21世纪高等院校创新规划教材

高等数学（经管类）

ADVANCED MATHEMATICS

（上册）

杨明泉 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

21 世纪高等院校创新规划教材

高等数学(经管类)

(上册)

杨明泉 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类：全 2 册/杨明泉编著. —杭州：浙江大学出版社,2013. 8

ISBN 978-7-308-12151-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 200541 号

高等数学(经管类)(全 2 册)

杨明泉 编著

责任编辑 邹小宁
文字编辑 王 蕾
封面设计 王聪聪
出 版 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 浙江云广印业有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 22
字 数 536 千
版 印 次 2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-12151-4
定 价 50.00 元

内容提要

本书为独立学院经管类本科“高等数学”课程教学而编写.主要特色是:按照普通院校经管类各专业对高等数学的教学要求,根据大多数院校将“高等数学”课程分两学期教学的实际情况,分上、下两册编写出版.上册内容为一元函数微积分部分:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等五章.下册是多元函数微积分和微分方程与差分方程部分:空间解析几何与向量代数简介、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程与差分方程等五章.本书内容体系完整、结构安排合理;为适合独立学院学生学习,适当减少了定理的论证过程,增加了数学思想和方法的介绍;减少了对抽象数学问题的讨论,加强了应用题例的训练;每章归纳了知识结构图,分别配备A类和B类综合练习题,由以上特色使本书更适合于应用性本科院校“高等数学”课程的教学.

前 言

普通高等院校经济管理学科的高等数学教材可选择的已经较多,也不缺精品,但适合独立学院和民办本科院校的教材还不多见.我们根据独立学院学生的特点和多年的教学经验,以“不求一样发展,但都要发展;不求同步提高,但都要提高;不求相同规格,但都要合格”的新教育质量观为指导.以“不求通用,但求适用”的原则,尝试编写出版适合独立学院教学的系列特色教材,供相关院校教学选用.《高等数学(经管类)》教材是根据经管类学生大多数为高中文科类的特点组织编写的,它更适合于独立学院经管理类学生使用.

《高等数学(经管类)》教材主要特色:

在内容选择上,以包含微积分基本体系,反映微积分主要思想、方法、技巧和经管类等专业课程需要的内容为主要选择依据.

在章节编排上,以微积分内容传统的逻辑关系为参照,在多元函数微分学之前,安排了空间解析几何与向量代数的基础内容.

在内容编写上,尽量少用抽象的数学语言定义概念,尽量减少对定理和性质的纯数学逻辑性的证明,以易于理解、方便应用为呈现原则.

在文字叙述上,力求通俗易懂,简明扼要.

在深度广度上,以基本概念的理解、掌握,基本方法以会用为原则配备例题和习题;以后续专业课程必要的数学知识和技能技巧为标准选取素材.

本教材为配合两学期教学的需要和学生使用的方便,分上、下册装订.上册分五章:第一章,函数与极限(由杨明泉编写);第二章,导数与微分(由杨明泉编写);第三章,中值定理与导数的应用(由杨明泉编写);第四章,不定积分(由张慧编写);第五章,定积分及其应用(由尹志强编写);还附有第一至五章习题参考答案与提示.下册分五章:第六章,空间解析几何与向量代数简介(由李同军编写);第七章,多元函数微分学(由南志杰编写);第八章,多元函数积分学(由杨宇博编写);第九章,无穷级数(由杨宇博编写);第十章,微分方程与差分方程(由杨明泉编写),全书由杨明泉主编和统稿.

在编写过程中得到了浙江海洋学院李同军教授的大力协助,嘉兴学院副校长严从荃教授、嘉兴学院南湖学院院长胡俊云教授和刘炳文教授对本书进行了认真审阅,并提出了宝贵的修改意见,在此特别表示感谢.嘉兴学院南湖学院数理系部分老师对《高等数学》系列教材建设做了大量工作,在此一并致谢.

由于编者水平有限,疏漏和错误之处, 敬请指正.

杨明泉

2013 年 3 月 18 日　于嘉兴南湖

目　录

第一章　函数与极限

在我们周围变化的量随处可见,如气温随时间而变化,市场上商品的价格、正常交易时股票的成交量等。这些变化量都有一个共同的特点,就是它们之所以变化是因为受到其他一些变化量的影响或制约. 如果把变化量化,可以对变量之间关系进行研究,从中找到两个变量或多个变量之间的变化关系,抽象为函数. 微积分学是研究函数中各变量之间关系的理论和工具. 微积分学的主要思想是极限思想,利用极限思想可以刻画函数的性质和变化规律.

本章主要内容: 函数及函数的性质,经济函数;极限的概念和无穷小的概念,函数的连续性;极限运算法则;闭区间上连续函数的性质.

