金牌奥林匹克丛书

数学素质强化训练

shuxue suzhi qianghua xunlian

王树禾　著

名师精作

妙笔评点

培养素质

获益匪浅

安徽科学技术出版社

金牌奥林匹克丛书

数学素质强化训练

王树禾　著

安徽科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学素质强化训练/王树禾著. —合肥:安徽科学技术出版社,2000
(金牌奥林匹克丛书)
ISBN 7-5337-2090-3

Ⅰ. 数… Ⅱ. 王… Ⅲ. 数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77034 号

安徽科学技术出版社出版
(合肥市跃进路1号新闻出版大厦)
邮政编码:230063
电话号码:(0551)2825419
新华书店经销　宿州印刷总厂印刷
*
开本:850×1168　1/32　印张:13.5　字数:338千
2001年1月第1版　2001年1月第1次印刷
印数:4 000
ISBN 7-5337-2090-3/G·368　定价:23.00元

内容简介

本书以数学素质教育为宗旨，选择初等数学与奥林匹克数学的八个骨干部分：初等数学概述、反证法、数学归纳法、初等几何、序列递归与迭代、组合、初等数论和图论，论述这些专题的基本理论、方法和技巧，按教师导学、基础阶梯，提高阶梯三大部分展开，从国内外奥林匹克数学竞赛试题中筛选典型题目进行解答与评点．作者长期担任数学模型竞赛主教练和数学奥赛讲座等工作，具有丰富的数学教育经验，精心著写了此书，想必对有关人士会有借鉴和启迪，同时对提高中学生的数学素质将起到一定的作用．

本书可供参加奥林匹克数学竞赛的同学以及对数学有浓厚兴趣的高中生阅读，亦可作为辅导奥赛老师和准备高考同学的参考书．

目　　录

教师导学

基础阶梯

提高阶梯

教师导学

数学素质与数学竞赛(代序)

对客观世界进行研究的主要目的在于发现它的合理次序和和谐,而这些是宇宙用数学语言透露给我们的.

——开普勒

更快,更高,更强.

——奥林匹克宗旨

从小学一年级到大学一年级,26个学期,数学始终是我们的主课.数学教育是人才培养最重要的科目,这已经成为全人类的共识.事实上,正是数学教育,培养了周密严格地思考问题的习惯和能力,把人的智慧培养到一个不俗的水平,并为组织学术工作和建立知识系统提供表达方式和论证手段,为人们从事各种社会活动和科学技术工作练就过硬的归纳、猜想、发现的本领和求真、求准、求严的科学品质.

当今社会日趋数学化,各行各业乃至日常生活,都在运用着大量的数学.从学龄前稚童到鹤发老者,从争利商贩到国家元首,无不需要数学,无不使用数学.随着人类生活质量的提高、信息的畅通和知识经济的兴起,数学正在迅速介入一切领域,无论是家庭生活还是现代化战争,无论是社会科学还是自然科学,数学都定性或定量地在起作用,高技术实则为一种数学——计算机技术,数学以其极端抽象和准确的方式控制着对具体事物和技术的管理和优化.处于如此数理科学化的时代,如果没有一定的数学素质,不用说深造、发展和贡献,就是应付日常生活亦会非常之困难.

另一方面,数学素质又是一种高尚的文化修养,它能纠正世俗功

利思想的偏差，使人的思想境界臻于严肃和完善，从数学的学习与研究当中获得一种心灵满足或曰享受，言行严谨，处世真诚，即使将来不以数学或自然科学为业，较高的数学素质，对于提高生活质量与工作质量，也是非常必要的．数学素质是人后天获得的非与生俱来的智慧和科学灵魂，正如著名数学家华罗庚教授的名言："聪明在于学习，天才在于积累．"

