XINGMOLICHAODAISHUYU

Cartan型模李超代数与超平面构形

CHAOPINGMIANGOUXING

DONGYANQIN GAORUIMEI ZHU

董艳芹 高瑞梅 著

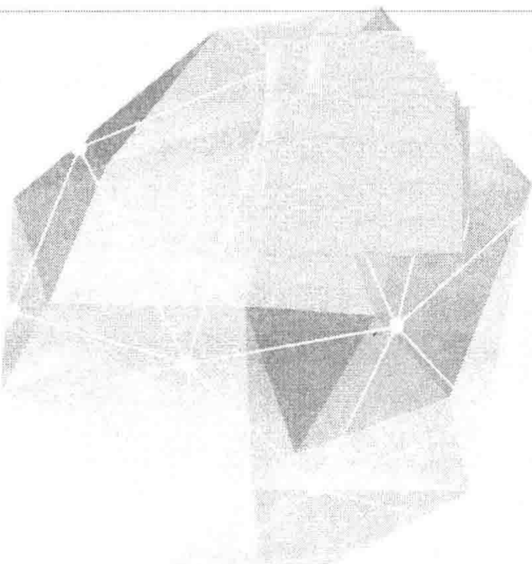
吉林大学出版社

本书获长春师范大学学术著作出版资助

XINGMOLICHAODAISHUYU

Cartan型模李超代数与超平面构形

CHAOPINGMIANGOUXING



DONGYANQIN GAOREUIMEI ZHU
董艳芹 高瑞梅 著

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

Cartan 型模李超代数与超平面构形 / 董艳芹，高瑞梅著. －－ 长春：吉林大学出版社，2015. 4
ISBN 978－7－5677－3567－5

Ⅰ. ①C… Ⅱ. ①董… ②高… Ⅲ. ①李代数 Ⅳ. ①O152. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 086786 号

书 名：Cartan 型模李超代数与超平面构形
作 者：董艳芹 高瑞梅 著

责任编辑：刘守秀 责任校对：刘守秀
吉林大学出版社出版、发行
开本：787×1092 毫米 1/16
印张：16. 25　　字数：225 千字
ISBN 978－7－5677－3567－5

封面设计：林雪
长春市新世纪印刷有限公司印刷
2015 年 5 月 第 1 版
2015 年 5 月 第 1 次印刷
定价：65. 00 元

社址：长春市明德路 501 号 邮编：130021
发行部电话：0431－89580028/29
网址：http：//www. jlup. com. cn
E－mail：jlup@ mail. jlu. edu. cn

前　言

本书主要讨论了广义Cartan型模李超代数、李三系及超平面构形的结构性质. 随着特征零域上李超代数和模李代数的不断发展, 模李超代数的研究日渐活跃. 目前, 模李超代数的研究仍处在前期的发展阶段, 研究结果尚少, 许多重要问题亟待解决. 最明显也是最重要的问题之一就是有限维单模李超代数的分类尚未解决. 1997年, 国内Cartan型模李超代数的创始人张永正教授提出域F的特征数$p > 7$时, 有限维单模李超代数分类的猜想：当域F的特征数$p > 7$时, 在同构的意义下, 任意一个有限维单模李超代数(李代数作为特殊的李超代数除外)或者是典型的, 或者是Cartan型的(包括广义Cartan型). 2006年, D. Leites和I. Shchepochkina又提出关于有限维单模李超代数分类的猜想, 有限维单模李超代数可以通过下面三种方法得到：取有限维单的复李超代数的形式(例如利用整基)再与特征域作张量积并取其所有单子商；取复向量场李超代数的除幂对偶(即用除幂代数代替多项式代数)并取其所有单子商；取上述方法所得代数的可能的非平凡形变. 但这些猜想都没有得到证明, 因此有限维单模李超代数的分类问题仍是一个亟待解决的问题, 等着数学工作者们为之而努力.