第一节　集合与映射

一、集合

1. 集合的概念

集合是现代数学理论中的一个最基本的概念. 人们常常把客观事物或能辨别的东西抽象地用一个符号表示. 例如: 用字母 a 表示"甲同学",b 表示"乙同学",并且抽象地称为"元". 如果把具有某种特性的"元" 作为一个整体看时,或因需要把某些"元" 作为一个"集体" 时,就说形成了一个**集合**.

例如: 某超市某日的所有库存商品可以看作是一个集合,某班的全体同学可以看作是一个集合,全体正整数可以看作是一个集合,等等.

一般地,把具有某种特征的对象所组成的一个整体,称为是一个**集合**,简称**集**. 组成集的对象称为**元素**,简称**元**.

在讨论一般问题时,集合通常用大写字母表示,如: $A,B,C,\cdots$,元素用小写字母表示,如 $a,b,c,\cdots$.

习惯上,记全体非负整数的集合为 $\mathbf{N}$,全体整数的集合为 $\mathbf{Z}$,全体有理数的集合为 $\mathbf{Q}$,全体实数的集合为 $\mathbf{R}$. 特别地,正整数集合记为 $\mathbf{N}^+$,正实数集合记为 $\mathbf{R}^+$.

由有限个元素组成的集合称为**有限集**,由无穷多个元素所组成的集合称为**无限集**. 特别地, 为讨论问题的需要,我们把不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$.

2. 集合的表示法

数学中表示一个集合有以下两种方法:

(1) 列举法。按任意顺序列出集合的所有元素,并用一对花括号$\{\}$ 括起来. 例如: 由数字 1,2,3,4,5 这五个数组成的集合记为

$$\{1,2,3,4,5\} \text{ 或 } \{2,5,1,4,3\}.$$

(2) 描述法。若某集合是由具有某种性质 P 的元素组成,就把这个集合表述为

$$\{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例 1 分别用两种方法表示方程 $x^2 = 1$ 解的集合.

解 用描述法表示为

$$\{x \mid x^2 = 1\},$$

用列举法为

$$\{-1,1\}.$$

3. 元素与集合的关系

对于确定的集合,它的元素必须是确定的,若 a 是集合 A 的元素,则称 a **属于集合** A,记为 $a \in A$,若 a 不是集合 A 的元素,则称 a **不属于集合** A,记为 $a \notin A$.

如例 1 中,

$$-1 \in \{x \mid x^2 = 1\}, 0 \notin \{x \mid x^2 = 1\}.$$

又如集合

$$\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in R\}$$

实际上是一个空集.

4. 集合与集合的关系

对于两个集合 A,B,若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,就称 A 是 B 的**子集**,记为 $A \subset B$(读作 A 包含于 B),或 $B \supset A$(读作 B 包含 A).

若集合 A,B 相互包含,则称 A **和** B **相等**,记作 $A = B$. 例如 $\{x \mid x^2 = 1\} = \{-1,1\}$.

5. 集合的运算

定义 由集合 A 和 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**. 记作 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由集合 A 和 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**,记作 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由所有属于集合 A 但不属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**,记作 $A - B$. 即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

例 2 设 $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{0,2,4,6,8\}$,求 $A \cup B, A \cap B, A - B$.

解 $A \cup B = \{1,2,3,4,5\} \cup \{0,2,4,6,8\} = \{0,1,2,3,4,5,6,8\}$;

$$A \cap B = \{1,2,3,4,5\} \cap \{0,2,4,6,8\} = \{2,4\};$$

$$A - B = \{1,2,3,4,5\} - \{0,2,4,6,8\} = \{1,3,5\}.$$

当讨论某一具体问题时,如果所涉及的各个集合都是某一个集合 I 的子集时,把集合 I 称之为**全集或基本集**,把全集与它某个子集 A 的差集 $I - A$ 称为 A 的**余集或补集**,记为 A^C 或 $\overline{A}$. 例如,在讨论数集时常把全体实数集 R 视为基本集,则无理数集为 $R - Q$,记为 Q^C 或 $\overline{Q}$.

6. 集合的运算律

设 A,B,C 都是集合,则

(1) 等幂律 $A \cup A = A, A \cap A = A$.

(2) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(3) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(4) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(5) De Morgan 律 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$,

或 $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

二、区间和邻域

当我们表示数轴上两个点之间全体实数的集合时,可以用更简洁的形式来表示.

定义　若 a,b 是两个实数,且 $a < b$,把数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为**开区间**,记为 (a,b);称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为**闭区间**,记为 $[a,b]$;称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 和 $\{x \mid a < x < b\}$ 为**半开半闭区间**,分别记为 $[a,b)$,$(a,b]$. 其中:实数 a,b 称为区间的**端点**,a 叫作**左端点**,b 叫作**右端点**. 当区间端点都为有限实数时称为**有限区间**.

