萬有文庫
第二集七百種
王雲五主編

數理精蘊

(七)

清聖祖敕編

商務印書館發行

數理精蘊

(七)

清聖祖敕編

萬有文庫

第二集七百種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

數理精蘊下編卷十九

面部九

各面形總論

面之爲形成於方圓。直線所成皆方之類。曲線所成皆圓之類。立法則方爲圓之本。度圓者必以方。而度方者必以矩。所謂方有盡而圓無盡是也。論理則圓又爲衆界形之本。蓋衆界形、或函圓、或函於圓。其邊皆當弧線之度。故求衆界形者必以圓界爲宗也。因有方圓衆界之各異。是以邊線等者面積不等。如衆界形之每一邊、與圓徑、俱設爲一〇〇〇〇。則方面積爲一〇〇〇〇〇〇〇〇。而圓面積爲七八五三九八一六。三等邊形之面積爲四三三〇一二七〇。五等邊形之面積爲一七二〇四七七四一。六等邊形之面積爲二五九八〇七六二〇。七等邊形之面積爲三六三三九一二四〇。八等邊形之面積爲四八二八四二七一二。九等邊形之面積爲六一八一八二四二〇。十等邊形之面積爲七六九四二〇八八三。此各形之面積皆以方積比例者也。或以圓面積設爲一〇〇〇〇〇〇〇〇。則圓徑得一一二八三小餘七九一六。如圓徑與衆界形之每一邊俱設爲一一二八三小餘七九一六。則圓面積爲一〇〇〇〇〇〇〇〇。而三等邊形之面積爲五五一三二八八九。方面積爲一二七三二三九五四。五等邊形之面積爲二一九〇五七九八六。六等邊形之面積爲三三〇七九七三三四。七等邊形之面積爲四六

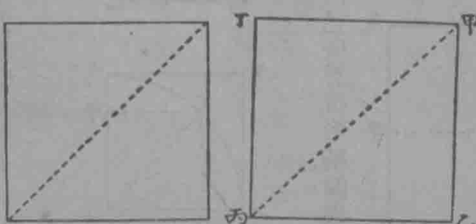
二六八四〇九八八。八等邊形之面積爲六一四七七四四三五。九等邊形之面積爲七八七〇九四三〇二。十等邊形之面積爲九七九六五七〇九九。此各形之面積皆以圜積比例者也。蓋因各形之邊線相等面積不同。故皆定爲面與面之比例也。面積等者邊線不等。如衆界形之面積、與圜面積俱設爲一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇。則方邊爲一〇〇〇〇〇〇〇〇。而圜徑爲一一二八三七九一六。三等邊形之每邊爲一五一九六七一三七。五等邊形之每邊爲七六二三八七〇五。六等邊形之每邊爲六二〇四〇三二四。七等邊形之每邊爲五二四五八一二六。八等邊形之每邊爲四五五〇八九八五。九等邊形之每邊爲四〇二一九九六三。十等邊形之每邊爲三六〇五一〇五八。此各形之邊線皆以方邊比例者也。或以圜徑設爲一〇〇〇〇〇〇〇〇。則圜面積爲七八五三九八一六三三九七四四八三。如圜面積與衆界形之面積、俱設爲七八五三九八一六三三九七四四八三。則圜徑爲一〇〇〇〇〇〇〇〇。而三等邊形之每邊爲一三四六七七三六九。四等邊形即正方。之每邊爲八八六二二六九二。五等邊形之每邊爲六七五六四七九三。六等邊形之每邊爲五四九八一八〇五。七等邊形之每邊爲四六四八九八〇三。八等邊形之每邊爲四〇三三一二八八。九等邊形之每邊爲三五六四四〇一四。十等邊形之每邊爲三一九四九四一八。此各形之邊線皆以圜徑比例者也。蓋因各形之面積相等。邊線不同。故皆定爲線與線之比例也。然自衆界形之中心分之。則又各成三角形。皆以勾股爲準則。故勾股三角形雖爲面而不囿於面之中。卻別立一章焉。要之衆界形邊求積者歸之勾股。積求邊者歸之正方。引而伸之。觸類而長之。凡爲面形者不能違是也。