对于那些将以科学技术为职业的同学而言，数学则是他们的首要基础课．一门科学消耗的数学的质与量，是衡量该学科发展水平的重要砝码，数学物理、分子拓扑学、计算化学、生物数学、数理经济学、综合国力的数学模型等，仅从这些学科的名称上，就可以感觉到各门自然科学和社会科学与数学的血缘关系．数学素质高的工作者，可以在他们的工作当中显露出巨大的优势；而数学素质低下者，尽管他具备自己本专业的实验技能，却往往很久搞不出像样的成果，其中道理，不言而自明．

为提高数学素质，必须做数学题目，而且要做一道会一道，做一道会一批，做高质量的题目，高质量地去做题目，举一反三．从中领会数学思想，掌握数学方法，提高数学能力．所谓愉快教育，作者多年科研和教授数学的体会，就是要打好扎实的基础，知识结构要完备，基本方法(或称绝招)要熟练，在难题面前敢于进行创造性思维和机敏地使用解题技巧，从而获得问题解出时的成就感，即获得一种非平凡的愉快．如果讲课少而浅，试题少而浅，这种教育并非愉快教育，实则为落后教育．争取参加数学竞赛，赛前研读辅导竞赛的参考书，是提高数学素质的好办法．中学时代数学竞赛的优胜者当中，不乏成长为著名科学家的榜样，例如对航空航天科学技术作出了重大贡献的冯·卡门(钱学森、钱伟长、郭永怀等著名科学家的老师)和对泛函分析作出了重要贡献的马·黎斯，就是当年匈牙利数学竞赛中的优胜者，我国的著名数学家唐守文也是当年中国数学竞赛的第一名，如今已是计算机数学方面的权威．

我们这本书是在上述思想指导下写成的．对于数论、图论、组合论、平面几何、立体几何、序列、递归、迭代、数学归纳法和反证法等数学竞赛的支柱科目，就其必要的基础知识、基本方法和常用技巧，欲进行深入浅出的讲评，知识性、方法性、趣味性和应用性四方兼顾，并设有重要例题和赛题题谱两个项目，有意筛选具有重要应用背景和现代数学背景的题目，对其解法的思路、技术、推广和与现代数学的联系诸方面逐题进行评点，这些题目来自各国数学竞赛和 IMO(International Mathematical Olympic)用过的试题，但并非惟难是举．本书可供准备参加奥赛的同学阅读，也可作为辅导奥赛老师的参考书，同时为了使对数学有浓厚兴趣的同学可以无师自通，本书按讲座形式展开，大家可以选读与自己相关的内容，也可由浅入深、循序渐进．

全书共设八讲，分别表述如下：

第一讲为初等数学概述，是以后各讲的基础，知识面和难度不超出现行高中数学教学大纲，本着“简洁、有趣、重要”的选材思想来组织内容，不希望对中学教材或众多高考复习资料低水平重复，只希望求精、求巧，而不求其全，一些已为同学熟练掌握的内容，例如二次方程的求根公式，二次函数的极值，三角函数的众多公式等，采取了不讲就用的办法，以节省篇幅．这一章有许多例题，希望读者细读，这样有利于高考成绩的提高和进行后面各讲的学习；事实上，这些题目是高中数学中极典型的方法示范性题目，具有举一反三的功能，而且精彩有趣，这批题目对增进数学素质，激发学习兴趣很有帮助．

第一讲适于准备高考和参加“全国高中数学联赛”(1998 年前称之为“全国高中数学联赛一试”)的同学阅读．

从第二讲起，例题和题谱比第一讲明显变难，但我们在解题之前，较系统地讲了有关知识和一些教学例题，深入浅出地做了不少铺垫，题谱与重要例题又加了评点，难题的难度已经化解．

第二讲至第八讲的内容适于参加“全国高中数学联赛加试”

(1998 年前称之为“全国高中数学联赛二试”)和准备参加 IMO 选拔与冬令营集训的同学们阅读 .