由于模李超代数和非模李超代数的差别就在于Cartan型模李超代数, 因此Cartan型模李超代数的研究已变成了一个重要而有活力的研究领域. 在国内, 1997年, 张永正教授相应于特征零域Cartan型单李超代数, 用除幂代数与外代数的张量积上的微分算子构造了四类有限维Cartan型单模李超代数W, S, H, K. 继张永正教授构造四类有限维Cartan型单模李超代数之后, 刘文德教授及其他们的弟子又构造了四类有限维Cartan型的单模李超代数HO, KO, SHO, SKO, 并且决定了这八类单模李超代数的导子代数. 除此之外, Cartan型模李超代数的结合型, 嵌入定理, 滤过不变性, 自同构群, 外导子代数, 上同调群, 广义Cartan型模李超代数的构造等都有相应的研究. 但仍

然有很多问题没有解决, 例如, 无限维Cartan型模李超代数的研究仍处于萌芽阶段, 研究结果很少. 又如, 限制Cartan型模李超代数的自同构群已有了结果, 而非限制Cartan型模李超代数的自同构群与底代数的自同构群研究结果尚少; 具有非退化结合型的Cartan型模李超代数在平凡模上的二阶上同调群已经有较多结果, 而对没有非退化结合型的Cartan型模李超代数在平凡模上的二阶上同调群还有很多问题没有解决.

随着李代数在量子力学、几何学和物理学等多学科中的广泛应用, 随着近年来各相关学科的发展和需要, 李代数正朝着两个大的方向进行扩展: 一是将有限维李代数的重要研究推广到无限维李代数的研究; 另一个是将李代数的二元运算推广到多元运算, 从而对多元李代数进行研究. 李三系是三元运算的代数体系, 其结构要比李代数的结构复杂得多. 限制李三系是素特征域上的李三系, 是近十几年才开始发展的, 研究结果很少.

在研究仿射Weyl群的Kazhdan-Lusztig表示理论的时候, 时俭益给出了Shi构形的概念. 由于Shi构形在组合和自由性方面具有非常好的性质, 而且对于李理论中的Weyl群发展有一定的推动作用, 故成为构形领域一个研究的热点. 1996年, P. Edelman和V. Reiner提出了猜想: 广义Shi构形的锥构形、广义Catalan构形的锥构形都是自由的. C. A. Athanasiadis对于根系Φ为A_ℓ型的情况给予了证明. 2004年, M. Yoshinaga证明了上述猜想, 但是没有明确给出基底的形式.

本书充分利用特征零域李超代数、模李代数和模李超代数的内在关系, 借用特征零域李超代数和模李代数的方法及手段来研究模李超代数. 给定一有限维除幂代数、一有限维外代数及一有限维的截头多项式代数, 则它们的张量积为一结合超代数. 对于此结合超代数而言, 其导子构成一导子超代数. 进而我们构造此导子超代数的子代数, 这些子代数经验证都为李超代数, 称为广义Cartan型模李超代数. 本书构造了四类有限维广义Cartan型模李超代数$\widetilde{W}, \overline{W}$和$\widetilde{S}, \overline{S}$, 并研究了这四类有限维广义Cartan型模李超代数$\widetilde{W}, \overline{W}$和$\widetilde{S}, \overline{S}$的单性、限制性和导子代数等性质.

本书借助已有的李代数和李三系的理论和手法来研究李三系及限制李三系的结构和性质. 给出了限制李三系是p-幂零及p-可解的充要条件, 证明了中

心为零的限制李三系p-理想直和分解的存在唯一性. 另外, 本书定义并研究了拟环面限制李三系, 给出了李三系及限制李三系的P-B-W定理.

在本书中, 第一次以代数的方法明确构造出D_ℓ型Shi构形的锥构形的导子模的一组基底. 首先, 介绍了Shi构形的研究背景和基本定义, 并将D_ℓ型Shi构形锥构形的定义多项式明确化. 然后, 定义了一类与Bernoulli多项式相关的有理函数, 并进行齐次化. 利用这些有理函数, 构造出基底. 另外, 本书研究了超可解构形、二次构形和归纳自由构形. 证明了超平面可解序的一个充要条件, 给出了超平面可解序集合和二次序集合之间的关系, 并研究了超平面可解序与归纳自由构形之间的关系. 最后, 给出了一个计算构形的特征多项式的算法及判断一个中心构形是否为超可解构形的算法.