直線形

設如正方形。每邊五十尺。問對角斜線幾何。

法以方邊五十尺自乘得二千五百尺。倍之得五千尺。開方得七十尺七寸一分零六豪有餘。卽所求之對角斜線也。如圖甲乙丙丁正方形。其甲乙、乙丙、丙丁、丁甲每邊皆五十尺。甲丙爲所求對角斜線。甲乙爲股。則乙丙爲勾。乙丙爲股。則甲乙爲勾。因甲乙與乙丙相等。皆可互爲勾股。故以一邊自乘倍之開方得弦。卽如各自乘相併開方而得弦也。又用定率比例法。以定率之方邊一〇〇〇〇〇〇〇爲一率。對角斜線一四一四二一三五爲二率。今所設之方邊五十尺爲三率。求得四率七十尺七寸一分零六豪有餘。卽所求之對角斜線也。蓋定率設方邊爲一千萬、其對角斜線爲一千四百一十四萬二千一百三十五。故定率之方邊一千萬與定率之對角斜線一千四百一十四萬二千一百三十五之比。卽如今所設之方邊五十尺、與所求之對角斜線七十尺七寸一分零六豪有餘之比也。

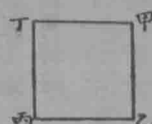
若有對角斜線求方邊。卽以對角斜線自乘。折半開方。所得爲正方形之每一邊也。蓋甲丙弦自乘之方與甲乙股乙丙勾兩正方相併之積等。今以甲丙弦自乘折半。則必與甲乙或

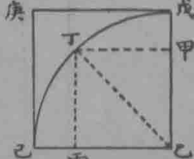


乙丙自乘之一正方相等。故開方而得每一邊也。或用定率比例法。以定率之對角斜線一四一四二一三五爲一率。方邊一〇〇〇〇〇〇爲二率。今所設之對角斜線爲三率。求得四率。卽方邊也。

設如正方形。每邊二尺。今將其積倍之。問得方邊幾何。

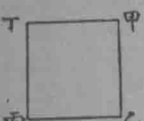
法以每邊二尺自乘得四尺。倍之得八尺。開方得二尺八寸二分八釐四豪有餘。卽所求之方邊數也。如圖甲乙丙丁正方形每邊二尺。其面積四尺。倍之得八尺。卽如戊乙己庚正方形。其每邊卽甲乙丙丁方形之對角斜線。試於戊乙己庚正方形內作甲乙丙丁正方形。以乙爲心。戊爲界。作戊己弧。與丁角相切。則丁乙與己乙皆爲半徑。其度相等。蓋丁乙對角斜線自乘之方、爲甲乙邊自乘之方之二倍。故戊乙己庚正方形、卽爲甲乙丙丁正方形之二倍。而戊甲丁丙己庚磬折形積、卽與甲乙丙丁正方形積相等也。

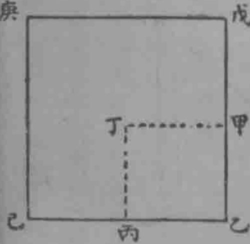




設如正方形。每邊二尺。今將其積四倍之。問得方邊幾何。

法以每邊二尺倍之得四尺。卽所求之方邊數也。如圖甲乙丙丁正方形每邊二尺。其面積四尺。四倍之得十六尺。卽如戊乙己庚正方形之面積。其每邊得甲乙丙丁正方形每邊之二倍。是故不用四倍其積開方。止以每邊二尺

