯一确定.如 4 的象有 2 和 -2, 不唯一.

(3)不是.因为 $f(1) = 1-1 = 0 \notin B$.

例 2 已知 $A = \{\text{正整数}\}, B = \{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \dots\}$. 映射 $f:$

$x \rightarrow y = \frac{2x-1}{2x+1} (x \in A)$, 那么在 f 的作用下, 象 $\frac{99}{101}$ 的原象是

解 令 $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{99}{101}$, 解得 $x = 50$.

例3 设 $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 对应法则 $f: x \rightarrow y = x$, $\varphi: x \rightarrow y = \frac{x}{2}$, $g: x \rightarrow y = \frac{x^2}{4}$, 则下列结论正确的是

- (A) f, φ, g 都是从 X 到 Y 的映射
- (B) 仅有 f, φ 是从 X 到 Y 的映射.
- (C) 仅有 φ, g 是从 X 到 Y 的映射.
- (D) 仅有 f, g 是从 X 到 Y 的映射.

解 $\because f(2) = 2 \notin Y, \therefore f$ 不是从 X 到 Y 的映射, 故选(C).

例4 已知集合 $P = \{a_1, a_2, a_3\}$, $Q = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. 问

(1) 从 P 到 Q 的映射有多少个?

(2) 从 Q 到 P 的映射有多少个? 其中 P 中的每个元素都有原象的有多少个?

解 (1) 确定一个映射即是要分别确定集合 P 中每一个元素在集合 Q 中的象, 而集合 P 中每一个元素的象都有 5 种可能, 由乘法原理, 从 P 到 Q 的映射个数为 $5^3 = 125$ (个).

(2) 由于 Q 中每一个元素在 P 中的象都有 3 种可能, 所以从 Q 到 P 的映射有 $3^5 = 243$ (个).

在上述映射中, P 中至多有两个元素不是集合 Q 中元素的象. ①若 P 中有且仅有一个元素不是象, 此时 Q 中每一个元素的象都有两种可能, 其映射个数为 $C_3^1 \cdot 2^5$ 个; ②若 P 中有且仅有两个元素不是象, 此时 Q 中每一个元素的象只有一种可能, 其映射个数为 $C_3^2 \cdot 1^5 = C_3^2$.

故 P 中每一个元素都有原象的映射有: $3^5 - C_3^1 \cdot 2^5 - C_3^2$

$= 150(\text{个})$.

1.2 函数的概念

定义 如果 A, B 都是非空的数集, 那么 A 到 B 的映射 $f: A \rightarrow B$ 就叫做 A 到 B 的函数. 记作 $y = f(x)$.

其中 $x \in A, y \in B$, 原象的集合 A 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域, 象的集合 $C (C \subseteq B)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的值域. 函数符号 $y = f(x)$ 表示“ y 是 x 的函数”, 有时简记作函数 $f(x)$.

注 函数是中学数学最为重要的概念之一. 函数概念的出现, 是人类思维从静飞跃到动的必然. 当人们试图描述一个运动和变化的世界的时候, 导出变量和因变量是极为自然的.

然而, 今天的函数的含义与三百年前是大不相同的. 公元 1692 年, 莱布尼兹首先使“函数”(function)这个词时, 所表示的仅仅是“幂”、“坐标”、“切线长”等与曲线上的点有关的几何量. 到十八世纪二十年代, 历经了贝努利、欧拉(1734 年首先给出记号 $f(x)$)、拉格朗日、傅里叶的研究, 这一概念已扩展为早期定义: “由变量和常量所组成的解析表示式”. 后又经过柯西、巴契夫斯基(创设非欧几何)、狄利克雷的不断发展, 尤其是十九世纪七十年代康托用集合的观点定义函数, 解析式的限制被取消, 并为对应关系所替代, 才形成了函数的近代定义. 函数现已扩展为用“序偶”定义, 也就是现代定义. 函数概念的几度扩展, 反映了近代数学的迅速发展.

对函数概念的理解应注意以下几点:

(1) x 是集合 A 中的任意一个元素, x 不能是集合 A 外的元素. A 是非空数集.

(2) f 是预先给定的由 A 到 B 的对应法则的代表符号. 具体说, f 可以是 $3x+2$, 也可以是 $\lg x$, 还可以是 $2\sin(x - \frac{\pi}{6})$ 等. 法则 f 的基本特征有两条, 第一, f 对 A 中任意一个元素都可“加工”; 第二, 把 A 中任意元素 x 按 f 的“指令”进行“加工”后, “产出”的值是 B 中唯一的元素.

(3) 若 $x_0 \in A$, 经过法则 f 的“加工”所得的象是 $f(x_0)$. $f(x_0)$ 称为 x_0 点处的函数值, $f(x_0) \in B$.

(4) 任取 $x \in A$, 得到 $f(x)$, 如果 $f(x) \in A$, 又可以对 $f(x)$ 这个数按法则 f “再加工”, 所得的象是 $f(f(x))$, 如果 $f(f(x)) \in A$, 还可以对 $f(f(x))$ 这个数按法则 f 继续“加工”, 这就叫做复合函数运算.

(5) 定义域和对应法则可确定值域, 所以当定义域和对应法则都给定时, 才确定了一个函数. 换句话说, 当且仅当定义域与对应法则分别相同的两个函数才称为同一个函数. 但是定义域与值域分别相同的两个函数不一定是同一个函数.

