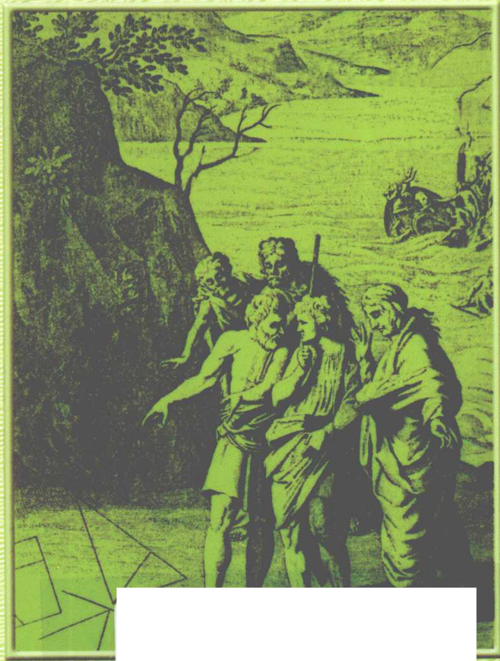
《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

轨迹

毛鸿翔　左铨如　编著



◎轨迹的基本知识

点的轨迹的探求

找特殊点的方法

动图形的轨迹和曲线族的包络

用综合法探求直线的轨迹

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

轨迹

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

毛鸿翔 左铨如 编著

◎轨迹的基本知识

◎点的轨迹的探求

◎找特殊点的方法

◎动图形的轨迹和曲线族的包络

◎用综合法探求直线的轨迹

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要讨论了点的轨迹的意义和探求轨迹的方法，包括综合法和解析法. 在此基础上，还简要地介绍了动图形的轨迹和曲线族的包络的初步知识.

本书可供中学数学教师参考，也可供中学生课外阅读.

图书在版编目(CIP)数据

轨迹/毛鸿翔，左铨如编著. -- 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5060 - 8

Ⅰ.①轨… Ⅱ.①毛… ②左… Ⅲ.①中学数学课—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 286166 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张　佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 11.75　字数 122 千字
版　　次　2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 5060 - 8
定　　价　28.00 元

目录

轨迹的基本知识

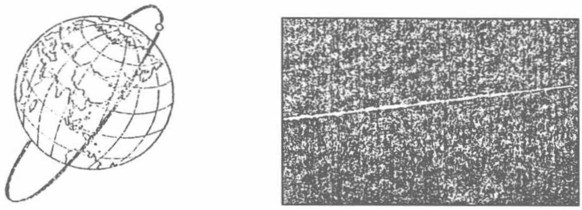
第1章

1.1 点的轨迹的意义

一切事物都在不断地运动变化. 而事物的运动有着一定的形式. 为了认识并改造客观世界,就必须研究和掌握客观事物运动的形式. 在自然科学中,质点运动的形式常常是我们研究的对象. 例如,要使炮弹命中目标,就需要研究炮弹射出后的运行轨道. 又如,发射人造卫星,它的运行轨道的观测和研究至关重要(图 1.1). 而质点的运动有着种种形式,这种种形式是由一定的条件,如质点运动的速度,地球对质点的引力等决定的. 在数学里,我们把这类问题抽象为点的轨迹问题来研究.

通俗地说,轨是指一定的规律,迹是物体运动时留下的痕迹. 因而点的轨迹可以说成是动点按照一定的规律移动时所留下来的痕迹. 也可以解释为,动点按照一定的条件作尽可能的移动所经过的路线.

假如,把两脚规张开,一个脚的端点固定在平面板上,另一个脚的端点在平面板上作尽可能的移动,就画出一个圆.这个圆,就是两脚规在移动一个脚的端点所留下的痕迹.



(1)　　　　(2)

图 1.1

但是,痕迹、路线都不是数学概念,而只是一种形象的描述,这对我们理解轨迹的概念有一定的帮助;但还不能使我们对轨迹作出准确的解释.那么,一个动点按照一定的条件,作尽可能的移动所留下来的痕迹,它的实质究竟是什么呢?