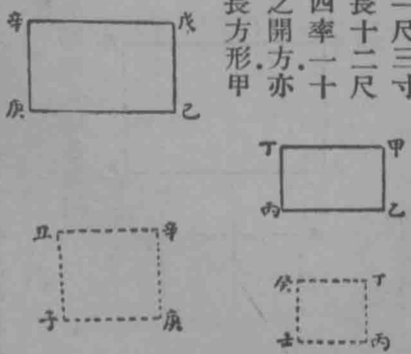




倍之而即得也此法蓋因兩方面之比例、比之兩界之比例。爲連比例隔一位相加之比例。見幾何原本七卷第五節・故戊乙己庚正方面積一十六尺與甲乙丙丁正方面積之四尺相比爲四分之一、而戊乙己庚正方邊之四尺與甲乙丙丁正方邊之二尺之比爲二分之一。夫十六與八、八與四、四與二皆爲二分之一之連比例。而十六與四之比其間隔八之一位。故爲連比例隔一位相加之比例也。

設如長方形長十二尺。闊八尺。今將其積倍之。仍與原形爲同式形。問得長闊各幾何。

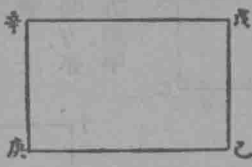
法以闊八尺自乘得六十四尺。倍之得一百二十八尺。開方得一十一尺三寸一分三釐七豪有餘。即所求之闊。既得闊。乃以原闊八尺爲一率。原長十二尺爲二率。今所得闊一十一尺三寸一分三釐七豪有餘爲三率。求得四率一十六尺九寸七分零五豪有餘。即所求之長也。或以長十二尺自乘倍之開方亦得一十六尺九寸七分零五豪有餘。爲所求之長也。如圖甲乙丙丁長方形。甲乙闊八尺。甲丁長十二尺。將其積倍之。即如戊己庚辛長方形。此兩長方面積之比例。即同於其相當二界各作一正方面積之比例。見幾何原本七卷第七節・故依甲乙丙丁長方形之丁丙闊界作丁丙壬癸正方形。將其積倍之。即如戊己庚辛長方形之辛庚闊界所作之辛庚子丑正方形。故開方得辛庚爲所求之闊也。既得辛庚之闊。則以甲乙與甲丁之比、即同於戊己與

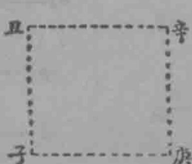


戊辛之比得戊辛爲所求之長也若以原長自乘倍之開方即如以二長界各作一正方形互相爲比例也。

設如長方形長十二尺闊八尺今將其積四倍之仍與原形爲同式形問得長闊各幾何。

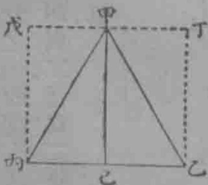
法以闊八尺倍之得十六尺即所求之闊又以原長十二尺倍之得二十四尺即所求之長也如圖(圖見前)甲乙丙丁長方形甲乙闊八尺甲丁長十二尺將其積四倍之即如戊己庚辛長方形其每邊得甲乙丙丁長方形每邊之二倍是故不用四倍其積開方止以各邊之數倍之而即得也此法蓋因兩長方面之比例既同於其相當二界各作一正方面之比例而兩正方面之比例比之二界之比例爲連比例隔一位相加之比例故兩長方面之比例較之兩界之比例亦爲連比例隔一位相加之比例也。





設如三角形面積三千尺底闊八十尺問中長幾何。

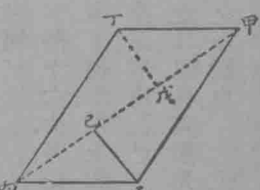
法以積三千尺倍之得六千尺用底闊八十尺除之得七十五尺即所求之長也如圖甲乙丙三角形其積倍之成丁乙丙戊長方形乙丙爲底闊故以底闊除長方積得甲己爲中長也。