目　录

第 1 章　绪 论

1.1　模李超代数发展概况

李超代数的研究成果不仅促进了物理学的发展, 在数学上亦与组合数学、顶点算子代数、微分方程、微分流形、拓扑学等重要的数学分支有着广泛而深刻的联系, 因此近年来关于李超代数的研究十分活跃. 特征零域上的李代数与李超代数、素特征域上的李代数都已有了系统的理论, 但是模李超代数(即素特征域上的李超代数)的研究仍处于前期的发展阶段. 而模李超代数的发展与特征零域上李超代数及模李代数(即素特征域上的李代数)的发展密切相关, 现分别阐述如下.

特征零域上李超代数的研究现状

1955年, A. Nijenhuis给出了最早的李超代数的例子. 60年代李超代数出现在数学的形变理论中. 在理论物理中, 基本粒子与基本相互作用的最终统一, 是物理学家为之不懈奋斗的目标. 但是, 大统一理论中存在着所谓等级问题, 为此他们提出了超对称的大统一理论. 为了建立相对论的费米子与玻色子的统一理论, 1974年, Wess和Zumino提出了超对称性, 它不仅排除了等级问题的困扰, 而且在其他方面(如：核物理，超引力)亦有重大作用. 超对称性将普通时空满足的Poincarè李代数(即非齐次Lorentz代数)扩充为超Poincarè代数. 于是将有限个具有不同内部量子数的玻色子与费米子放在李超代数的一个不可约表示中, 从此关于李超代数的研究有了迅速的发展[1~9].

若一个向量超空间

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$$

被赋予了代数结构且满足对所有$\theta, \mu \in \mathbb{Z}_2$,

$$\mathcal{A}_\theta \mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_{\theta+\mu}$$

成立, 则称$\mathcal{A}$为超代数.

对任意$a \in L_\alpha, b \in L_\beta, c \in L; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, 若域$\mathbb{F}$上的超代数$L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$满足如下条件:

(1) $[a,b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b,a]$,　　(超交换性)

(2) $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{\alpha\beta}[b,[a,c]]$,　　(超雅克比等式)

则称L是李超代数.

根据基域的特征, 李超代数可分为非模李超代数与模李超代数, 即特征零域上的李超代数和素特征域上的李超代数. 关于非模李超代数, 具有里程碑意义的研究结果当属V. G. Kac的分类工作. 1977年, Kac对特征零域上的有限维单李超代数进行了完全分类[10]. 特征零域上有限维单李超代数分为经典李超代数和Cartan型李超代数两大类. 单李超代数的伴随表示如果是完全可约的或不可约的, 则称为经典的, 否则称为Cartan型的. 根据Kiliing型是否为零及伴随表示是否不可约, 经典李超代数又分为基本经典李超代数和奇异李超代数两种. 利用可迁滤过及诱导阶化李超代数, Kac将Cartan型李超代数分为$W(n), S(n), H(n), \bar{S}(n)$四类. 1998年, Kac又完成了特征零代数闭域上无限维单的线性紧致李超代数的分类[1,10~12]. 此外, 低维李超代数, 典型实单李超代数和可解李超代数的分类也已经被给出[13~15]. 在我国, 苏育才教授在非模李超代数的表示等方面作出了深刻的研究成果. 总之, 经过多名数学家与物理学家的研究工作, 非模李超代数的研究已经取得了相当丰富的成果, 形成了系统的理论.

模李代数的研究现状

李代数是挪威数学家Lie在19世纪后期研究连续变换群时引进的一个数学概念, 它与李群的研究密切相关. “李代数”这个术语是1934年由德国数学家Weyl引进的.

假设L是域$\mathbb{F}$上的向量空间. 如果L上有一个运算

$$L \times L \to L,\ (x,y) \mapsto [x,y]$$

满足以下三个条件:

(1) 这个运算是双线性的, 即

$$[ax+by, cz+dw] = ac[x,z] + cb[y,z] + ad[x,w] + bd[y,w];$$

(2) $[x,x]=0$;

(3) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$ (雅克比等式)

则称L是一个李代数.