现在仍以圆为例子来进行探讨,当把两脚规张开,使它的两个脚的端点之间的距离等于定长 l,并且使一个脚的端点固定在平面板上的一个定点 O 上,而当另一个脚的端点绕着定点 O 旋转一周时,我们就画出了一个圆.因为这另一个脚的端点在平面板上移动时,它和定点 O 的距离始终保持定长 l,并且作了尽可能的移动,所以这个端点所画出的圆,它上面的任意点和定点 O 的距离都等于定长 l;而且这平面板上到定点 O 的距离等于定长 l 的所有的点都在这个圆上.所以,这个圆是平面上到定点 O 距离等于定长 l 的所有的点组成的集合(点的集合,简称点集).

由此可知,动点按照一定条件,作尽可能的移动,所留下的痕迹,实质上是适合于一定条件的点集.

在几何学中,把具有某种性质的点的集合,叫做具有某种性质的点的轨迹.

具有某种性质的点,有时也叫做适合于某条件的点. 因此,关于点的轨迹也可以这样来定义:

适合于某条件的点集又叫做适合于某条件的点的轨迹.

像上面所说的圆,就是平面上,到定点的距离等于定长的点的轨迹.

通常给出一个集合,就是列举出这个集合的所有元素,或者指出它的元素的特征性质. 也就是说,凡是具有这些性质的对象,就是这个集合的元素;凡是不具有这些性质的对象,就不是这个集合的元素. 而适合于某条件的点的轨迹就是适合于某条件的点集. 所以,对一个适合于一定条件的点的轨迹(图形)来说,适合于一定条件的所有的点都在这个轨迹上;不适合于一定条件的所有的点都不在这个轨迹上.

研究点的轨迹,就是已经知道轨迹上的点的特征性质(即所谓轨迹条件),而要找出具有这些性质的所有的点组成什么样的图形. 这类问题,称为轨迹问题. 也有时题目中指明或者已经找出点的轨迹是某图形,而需要对这个轨迹给予逻辑证明. 下面,我们先来研究关于轨迹的证明问题.

1.2　轨迹命题的证明

上面已经讲过,按照一定的条件,一般地可以得到一个适合于这个条件的轨迹. 但是,对于这个轨迹(图形),虽然知道它的形成规律,却不知道它的形状. 也就是说,对这个图形,只知其性,却不知其形. 在几何学中,研究的重要课题之一,就是研究适合于某条件的点的轨迹是什么图形. 这类问题就是上面所说的轨迹问题.

解轨迹问题时,通常我们总是先找出适合某条件的图形,然后证明这个图形上所有的点适合某条件.

那么,怎样来证明"已知其形而不知其性"的图形,就是那个"只知其性而不知其形"的图形呢? 我们知道,要证明前一个图形就是后一个图形,实际上就是要证明两个点集相等. 假如以 L 表示适合于某条件的点集(图形),以 F 表示已知它的形状的图形(点集). 要证明前者就是后者,就是要证明

$$L = F$$

根据关于集合相等的原理,就是要证明下列两点:

(1)适合于某条件的任意点 A(即 $\forall A \in L$)$\Rightarrow$点 $A \in$ 图形 F;

(2)任意点 $A' \in$ 图形 F(即 $\forall A' \in F$)$\Rightarrow$点 A'适合于某条件(即 $A' \in L$).

这里,(1)的成立,表明所有适合于某条件的点都在图形 F 上. 也就是说,适合于某条件的点一个也没有漏掉. 这叫做轨迹的完备性. 而(2)的成立,表明图

形 F 上所有的点都适合某条件. 这叫做轨迹的纯粹性. 这两点是证明一个轨迹命题不可或缺的两个方面. 如果缺少了第一点,就可能会漏掉某些适合于条件的点,因而得到"残缺的轨迹";如果缺少了第二点,就难免要混入一些不适合于条件的点,以致得到"有瑕的轨迹".