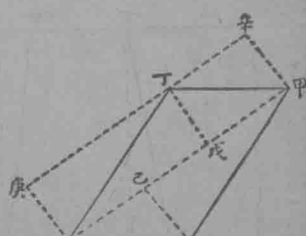


設如兩兩等邊無直角斜方形 一曰象目形 小邊皆二十五丈大邊皆三十九丈對兩小角斜線五十六

丈。問面積幾何。

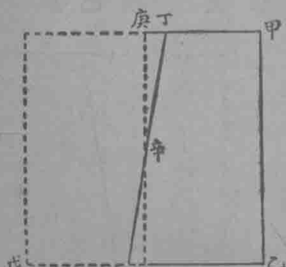
法以對角斜線分斜方形爲兩三角形算之以對角斜線五十六丈爲底大邊三十九丈小邊二十五丈爲兩腰用三角形求中垂線法求得中垂線十五丈乃以對角斜線五十六丈與中垂線十五丈相乘得八百四十丈即斜方形之面積也。如圖甲乙丙丁斜方形甲丁、乙丙二小邊皆二十五丈甲乙、丁丙二大邊皆三十九丈。甲丙對兩小角斜線五十六丈今以甲丙斜線分甲乙丙丁斜方形爲甲乙丙、甲丁丙兩三角形俱以甲丙爲底甲丁與丁丙爲兩腰求得丁戊或乙己皆爲中垂線故以甲丙斜線與丁戊垂線相乘所得甲丙庚辛長方形比甲丁丙三角形積大一倍而甲乙丙丁斜方形亦函兩三角形積故所得之甲丙庚辛長方形、與甲乙丙丁斜方形之面積相等也。





設如不等邊兩直角斜方形直角之邊長五十丈上闊二十丈下闊二十八丈問面積幾何。

法以上闊二十丈與下闊二十八丈相加得四十八丈折半得二十四丈。



與長五十丈相乘得一千二百丈。即斜方形之面積也。如圖甲乙丙丁斜方形。以上闊甲丁與下闊乙丙相加得乙戊。折半爲乙己與甲乙長相乘遂成甲乙己庚長方形。其斜方外所多之丁庚辛勾股形、與斜方內所少之辛己丙勾股形之積等。故所得之甲乙己庚長方形、即甲乙丙丁斜方形之面積也。

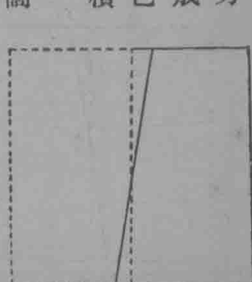
又法上闊下闊相併與長相乘。得數折半。即斜方形之面積也。蓋前法上闊下闊相加折半而後與長相乘。此法則上闊下闊相加即與長相乘而後折半。其理一也。

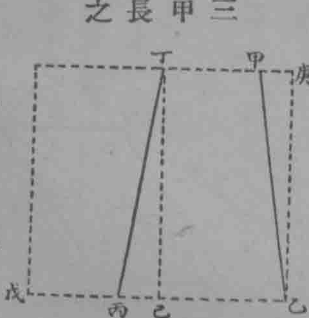
設如梯形長三十丈。上闊十二丈。下闊二十丈。問面積幾何。

法以上闊十二丈與下闊二十丈相加。得三十二丈。折半得十六丈。與長三十丈相乘得四百八十丈。即梯形之面積也。如圖甲乙丙丁梯形。以上闊甲丁與下闊乙丙相加得乙戊。折半爲乙己與丁己長相乘遂成庚乙己丁長方形。其梯形外所多之甲庚乙勾股形。與梯形內所少之丁己丙勾股形之面積等。故所得之庚乙己丁長方形。即甲乙丙丁梯形之面積也。