第二讲为初等几何,虽然平面几何不是高中数学内容,考虑到它的数学教育价值和在数学竞赛中的地位,这一讲中多讲深讲了一些平面几何的问题 . 对于立体几何,虽然在第一讲中已讲述过,但为了适应数学竞赛的要求,本讲向难和巧的方向提高地讲了立体几何的解题技术,其中不乏实用背景很强的应用型题目 .

第三讲是序列、递归和迭代问题,和其他各讲一样,这里也是数学竞赛经常出题的地方,而且是初等数学与现代数学的过渡地带或曰初等与高等数学的结合部 . 例如其中涉及到差分方程和混沌内容,但由于我们采用了极直观的讲法,读起来似比初等几何还要简易一些 . 讲了菲波那奇的兔子序列,砍头函数与三角帐篷函数的迷人迭代过程造成的周期点稠密与对初值的敏感依赖性,兰州拉面的数学模型,等等 .

第四讲是组合问题,每位学习了排列组合内容的同学都有同感:排列组合“难得可爱”. 事实上它的难度似因中学课本未能对排列与组合的方法进行系统讨论造成,使得每位解答组合问题的中学生不得不挖空心思动用一切“小聪明”来对付那些具体的组合问题,这样办不但累人而且容易发生纰漏 . 本讲首先用加乘原理、容斥原理、抽屉原理、母函数等较为普适的组合数学理论装备读者的头脑,以期在组合难题面前有工具可用,不至于徒手克服困难 .

第五讲是初等数论问题,它是数学竞赛试题多发区,作为必要的知识准备,这一讲首先讲解竞赛中经常引用的诸如整除、算术基本定理、不定方程与同余的基础知识,其中讲到了《孙子算经》中的“三人同行”歌谣、《张邱建算经》中的“百鸡问题”、孙子定理和“韩信点兵”等祖国数学史上的名题名著,以及辗转相除、剩余系、欧拉定理与费马小定理等数论中的重要内容,为对付竞赛中的数论题目预备了必要的概念与方法 .

第六讲是图论，图论是美丽的，它可以解决许多趣味性、应用性和理论性的问题，不事先进行较系统的图论学习，临场面对那些来源于图论的竞赛怪题，只凭一时聪明，怕是难以按时交卷的，有了图论知识的准备，解答那些图论题目，则会相当顺手．本讲讲了树的特征、图上一次性遍历边与顶、平面图(多面体)Euler 公式、Hall 婚配定理、拉姆赛数、四色定理、竞赛图与王点等重要而精彩的图论问题．作为重要例题，解答评点了七桥问题、鼠洞问题、Hamilton 周游世界游戏、马的遍历问题以及错放信笺、n 维立方体、五色定理等名题．

图论题目在国内国际数学竞赛当中出现的频率极大，有志参赛夺牌的同学必须足够重视它才是．

第七讲反证法本是每位同学反复使用过的方法，鉴于反证法这种间接证法对解决数学中较难题目乃是最为强劲的方法之一，以及它与现代数学的密切联系，例如它与第三次数学危机有本质联系，所以我们略讲了它的理论基础，即双否定定律和反证原理，之中还讨论了脍炙人口的罗素悖论，以期加深对反证法的理解和学习罗素这位著名科学家深邃睿智的科学思维方式．荷兰数学家布劳维为代表的构造主义学派或称直觉主义学派反对使用反证法，他们的理由是反证推理不直观，不是“拿出来看看”式的构造性证明；这种直觉主义当然不可取，事实上，数学的思维本质上是一种逻辑思维，如果要求它一切都得“造出来看”，无异于窒息数学，一个最说明问题的事实是：谁看见过 π 的真实值?