随着时间的推移, 李代数在数学以及古典力学和量子力学中的地位不断上升, 其理论与方法已渗透到数学和理论物理的许多领域. 根据基域的特征, 李代数可分为非模李代数与模李代数, 即特征零域上的李代数和素特征域上的李代数. 在非模李代数不断发展的同时, 1937年, E. Witt发现了非典型的单李代数, 即模李代数的存在. 20世纪30年代末, E. Witt, N. Jacobson和H. Zassenhaus开创了有限维模李代数的研究[16, 17]. 到目前为止, 模李代数的发展已有70多年的历史, 并取得了突破性的进展. 但由于曾经一度受到有限特征的限制, 模李代数的发展比较缓慢. 自1969年, A. I. Kostrikin的文章发表后, 模李代数的研究才有了长足的进展. 经过多位数学家二十余年的共同努力, 特别是H. Strade与R. L. Wilson的杰出工作, Strade最终于1989年完成了特征数$p>7$的代数闭域上单的有限维模李代数的分类[18~20]. 近十年, A. Premet和H. Strade又完成了特征数大于3的小特征的单的有限维李代数的分类[21~23], 这使得对模李代数的结构有了比较清楚的认识. 对于一个代数对象的研究, 通常从分类、结构及表示三个角度去考察. 分类问题是研究任何代数对象的一个重要而基本的问题. 在有限维单的模李代数分类问题完成的同时, 模李代数的表示也有了很大的进展. 国内张禾瑞先生的Witt代数不可约模的完全分类和沈光宇先生为代表的Cartan型模李代数的不可约表示的系列文章, 都为模李代数表示论的发展做出了极大的贡献[24~30]. 80年代, 沈光宇先生成功地构造了从一般线性李代数的表示到交换结合代数

的导子李代数的表示的一类函子, 并把这种构造方法用于决定Cartan型李代数限制表示的分类. 国外的Homles等人在沈光宇先生Cartan型模李代数表示理论的基础上, 进一步发展了限制Cartan型模李代数的表示理论[31]. 除此之外, 典型模李代数表示也已经获得很多重要进展, 例如, 有限维模李代数的不可约表示已被证明必是有限维的, 而一般线性模李代数的不可约表示的分类也已完成. 在模李代数的发展取得了极其丰富的结果的基础上, 出现了很多和李代数、模李代数密切相关的数学分支, 例如: 多元李代数、Heisenberg多元李代数、李三系等. 现在模李代数的发展已经取得了极其丰富的结果[11,28,29,32~38].

模李超代数的研究现状

特征零域上李超代数的不断发展和模李代数体系的逐渐完善, 促进了模李超代数的研究. 并为模李超代数的研究提供了考虑问题的途径和方法. 模李超代数最早的研究, 当属1992年D. Leites、Y. Kochetkov 和V. M. Petrograds对模李超代数所做的工作[39, 40]. D. Leites和Y. Kochetkov首次对模李超代数引入了$(p, 2p)$-结构, 即限制李超代数的概念. 进而V. M. Petrogradski对限制李超代数的包络代数进行了研究. 1996年, Farnsteiner又对限制李超代数及Frobenius扩张做了进一步研究. 2000年, 国内王颖教授给出了限制李超代数的一个等价定义[41], 由于这一定义明确了$L_{\bar{0}}$模$L_{\bar{1}}$在p映射下的像, 使得模李代数表示的一些结果可以推到模李超代数上, 对模李超代数表示的研究有重要的作用. 随着模李超代数限制结构的引入, 一方面, 每个模李超代数均可以嵌入一个限制李超代数中, 从而可以利用$(p, 2p)$映射研究结构问题. 另一方面, 容易证明模李超代数的任何有限维不可约表示均具有唯一的p-特征标, 这使得可以像模李代数一样对模李超代数的表示理论进行深入的研究. 近年来, 模李超代数的研究主要集中在下面几个方面:

i. 模李超代数的限制结构, 也称$(p, 2p)$结构, 这类似李代数的p结构; 模李超代数p-包络代数; p-特征标及简约泛包络代数[40, 41];

ii. Cartan型模李超代数的导子、滤过及自同构群[42~48];

iii. 某些Cartan型模李超代数阶化模的实现, 不可约表示的分类[49, 50];

iv. 某些Cartan型模李超代数的上同调群[51];

v. 某些深度1的阶化单李超代数的实现[52];

vi. 小特征模李超代数的构造[53];

vii. 广义Cartan型模李超代数的构造[54~56].