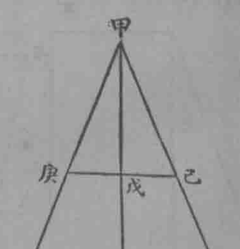
又法以上闊下闊相併。與長相乘。得數折半。即梯形之面積也。

設如三角形。自尖至底中長二百尺。底闊一百五十尺。今欲自尖截長一百二十尺。問截闊幾何。



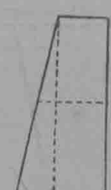


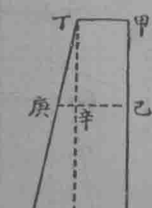
法以中長二百尺爲一率。底闊一百五十尺爲二率。截長一百二十尺爲三率。求得四率九十尺。卽所截之闊也。如圖甲乙丙三角形。甲丁中長二百尺。乙丙底闊一百五十尺。甲戊爲所截長一百二十尺。而甲丁與乙丙之比。卽同於甲戊與己庚之比也。如以截闊求截長。則以底闊爲一率。中長爲二率。截闊爲三率。所得四率。卽所截之長也。



設如不等邊兩直角斜方形。長九十尺。上闊二十尺。下闊三十八尺。今欲截中闊二十七尺。問上下各截長幾何。

法以上闊二十尺與下闊三十八尺相減。餘一十八尺爲一率。長九十尺爲三率。以上闊二十尺與所截中闊二十七尺相減。餘七尺爲三率。求得四率三十五尺。卽上所截之長。以上所截之長三十五尺與總長九十尺相減。餘五十五尺。卽下所截之長也。如欲先得下所截之長。則仍以上闊二十尺與下闊三十八尺相減。餘一十八尺爲一率。長九十尺爲二率。乃以所截中闊二十七尺與下闊三十八尺相減。餘一十一尺爲三率。求得四率五十五尺。卽下所截之長也。如圖甲乙丙丁斜方形。甲乙爲長九十尺。與丁戊等。乙丙爲下闊三十八尺。甲丁爲上闊二十尺。與乙戊等。己庚爲所截中闊二十七尺。上闊與下闊相減。餘戊丙十八尺。上闊與所截中闊相減。餘辛庚七尺。而戊丙與丁戊之比。卽同於辛庚與丁辛之比也。又甲乙丙





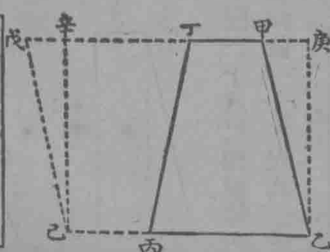
丁斜方形．上闊與下闊相減餘戊丙十八尺．所截中闊與下闊相減餘壬丙十一尺．而戊丙與丁戊之比．又同於壬丙與庚壬之比也．如有所截上長或所截下長求截闊．則以總長爲一率．上下闊相減所餘爲二率．截長爲三率．求得四率．有上截長則與上闊相加．有下截長則與下闊相減．所得卽所截之闊也．

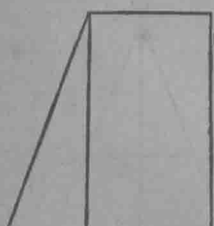
設如梯形面積一千五百尺．下闊四十尺．中長五十尺．問上闊幾何．

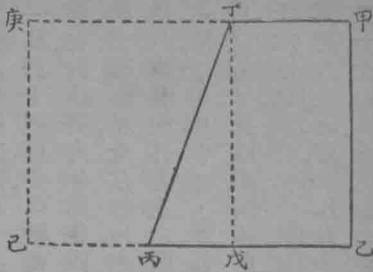
法以積一千五百尺倍之得三千尺．用長五十尺除之得六十尺．爲上下兩闊相和之數．內減下闊四十尺．餘二十尺．卽上闊也．如圖甲乙丙丁梯形倍之成甲乙己戊斜方形．試將己角取直作己辛線．則截斜方形一段爲己辛戊勾股形．如以己辛戊勾股形移補於甲庚乙．遂成庚乙己辛長方形．其積原與甲乙己戊斜方形等．今用庚乙中長除之．得乙己．卽上下兩闊相和之數．內減乙丙下闊．所餘丙己與甲丁等．卽上闊也．