上面所说的(1),(2)都是命题,因此,可以用和它们等价的逆否命题来代替,就是:

$$(L-F)=\begin{cases}(1)'\text{任意点 } B\in\text{图形 } F\Rightarrow\text{点 } B\text{ 不适合于某条件}\\(2)'\text{任意点 } B'\text{不适合于某条件}\Rightarrow\text{点 } B'\in\text{图形 } F\end{cases}$$

由此可知,对一个轨迹命题的证明,可以有下面四种方式:

第一种是证明(1)和(2)成立;第二种是证明(1)和(2)′成立;第三种是证明(1)′和(2)成立;第四种是证明(1)′和(2)′成立.

至于采用哪一种方式来证明较为方便,就要根据具体问题而定. 一般来说,第四种方式对于初学者来说往往不易掌握. 所以,如果采用第一种方式来证明,不觉得十分困难,就应当先选用这种方式. 下面我们举例说明,怎样来证明轨迹命题.

【例 1】　求证:对定线段 AB 所张的角等于定角 α 的点 P 的轨迹,是以线段 AB 为弦,所含的圆周角等于 α 的两个弧:$\overset{\frown}{AmB}$和$\overset{\frown}{Am'B}$(A,B 两点除外,如图 1.2).

证明　(1)纯粹性:

在$\overset{\frown}{AmB}$(或$\overset{\frown}{Am'B}$)上取任意点 P'(不能取在特殊点 A,B 处),连 $P'A$,$P'B$. 因为$\overset{\frown}{AmB}$(或$\overset{\frown}{Am'B}$)所含的圆周角等于 α,所以

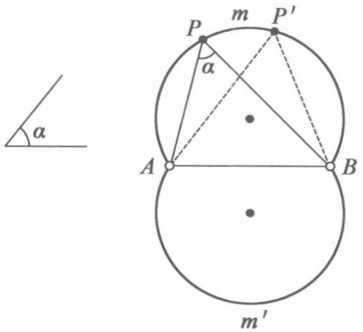


图 1.2

$$\angle AP'B=\alpha$$

这就是说,点 P' 对定线段 AB 所张的角等于定角 α.

(2)完备性:

这里,点 P 对 AB 所张的角等于定角 α.

设点 P 和 P' 在 AB 的同旁.

因为 $\angle AP'B=\alpha$,所以 $\angle APB=\angle AP'B$.

所以 A,P,P',B 四点共圆.

这就是说,点 P 在 $\overparen{AmB}$ 上.

如果点 P 和 P' 在 AB 的两旁,那么,点 P 在 $\overparen{Am'B}$ 上.

结论:由(1),(2)可以得到,对定线段 AB 所张的角等于定角 α 的点的轨迹,是以 AB 为弦,所含的圆周角等于 α 的两个弧:$\overparen{AmB}$ 和 $\overparen{Am'B}$.

【例 2】 直角三角形的斜边固定,求证:这直角三角形的重心的轨迹,是以斜边的中点为圆心,半径的长等于斜边长的六分之一的圆(圆和斜边的交点除外).

已知:AB 是定线段,$\triangle ABC$ 是以线段 AB 为斜边

的直角三角形，点 P 是直角三角形 $\triangle ABC$ 的重心.（如图 1.3）

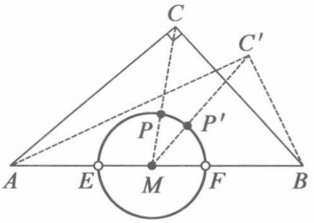


图 1.3

求证：点 P 的轨迹是以斜边 AB 的中点 M 为圆心，半径的长等于$\frac{1}{6}AB$ 的圆（圆 M 和 AB 的交点 E,F 除外）.

证明　(1)完备性：

这里，点 P 是以 AB 为斜边的直角三角形 $\triangle ABC$ 的重心. 连 OP.

设 M 是 AB 的中点. 那么 CP 一定经过点 M，并且

$$PM=\frac{1}{3}CM$$

而 CM 是直角三角形 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的中线. 所以

$$CM=\frac{1}{2}AB$$

从而

$$PM=\frac{1}{6}AB$$

所以，点 P 在以 M 为圆心，半径的长等于$\frac{1}{6}AB$ 的圆上.