√ 列表法、图象法、解析法是表示函数的三种不同的方法. 在一定的前提下, 它们都能独立地表示某些函数. 因此, 它们的关系是彼此相互独立的. 值得注意的是用解析法表示函数时, 函数的解析式不一定必须由一个式子给出, 它还可以用两个或两个以上的数学式子给出, 这样的函数称为分段函数. 分段函数的定义域为它在各段上定义域的并集, 对应法则各段

各异,分段函数是一个整体.如函数 $y = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 的定义域是 $\{x | x \geq 0\} \cup \{x | x < 0\} = R$, 其对应法则在 $[0, +\infty)$ 上是 $x \rightarrow y = x$; 在 $(-\infty, 0)$ 上是 $x \rightarrow y = x^2$, 不能把 $y = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 看作是两个函数.

区间是表示连续实数集合的一种形式,如下面的三种表示方法同义:满足 $1 \leq x \leq 2$ 的全体实数; $[1, 2]$; $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$. 区间具体的规定如下:

设 a, b 是两个实数,且 $a < b$, 则

(1) 满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间,表示为 $[a, b]$;

(2) 满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间,表示为 (a, b) ;

(3) 满足 $a \leq x < b$, 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合,都叫做半开半闭区间,分别表示为 $[a, b)$, 或 $(a, b]$.

解题方法举例如下

1. 函数的概念

例1 设 $x \in R$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是

(A) $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = (\sqrt{x})^2$

(B) $f(x) = x, g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

(C) $f(x) = 1, g(x) = (x-1)^0$

(D) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}, g(x) = x-3$

解 在(A)中, $f(x)$ 的定义域是 R , $g(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数; 同理, (C)、(D)中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域也不相同, 只有(B)中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域和对应法则都相同. $\therefore$ 选(B).

2. 函数的定义域

函数的定义域是函数研究的前提环境, 没有函数的定义域, 函数研究无从谈起.

当我们所研究的函数 $y = f(x)$ 是用一个式子表示时, 如果不加说明, 函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的集合.

例2 求下列函数的定义域

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-2x+1}$$

解 (1) 由 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域是 $[-2, 1) \cup (1, 2]$.

(2) 由 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$

$\therefore$ 函数的定义域是 $\{1\}$.

(3) $\because x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ 对一切 $x \in R$ 恒成立;

又由 $x^2-2x+1 \neq 0$ 得 $(x-1)^2 \neq 0, \therefore x \neq 1$.

∴ 函数的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

例3 求下列函数的定义域

$$(1) y = \frac{\sqrt{3x - x^2}}{|x - 1| - 1} \quad (2) y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \cos x$$

解 (1) 由条件组 $\begin{cases} 3x - x^2 \geq 0 \\ |x - 1| \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x \neq 0, 2 \end{cases}$

∴ 函数的定义域为 $x \in (0, 2) \cup (2, 3]$.

(2) 由条件组 $\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

当②中 k 取 $-1, 0, 1$ 时分别与①取交集得函数的定义域为

$$x \in [-5, -\frac{3\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 5]$$

例4 函数 $y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{ax^2 + 4ax + 3}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 求实数 a 的取值范围.

解 由题设 $ax^2 + 4ax + 3 \neq 0$.

$a = 0$ 时显然成立; $a \neq 0$ 时, $\Delta = 4a(4a - 3)$

则 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a > 0 \\ a(4a - 3) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ a(4a - 3) < 0 \end{cases}$ 解得

$$0 < a < \frac{3}{4}.$$

综上所述, a 的取值范围是 $a \in [0, \frac{3}{4})$

注 解例4易犯两种错误:①将 $g(x) = ax^2 + 4ax + 3$ 看成关于 x 的二次函数,从而遗漏 $a \neq 0$;②将 $ax^2 + 4ax + 3 \neq 0 (a \neq 0)$ 仅理解为 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ 而遗漏 $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

3. 函数的解析式

例5 (1) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 1) \\ -x+3 & (x > 1) \end{cases}$, 求 $f[f(\frac{5}{2})]$ 的值.

(2) 已知 $f(x) = 9x + 1$, $g(x) = x^2$, 若 $f[g(x)] = g[f(x)]$ 求 x 的值.

解 (1) $f(\frac{5}{2})$ 是 $f(x)$ 中 $x = \frac{5}{2}$ 时的函数值. $\therefore f(\frac{5}{2}) = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}$, 从而 $f[f(\frac{5}{2})] = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

(2) $f[g(x)]$ 是将 $f(x)$ 的解析式中的 x 替换为 $g(x)$, $\therefore f[g(x)] = 9g(x) + 1 = 9x^2 + 1$.

同理 $g[f(x)] = [f(x)]^2 = (9x + 1)^2$

由 $f[g(x)] = g[f(x)]$ 得, $9x^2 + 1 = (9x + 1)^2$, 解之得 $x = 0$ 或 $x = -\frac{1}{4}$.

注 对 $f(a)$ 及 $f[g(x)]$ 意义的理解是初学函数者的一个难点.

例6 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2) = f(-x-2)$, 且图象在 y 轴上的截距为 1, 被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$, 求 $f(x)$ 的解析式.