設如不等邊兩直角斜方形積九千六百尺．長一百二十尺．上下兩闊相差之較四十尺．問上闊下闊各幾何．

法以積九千六百尺倍之得一萬九千二百尺．用長一百二十尺除之．得一百六十尺．爲上下兩闊相和之數．內減上下兩闊相差之較四十尺．餘一百二十尺．折半得六十尺．爲上闊．加上下兩闊相差之較四十尺．得一百尺．卽下闊也．



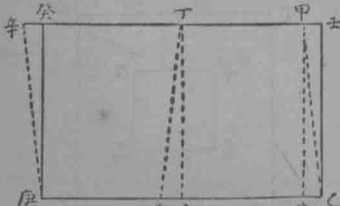


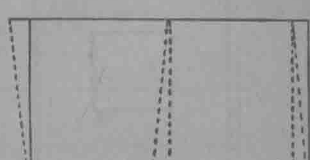


如圖甲乙丙丁斜方形。其甲乙長一百二十尺。甲丁上闊與乙丙下闊相差戊丙四十尺。試將原積倍之。遂成甲乙己庚長方形。故以甲乙長除之。得乙己。爲上下闊相和之數。內減戊丙上下兩闊相差之較。餘數折半。得乙戊與甲丁等。爲上闊。加戊丙較。得乙丙。爲下闊也。

設如梯形面積六千六百五十尺。長九十五尺。上下兩闊相差之較二十尺。問上闊下闊各幾何。

法以積六千六百五十尺倍之。得一萬三千三百尺。用長九十五尺除之。得一百四十尺。爲上下兩闊相和之數。內減上下兩闊相差之較二十尺。餘一百二十尺。折半得六十尺。爲上闊。加上下兩闊相差之較二十尺。得八十尺。爲下闊也。如圖甲乙丙丁梯形。甲戊長九十五尺。甲丁上闊與乙丙下闊相差乙戊與己丙共二十尺。試將原積倍之。成甲乙庚辛斜方形。與壬乙庚癸長方形之積等。故以甲戊長除壬乙庚癸長方形。得乙庚。爲上下兩闊相和之數。內減乙戊與己丙上下兩闊相差之較。餘折半。得戊己與甲丁等。爲上闊。加乙戊與己丙上下兩闊相差之較。得乙丙爲下闊也。



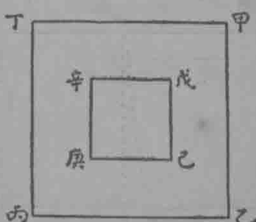


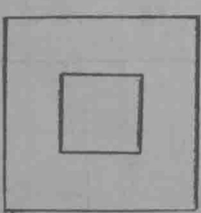
設如方環形。外周二百八十丈。內周一百二十丈。求面積幾何。

法以外周二百八十丈四歸之。得七十丈。自乘得四千九百丈。又以內周一百二十丈四歸之。得三十丈。自乘得九百丈。兩自乘數相減。餘四千丈。卽方環之面積也。如圖甲乙丙丁外周二百八十丈。四歸之得甲乙之一邊。自乘得甲乙丙丁大方積。戊己庚辛內周一百二十丈。四歸之得戊己之一邊。自乘得戊己庚辛小方積。兩方積相減。所餘卽方環之面積也。

又法以外周二百八十丈自乘。得七萬八千四百丈。內周一百二十丈自乘。得一萬四千四百丈。兩數相減。餘六萬四千丈。以十六除之。得四千丈。卽方環面積也。前法將內外周各四歸之而得內外方邊。故以內外方邊各自乘相減而得方環面積。此法卽以內外周各自乘相減。以十六除之而得方環面積也。蓋內外周爲內外方邊之四倍。內外周自乘之積。必比內外方邊自乘之積大十六倍。凡方邊大一倍。則面積大四倍。今方邊大四倍。故面積大十六倍。爲隔一位相加之遞比例也。是以兩周各自乘相減之餘積。比兩方邊各自乘相減之餘積。亦大十六倍也。