由于研究的时间短, 模李超代数的研究结果还很不完善, 最明显也是最重要的问题之一就是有限维单模李超代数的分类尚未解决.

①有限维单模李超代数分类问题的背景和进展情况

随着有限维单非模李超代数及单模李代数分类问题的基本解决, 有限维单模李超代数的分类问题就成为迫切需要解决的问题. 1992年, D. Leites和Y. Kochetkov首次谈到了模李超代数的分类问题[39]. 1997年, 张永正教授猜想: 当域F的特征$p > 7$时, 在同构的意义下, 任意一个有限维单模李超代数(李代数作为特殊的李超代数除外)或者是典型的, 或者是Cartan型的(包括广义Cartan型)[57]. 2006年, D. Leites和I. Shchepochkina提出关于有限维单模李超代数分类的猜想[58], 有限维单模李超代数可以通过下面三种方法得到: 取有限维单的复李超代数形式与特征域作张量积的所有单子商; 取复向量场李超代数的除幂对偶(即用除幂代数代替多项式代数)的所有单子商; 取上述方法所得代数可能的非平凡形变. A. Elduque构造了一系列特征$p = 3$的单模李超代数[53, 59, 60]. 2008年, S. Buarrudzh, P. Grozman和D. Leites也构造出了一系列特征$p = 3$的单模李超代数[58, 61]. 2009年, 他们发表了关于有限维单模李超代数分类的重要结果[62]. 有限维单模李超代数的分类问题是一个亟待解决的问题,等着数学工作者们为之而努力.

②Cartan型模李超代数的研究现状

广义Cartan型李代数(包括Witt型代数及Weyl型代数)的研究是目前李代数结构研究中最活跃的课题之一. 目前苏育才、徐晓平、赵开明等教授已经系统研究了广义Cartan型李代数, 给出了目前最广泛的单Weyl型代数,并且当生成导子为局部有限时给出了Witt型代数的分类及实现[63~65]. 模李超代数和非模李超代数的差别之一就在于Cartan型模李超代数, 因此Cartan型模李超代数的研究非常重要. 在国内, 张永正教授相应于特征零域Cartan型单李超代数, 用除幂代数与外代数的张量积上的微分算子构造了四类有限维Cartan型单模李超代数, 并证明了它们的单性和限制

性[57]. 之后, 张永正、刘文德教授及他们的弟子构造了八类Cartan型模李超代数$W, S, H, K, HO, KO, SHO, SKO$[44, 48, 57, 66, 67], 并且给出了这八类Cartan型模李超代数的导子代数[44, 48, 51, 68, 69]. 除此之外, 他们对Cartan型模李超代数的结合型[70], 嵌入定理[52,71~73], 滤过不变性[42, 43, 48, 74], 自同构群[75], 外导子代数[76], 上同调群[77], 广义Cartan型李超代数的构造[54, 55]等都有相应的研究. 但仍然有很多问题没有解决, 例如, 非限制Cartan型模李超代数的自同构群问题及无非退化结合型的Cartan型模李超代数的二阶上同调群问题.