(2)纯粹性:

设点 P' 是以 M 为圆心,半径的长等于 $\frac{1}{6}AB$ 的圆上的任意点. 连 MP',并且延长 MP' 到点 C',使得

$$P'C'=2MP'$$

连 AC',BC'.

因为点 M 是 AB 的中点,所以 MC' 是 $\triangle ABC'$ 的中线. 而

$$C'M=3P'M$$

所以,P' 是 $\triangle ABC'$ 的重心.

又因为

$$P'M=\frac{1}{6}AB$$

所以

$$C'M=\frac{1}{2}AB$$

由此可知,$\triangle ABC'$ 是直角三角形.

这就是说,点 P' 是以 AB 为斜边的直角三角形 $\triangle ABC'$ 的重心.

结论:由(1),(2)可以得到,点 P 的轨迹是以点 M 为圆心,半径等于 $\frac{1}{6}AB$ 的圆(圆 M 和 AB 的交点 E,F 除外).

【例 3】 平行四边形 $ABCD$ 的底边 AB 固定,AB 的邻边 BC 等于定长线段 l,这平行四边形的对角线的交点 P 的轨迹,是以 AB 的中点 M 为圆心,以 $\frac{1}{2}l$ 为半径的圆(圆 M 和 AB 的交点 E,F 除外,如图 1.4).

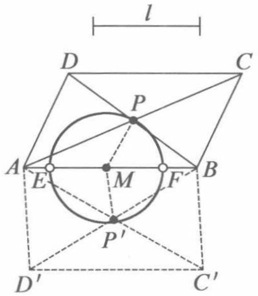


图 1.4

证明　(1)完备性:

这里,点 P 是以 AB 为底边,AB 的邻边 BC 等于定长线段 l 的平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点,M 是 AB 的中点. 连 PM. 那么

$$PM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}l$$

所以,点 P 在以 M 为圆心,以 $\frac{1}{2}l$ 为半径的圆上.

(2)纯粹性:

设点 P' 是以 M 为圆心,以 $\frac{1}{2}l$ 为半径的圆上的任意点,连 $P'A$,$P'B$,并且延长 AP' 到点 C',使 $P'C'=AP'$,延长 BP' 到点 D',使 $P'D'=BP'$. 连 BC',$C'D'$,$D'A$.

因为

$$AP'=P'C',BP'=P'D'$$

所以四边形 $ABC'D'$ 是平行四边形.

又因为 P' 是 AC' 的中点,M 是 AB 的中点,所以

$$P'M=\frac{1}{2}BC'$$

而 $P'M=\frac{1}{2}l$,所以 $BC'=l$.

综上所述可知，点 P' 是以 AB 为底边，AB 的邻边 BC 等于定长线段 l 的平行四边形的对角线的交点.

结论：由(1)，(2)可以得到，点 P 的轨迹是以 M 为圆心，以 $\frac{1}{2}l$ 为半径的圆(圆 M 和 AB 的交点 E，F 除外).

1.3　基本轨迹定理

由1.2节所讲的可以知道，一个轨迹定理实际上就是把一个原定理和它的逆定理(或否定理)合并起来组成的定理. 在几何学中，有些揭示图形上的点的性质的定理和它的逆定理(或否定理)，往往可以合并而组成一个轨迹定理. 例如，把定理“在线段的垂直平分线上的任意点，和这线段的两端的距离相等”与它的逆定理“和一条线段的两端距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上”合并起来就得出轨迹定理“和一条线段的两端距离相等的点的轨迹，是这条线段的垂直平分线”.

下面我们列举一些平面几何学中的基本轨迹定理. 这些定理在今后解其他轨迹题中，经常要用到.

(1)和已知点的距离等于定长线段的点的轨迹，是以已知点为圆心，以定长线段为半径的圆.

(2)到两个已知点距离相等的点的轨迹，是联结这两点的线段的垂直平分线.

(3)和两条相交直线距离相等的点的轨迹，是平分这两条已知直线所成角的两条互相垂直的直线.

(4)和两条平行线距离相等的点的轨迹，是和这两条直线平行并且距离相等的一条直线.