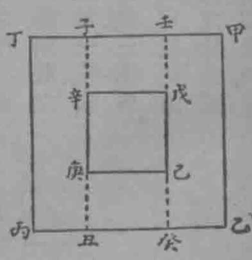
又有方環面積。求外方邊至內方邊之闊。則以外周二百八十丈與內周一百二十丈相加。得四百丈。折半得二百丈。以除方環面積四千丈。得二十丈。卽外

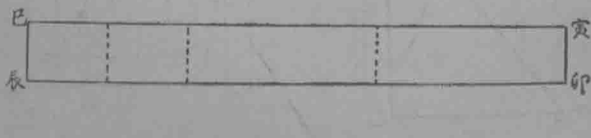




方邊至內方邊之闊也．如圖自方環內邊作壬癸子丑二線．則甲乙癸壬、子丑丙丁、爲外方邊與闊相乘之二長方．壬戊辛子、己癸丑庚、爲內方邊與闊相乘之二長方．引而長之．成寅卯辰巳一長方．其長卽半外周與半內周之和．其闊卽外方邊至內方邊之闊．故以外周與內周相併折半．除方環面積．而得外方邊至內方邊之闊也．

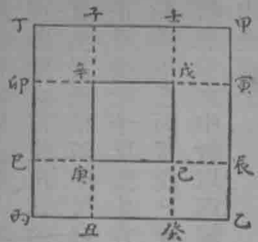
又法以內方邊三十丈與外方邊七十丈相減．餘四十丈．折半得二十丈．亦卽外方邊至內方邊之闊也．如圖甲丁爲外方邊．減與戊辛內方邊相等之壬子．餘甲壬與子丁．折半得甲壬．卽方環之闊也．





設如方環面積四千尺．闊二十尺．求內外方邊各幾何．

法以闊二十尺自乘得四百尺．四因之得一千六百尺．與環積四千尺相減．餘二千四百尺．四歸之得六百尺．以闊二十尺除之得三十尺．卽內方邊．又以闊二十尺倍之得四十尺．加內方邊三十尺得七十尺．卽外方邊也．如圖甲乙丙丁、戊己庚辛、方環形．內減甲寅戊壬、辰乙癸己、子辛卯丁、庚丑丙巳闊自乘之四正方．餘寅辰己戊、辛庚巳卯、壬戊辛子、己癸丑庚、四長方．四



歸之得寅辰己戊一長方。其闊卽方環之闊。其長卽方環內邊之長。故以寅戊闊除之得戊己。爲內方邊也。

又法置環積四千尺。以闊二十尺除之。得二百尺。四歸之得五十尺。加闊二十尺得七十尺。卽外方邊。於五十尺內減闊二十尺。餘三十尺。卽內方邊也。如圖甲乙丙丁、戊己庚辛方環積。以闊除之。卽得壬癸子丑、爲內周外周相倂折半之中數。以四歸之。卽得壬癸一邊與戊寅等。故加闊得外邊。減闊得內邊也。

設如勾股形股三十六尺。勾二十七尺。今從上段截勾股形積五十四尺。問截長闊各幾何。

法以股三十六尺爲一率。勾二十七尺爲二率。截積五十四尺倍之。得一百零八尺爲三率。求得四率八十一尺。開方得九尺。卽所截之闊。旣得所截之闊。則以勾二十七尺爲一率。股三十六尺爲二率。所截之闊九尺爲三率。求得四率十二尺。卽所截之長也。此法一率與二率爲線與線之比例。三率與四率爲面與面之比例也。如圖甲乙丙勾股形。甲乙爲股三十六尺。乙丙爲勾二十七尺。甲丁戊勾股形爲截積五十四尺。是故甲乙與乙丙之比、應同於甲丁與丁戊之比。然而無甲丁之數。故將截積倍之爲甲丁與丁戊相乘