1.2 限制李三系的发展概况

随着李代数的应用越来越广泛, 李代数已经从有限维李代数的研究扩展到无限维李代数的研究; 从二元运算扩展到多元运算. 李三系是三元运算的代数体系, 其结构要比李代数的结构复杂得多. 限制李三系是素特征域上的李三系, 它的发展和特征零域上李三系、模李代数的发展密切相关. 李三系的研究, 最初始于黎曼几何中全对称空间和全测地子流形的分类问题. 实质上, 在几何中实李三系完全等价于某一类单连通对称空间. 利用对称空间和李群的联系, Cartan把对称空间进行了分类. 每一个黎曼对称空间的全测地子流形都对应一个李三系; 反之, 每一个李三系都对应一个全测地子流形. 这样, 李三系与对称空间的理论紧密地联系在一起. 李三系这一概念最初是由N. Jacobson从Jordan理论和量子力学的角度提出的, 并且Jacobson进一步研究了李三系和Jordan代数之间的联系[78, 79]. 利用李代数上Levi定理可以给出李代数的内部结构, 因此可以把对李代数的研究转化为对半单、可解和幂零李代数的研究. 1952年, W. G. Lister在博士论文中给出了李三系的结构理论, 定义了李三系的根以及半单李三系和可解李三系, 并且证明了Levi定理[80]. 1995年, N. C. Hopkin定义了李三系的幂零理想和幂零根, 证明了特征零域上的Engle定理[81]. 这样利用李代数的相关理论, 李三系的研究也可以转化为半单、可解和幂零李三系的研究. 由于多位数学家的不懈努力, 李三系的研究取得了很大的进步. 例如, 把仿射代数的思想和方法应用到李三系上, 得到了无限

维李三系. 近年来, 又发现李三系与Yang-Baxter方程有着密切联系. 关于李三系的研究结果也被转移到对称空间中, 使得李三系在几何学及物理学方面的应用越来越广泛. 到目前为止, 单李代数在特征零域上的分类还没有完成, 所以李三系分类问题的研究也还只限于单李三系. E. Cartan在对实数域上单李代数分类的同时, 给出了复数域上单李三系的分类. 1971年, W. G. Lister对特征为零的任意代数闭域上的单李三系进行了分类. 1985年, J. R. Faulkner给出特征为零代数闭域上的单李三系分类的另一种方法, 进而N. Hopkins在1987年把这个分类与导子代数的分类相联系, 给出进一步的结果, 但是仅此而已. 关于李三系的分类问题还需要很长的路要走. 随着李三系研究成果的日益丰富和模李代数理论的日趋成熟, 自然地考虑到素特征域上的李三系的情况. 2001年, T. L. Hodge给出了限制李三系的定义, 并就限制的情况讨论了李三系和它的包络代数之间的关系. 2002年, 他又进一步讨论了限制李三系的表示理论, 从而开创了对限制李三系的研究[82, 83]. 在研究了限制李三系与代数群表示之间的关系后, 人们惊喜地发现, 它与quqsi群及loops也有着很大的关系. 限制李三系作为一个新兴的研究课题, 还处在起步阶段. 但是正因为如此, 它存在着更广阔的发展空间, 也越来越受到世人的瞩目.

1.3 超平面构形的研究现状

超平面构形(也称超平面配置)是有限维向量空间中有限个超平面所形成的集合, 其中超平面是余维数为1的仿射子空间. 通常将超平面构形简称为构形.

超平面构形是与奇点理论密切相关的一门学科. 它起源于一个简单的数学问题. 1943年, J. L. Woodbridge在美国数学月刊上提出这样一个问题, 证明n刀最多可以将一块奶酪切成$(n+1)(n^2-n+6)/6$块. 事实上, 这个问题就是三维实向量空间中用n个超平面分割空间的一个模型. 为了将被分割空间数达到最大化, 这n个超平面所形成构形应该处于“一般位置”, 即任意两个超平面都有一条交线, 所有交线不同, 任意三个平面相交于一点, 所有点不同.

1992年, P. Orlik和H. Terao发表了*Arrangements of Hyperplanes*一书[84],

这是目前为止系统介绍超平面构形的经典书籍. 此书分别从组合、代数、构形自由性、拓扑、反射构形等方面对超平面构形给予了介绍. 另外, R. P. Stanley[85]也从组合学角度介绍了超平面构形及其应用.

可以从很多角度去研究超平面构形, 例如组合学、代数学、代数组合学、拓扑学等等. 另外, 超平面构形与数学中的很多分支都有密切的联系: 辫子和相位的研究、波前和超几何函数、反射群、李代数、编码理论、某些奇点的研究等. 超平面作为一门新学科, 将其他很多学科看似毫无联系的知识联系到一起, 给出了很多漂亮的结果, 让人们看到了这些学科的很多新的关联.