第八讲是数学归纳法，它和反证法、演绎法合称数学证明的三件法宝．数学归纳法和反证法一样，也已为同学们所熟悉，它的“套路”已经成了大家的习惯动作．由于本书的性质，我们讲了皮亚诺公理和归纳原理，以提高同学们对数学归纳法的认识水平．讲到好坏括号列和跷跷板归纳法等有趣又有用的问题，总结了归纳递推的常用技术，并为数学界不太看得起的经验归纳法正名，用数学归纳法讨论了河内塔问题和杨辉三角等数学史上的名题．

安徽科学技术出版社出版本书的选题，作者颇感兴趣，事实上这是服务于广大中学生朋友的善事．如果搞得好，应该能激发读者对数学的爱好，培养数学的素质，相应地，提高高考和参赛的成绩，怎奈作者智钝才疏，虽向着引而不发、通而不俗的方向做了努力，拿出的这部拙著，尚不知差错几何，恳请读者批评指正．

囿于篇幅，为读者精选的测试题未能付印，必要时可另册面世．

最后，愿与读者共同爱好数学，共同感谢数学，数学使我们愉快，数学使我们聪明，数学使我们成功！

王树禾

2000 年 9 月

基础阶梯

第一讲　初等数学概述

初等数学是现代数学大厦的基石,它最靠近实际,最讲究技巧,没有哪一个科学家不是在初等数学的哺育下成长起来的.

本讲的内容主要有:

1. 集合与函数
2. 初等函数
3. 不等式
4. 复数
5. 多项式与高次方程
6. 排列组合与二项式定理
7. 数列
8. 立体几何
9. 初等数学的若干解题技术

1.　集合与函数

集合是现代数学最基本的概念之一,是整个数学的理论基础. 数学的各个分支,都在用集合论的语言进行表述.

集合概念首先是由德国数学家康脱(G·Cantor)提出的. 德国大数学家希尔伯脱(D·Hilbert)说道:"集合论创立了数学上最广泛、最有力的一个部门,一个没有人能把我们赶出去的天堂."

集合是一个不可用更简单的概念来定义的原始概念. 泛言之,一个集合是指一些确定的、不同的事物的总体,之中的每一事物称为该集合的元素.

一般用大写字母表示一个集合,用小写字母表示元素,若 A 是给定的集

合,a 是 A 中一个元素,则记成 $a\in A$,读成 a 属于 A. b 不是 A 的元素时,记成 $b\notin A$. 常用的集合有:

N:全体自然数组成的集合;

Z:全体整数组成的集合;

R:全体实数组成的集合;

C:全体复数组成的集合;

Q:全体有理数组成的集合;

Ø:空集,它不含任何元素.

若集合 A 的每个元素都属于集合 B,则称 A 是 B 的子集,记成 $A\subseteq B$,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,写成 $A=B$. 规定 $\varnothing$ 是任何集合的子集,例如 $\varnothing\subseteq\varnothing$.

集合的表示方法有两种,一种是列举法,即把集合的一切元素全部写在一个花括号内,用逗号点开;一种是描述法,即在花括号内写上代表元素的一个字母,再画一竖线,竖线后的语句是对元素的描述.例如

$$\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing,\{\varnothing\}\neq\varnothing$$

$$\{1,2,3,\cdots\}=\mathbf{N}$$

应该注意的是:

(甲) 集合中元素是确定的,例如“不少人形成的集合”就不能被承认为集合.

(乙) 元素互异,例如不能写 $\{a,a,a,a\}$,应改成 $\{a\}$.

(丙) 元素无序,例如 $\{a,b,c,d\}=\{d,c,b,a\}$.

(丁) 一个集合可以是另一集合的元素,例如 $S=\{a,b,\{a,b\}\}$,集合 $\{a,b\}$ 是集合 S 的一个元素,即 $\{a,b\}\in S$.

(戊) 一个元素与由该元素组成的集合不是一件事,例如不可写 $e=\{e\}$,而应写 $e\in\{e\}$.

(己) 集合本身不能做本身的元素,即若 S 是一个集合,则不能有 $S\in S$.