已知：AB，CD 是两条平行的直线，$EF /\!/ AB /\!/ CD$，EF 和 AB 之间的距离与 EF 和 CD 之间的距离相等.(如图1.5)

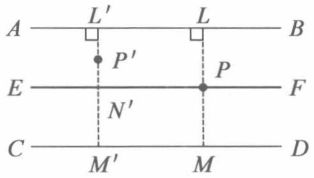


图1.5

求证：和两条平行线 AB，CD 的距离相等的点的轨迹是直线 EF.

证明　(1)纯粹性：

设点 P 是 EF 上的任意点. 经过点 P 作直线垂直于 AB. 设这直线交 AB，CD 分别于点 L，M.

因为 $AB /\!/ CD$，而 $PL \perp AB$，所以 $PM \perp CD$.

因为 EF 和 AB 之间的距离与 EF 和 CD 之间的距离相等，所以

$$PL = PM$$

这就是说，EF 上的任意点和两平行线 AB，CD 的距离相等.

(2)完备性：

设点 P' 是不在 EF 上的任意点. 经过点 P' 作直线垂直于 AB. 设这直线交 AB，CD，EF 分别于点 L'，M'，N'.

因为 $AB /\!/ CD /\!/ EF$，而 $P'L' \perp AB$，所以

$$P'M' \perp CD, P'N' \perp EF$$

因为点 P' 不在 EF 上，所以点 P' 和点 N' 不相重合.

而 $N'L'=N'M'$，所以 $P'L'\neq P'M'$.

这就是说，不在 EF 上的任意点和两平行线 AB，CD 的距离不相等.

结论：由(1)，(2)可以得到，和两条平行线 AB，CD 距离相等的点的轨迹是直线 EF.

(5)和一条直线的距离等于定长的点的轨迹，是和这条直线平行并且距离等于定长的两条直线.

已知：AB 是定直线，$CD\parallel AB$，$EF\parallel AB$，CD 和 AB 与 EF 和 AB 之间的距离都等于定长线段 d.（如图1.6）

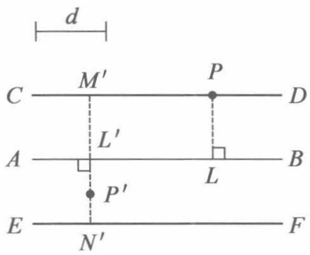


图 1.6

求证：和直线 AB 的距离等于定长线段 d 的点的轨迹，是两条平行直线 CD 和 EF.

证明　(1)纯粹性：

设点 P 是 CD(或 EF)上的任意点. 经过点 P 作 $PL\perp AB$，设垂足是 L.

因为 CD(或 EF)平行于 AB，并且 CD(或 EF)和 AB 之间的距离等于定长线段 d，所以

$$PL=d$$

这就是说，CD(或 EF)上的任意点和 AB 之间的距离等于定长线段 d.

(2)完备性：

设点 P'是不在 CD(或 EF)上的任意点. 经过点 P'作直线垂直于 AB. 设这直线交 AB，CD，EF 分别于点 L'，M'，N'.

因为 $CD /\!/ AB$，$EF /\!/ AB$，而 $P'L' \perp AB$，所以

$$P'M' \perp CD, P'N' \perp EF$$

所以

$$M'L' = L'N' = d$$

因为点 P'不在 CD(或 EF)上，所以点 P'和点 M'(或点 N')不相重合.

而在线段 $M'N'$上和点 L'的距离等于定长线段 d 的点只有 M'和 N'两点. 所以

$$P'L' \neq d$$

这就是说，不在直线 CD(或 EF)上的任意点和直线 AB 的距离不等于定长线段 d.

结论：由(1)，(2)可以得到，和直线 AB 距离等于 d 的点的轨迹，是和直线 AB 平行并且距离等于定长线段 d 的两条直线 CD 和 EF.

(6)对一条线段所张的角等于定角的点的轨迹，是以这条线段为弦，所含的圆周角等于这定角的两个弧.

(7)对一条线段所张的角等于直角的点的轨迹，是以这条线段为直径的一个圆.

很明显，定理(7)是定理(6)的特殊情形. 在这个情形下，两个弧都是以定线段为直径的半圆，这两个半圆构成一个圆.