1962年, E. Fadell、R. Fox和L. Neuwirht介绍了复空间中某些超平面构形的补空间与辫子空间的关系[86, 87]. 辫子构形是由所有形如$H_{i,j} = \ker(z_i - z_j)$的超平面所组成的集合. 设$M = \{z \in \mathbb{C}^\ell | z_i \neq z_j, i \neq j\}$是辫子构形的补空间, 称其为纯辫空间. 他们证明了M是$K(\pi, 1)$空间. 设$\mathrm{Poin}(M, t) = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{rank} H^k(M) t^k$是$M$的Poincaré多项式. 1969年, V. I. Arnold[88]证明了一个非常漂亮的公式, 即

$$\mathrm{Poin}(M, t) = (1 + t)(1 + 2t)\cdots(1 + (\ell - 1)t). \tag{1.3.1}$$

他还建立了一个分次代数A, 并且证明了代数同构

$$H^*(M) \simeq A. \tag{1.3.2}$$

这是从生成元和关系式的角度给出的纯辫空间的上同调环. V. I. Arnold还提出如下的猜想, 如果M是$\mathbb{C}^\ell$中任意一个超平面构形的补空间, 即

$$M = \{z \in \mathbb{C}^\ell | \alpha_k(z) \neq 0, k = 1, \cdots, N\}. \tag{1.3.3}$$

则环$H^*(M, \mathbb{Z})$是挠自由的, 并且由一维元素$\omega_k = (1/2\pi i)(d\alpha_k/\alpha_k)$生成.

1971年, E. Brieskorn在Bourbaki讨论班上证明了上述猜想[89]. Brieskorn 还从另外一个角度推广了Arnold的结果. 他将对称群推广到一个有限的Coxeter 群W, 将辫子构形推广为ℓ维实向量空间$V_{\mathbb{R}}$中的一个反射表示.

设V是$V_{\mathbb{R}}$的复化, 则W就是V中的一个反射群. 设$M_W \subset V$是W的所有反射超平面的补. 他证明了如下结论, 即

$$\mathrm{Poin}(M_W, t) = (1 + m_1 t)(1 + m_2 t) \cdots (1 + m_\ell t), \tag{1.3.4}$$

其中, $m_1, \cdots, m_\ell$是Coxeter群W的指数.

1975年, T. Zaslavsky对于实构形补空间的连通分支的个数问题, 提出了删除-限制的方法, 得到了递推公式[90]. 这一结果对于构形的发展起到了极大的推动作用. 类似的结果由M. Las Vergnas独立给出[91].

下面简单介绍一下T. Zaslavsky的结果.

设$\mathcal{A}$是一个构形, $H \in \mathcal{A}$, 将$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \backslash \{H\}$称作是删除构形, $\mathcal{A}'' = \{K \cap H | K \in \mathcal{A}'\}$称作是限制构形. 三元组$(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ 可以用来解决计算实构形补空间的连通分支的个数问题. 每个连通分支称作是一个“房”. 设$\mathcal{C}(\mathcal{A})$是构形$\mathcal{A}$的所有房形成的集合, 则有

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = |\mathcal{C}(\mathcal{A}')| + |\mathcal{C}(\mathcal{A}'')|. \tag{1.3.5}$$

Zaslavsky定义了集合$L(\mathcal{A})$, 即$\mathcal{A}$中超平面的所有非空交集所形成的集合, 并且用反包含关系赋予了$L(\mathcal{A})$一个偏序. 他利用$L(\mathcal{A})$上的Möbius函数定义了特征多项式和一个与特征多项式有密切联系的多项式$\pi(\mathcal{A}, t)$, 称作Poincaré多项式. Zaslavsky证明了等式

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A}', t) + t\pi(\mathcal{A}'', t), \tag{1.3.6}$$

并且利用这个等式得到了一个重要的结果:

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = \pi(\mathcal{A}, 1). \tag{1.3.7}$$

1980年, P. Orlik和L. Solomon用组合学的方法研究复构形的补空间[92]. 他们利用Brieskorn的结果计算任意一个复构形的补空间的Poincaré多项式,