集合间有下列运算:

(甲) 并,集合 A 与 B 的并集记成 $A\cup B$,定义为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

(乙) 交,集合 A 与 B 的交集记成 $A\cap B$,定义为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

（丙） 差，集合 A 与 B 的差记成 $A-B$，定义为

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 而 } x\notin B\}$$

（丁） 补，集合 A 的补记成 $\overline{A}$，定义为

$$\overline{A}=U-A$$

其中 U 是全集，即 A 是 U 的子集．

英国数学家文(Ohn Venn)提出集合的图示方法，称为“文氏图”，即用一个圆表示一个集合，用这种文氏图考虑集合的交、并、差、补等运算时，十分直观明了．一般教科书中均有，我们这里就不细讲了．

集合运算有以下定律：

（甲） 否定之否定律：$\overline{\overline{A}}=A$

（乙） 结合律：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

（丙） 交换律：$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$

（丁） 分配律：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

（戊） 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$

（己） 德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

以上各公式读者可从定义出发或用文氏图来验证．

2． 初等函数

1） 函数

x 与 y 是变量，x 在实数组成的集合 D 内变化，对于 D 内的每个 x 值，变量 y 依一定规律有惟一确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，x 称为自变量，y 称为因变量或应变量，记成 $y=f(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等．D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，y 的取值组成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域．

函数有两个要素，一是定义域，一是对应关系．至于值域，理论上可以由定义域与对应关系确定．

有的函数是用一个可以计算的所谓解析表达式来表示的，例如：

$$y=ax^2+bx+c,x\in(-\infty,+\infty)$$

有的函数则不可用解析式来表达，例如狄利克莱函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, 当 x 为无理数; \\ 1, 当 x 为有理数.\end{cases}$$

函数的定义域也未必是区间,例如在 $\mathbf{R}$ 范围内

$$y=\sqrt{\cos x-1}$$

的定义域为 $D=\{2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$,它的值域为 $\{0\}$.

称两个函数相同,是指它们的定义域与对应规律一致,例如 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 并不是同一个函数,事实上,$y=\lg x^2$ 的定义域是 $\{x \mid x\neq 0, x\in \mathbf{R}\}$ 而 $y=2\lg x$ 的定义域为 $\{x \mid x>0\}$. 但 $w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 是一样的函数.

函数最一般的性质有四个:

(甲) 周期性,例如函数 $y=\sin x$ 以 2π 为周期,所谓周期 T,是对一切 $x\in D$ 使 $f(x)=f(x+T)$ 的最小值 T,其中 D 是 $f(x)$ 的定义域.

(乙) 有界性,例如 $y=\cos x$, $|y|=|\cos x|\leqslant 1, x\in \mathbf{R}$. 一般地,若存在正数 M,使得对一切 $x\in D$, $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在定义域 D 上有界.

(丙) 奇偶性,例如 $y=x^3$ 是奇函数,而 $y=x^2$ 是偶函数;一般地,若函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D=(-l,l)$,又对任何 $x\in(-l,l)$, $f(x)=f(-x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数, $f(x)=-f(-x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数.

(丁) 单调性,设 $f(x)$ 的定义域为 $D=(a,b)$,且对任何 $x_1, x_2\in(a,b)$,当 $x_1<x_2$ 时, $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的单调不减函数, $f(x_1)<f(x_2)$ 时称为单调增函数;把不等号反过来,则分别称为单调不增函数和单调减函数.

奇函数图像关于原点中心对称,偶函数图像关于 y 轴成轴对称.

有的函数,例如 $y=x^2$ 在定义域上并不是单调函数,但在定义域的一部分 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上却是单调的.

有界性中的常数 M 不是惟一的.

2) 反函数

若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X,值域为 Y,且对 Y 中每个实数 y, X 中有惟一的实数 x 与之对应,且 x 与 y 满足 $f(x)=y$,则变量 x 可视为 y 的函数,这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记成 $x=f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y)$ 的定义域为 Y,值域为 X.

注意,这里 $f^{-1}(y)$ 不是 $\dfrac{1}{f(y)}$,而是 f 的反函数.