全体实数集 $\mathbf{R}$ 的区间形式记为 $(-\infty, +\infty)$. 其中:符号 ∞ 称为无穷(大),$-\infty$ 读作**负无穷(大)**,$+\infty$ 读作**正无穷(大)**,它们不是实数,只是一个记号. 这样数集

$$\{x \mid x \geqslant a\}, \{x \mid x > a\}, \{x \mid x \leqslant b\}, \{x \mid x < b\}$$

也可用区间形式分别记为

$$[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b),$$

这些区间的端点含有无穷大,故称它们为**无限区间**.

为以后讨论问题的需要,我们把以点 a 为中心的任何开区间称为**点 a 的邻域,记作** $U(a)$.

设 δ 为任意正数,则开区间

$$(a-\delta, a+\delta)$$

就是点 a 的一个邻域,称为点 a 的 δ 邻域,并记为

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

其中:点 a **称为该邻域的中心**,δ **称为该邻域的半径**.

邻域 $U(a,\delta)$ 的几何意义是:在数轴上以 a 为中心,到 a 距离小于 δ 的一切点组成的集合(如图 1-1).

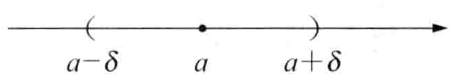


图 1-1

有时要用到不包括中心的邻域,称为**去心邻域**,记为

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**,把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

三、映射的概念

1. 一一映射

映射也是现代数学理论中的一个最基本的概念,它主要用于定义函数,映射是两个集合之间的一种对应关系.

例 3　设集合 $D = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$,$Y = \{y \mid y \geqslant 0, y \in \mathbf{R}\}$,试建立一个对应关系 f,满足 D 中的任意元素 x,按所给的对应关系 f 都在 Y 中有唯一的元素与它对应.

解　对于集合 D 与 Y 的元素之间的对应关系可以有很多,如

$$f: x \to y = x^2.$$

可验证上述定义的f满足D中的任意元素x,在对应关系f下都有Y中的唯一元素与它对应.

另有对应关系$g: x \to y = |x|$也满足题设要求.

定义 设X,Y是两个非空集合,如果存在一个对应关系f,满足对每一个$x \in X$,按对应关系f,在集合Y中有唯一确定的元素y与之对应,则称f是从X到Y的一个**映射**. 记作

$$f: X \to Y.$$

其中y称为元素x在f下的**像**,记为$y = f(x)$,并把所有$x \in X$的全体像组成的集合称为f的**值域**,记作R_f或$f(X)$;把x称为$f(x)$的**原像**,并把原像集X称为映射f的**定义域**,记作D_f,即$D_f = X$.

习惯上,常用小写字母f,h,g等表示映射. 并把$f(x),h(x),g(x)$分别记作x对应的像或值.

定义 设f是从集合X到集合Y的一个映射,

(1) 如果Y中的每个元素都是X中的元素的像,则称f是集合X到集合Y的一个**满射**.

(2) 如果X中任意两个不同的元素,在f下的像也不同(即对任意$x_1,x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,有$f(x_1) \neq f(x_2)$),则称$f$是从集合$X$到集合$Y$的一个**单射**.

(3) 如果f是既单且满的映射,则称f为**一一映射**.

2. 逆映射

定义 设f是从集合X到集合Y的一个一一映射,我们把集合Y的像$f(x)$与原像x对应的映射称为f的**逆映射**,记作

$$f^{-1}: Y \to X,$$

则$x = f^{-1}(y)$.

例 4 设$f: R \to R$,对每个$x \in R, f(x) = x^2 - 1$,那么f是实数集R到实数集R的一个映射,其中,定义域$D_f = (-\infty, +\infty)$,值域$R_f = f(R) = [-1, +\infty)$;显然$f$不是实数集$R$到实数集$R$的一一映射. 也不是定义域$R$到值域$D_f = [-1, +\infty)$上的一一映射.

例 5 设$f: (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$,对每个$x \in (0 + \infty)$,$f(x) = \ln x$,验证$f$是一一映射,并求$f$的逆映射.

解 根据e为底数的指数定义,对任何实数y,$e^y > 0$,令$x = e^y \in (0, +\infty)$,有$y = \ln x$,即存在$x \in (0, +\infty)$是y的原像,所以f是满射.

又对于任意$x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,且$x_1 \neq x_2$,则$\ln x_1 \neq \ln x_2$,所以$f$是单射. 故得$f$是一一映射. 由$f(x) = \ln x$,得$x = f^{-1}(\ln x) = e^{\ln x}$,如果记$y = \ln x$,则$f^{-1}(y) = e^y$,得$f^{-1}$为$f$的逆映射.

习题 1-1

1. 各举出一个符合下列要求的集合:

   (1) 有限集;(2) 无限集;(3) 空集.

2. 写出集合$\{1,2,3\}$的所有子集.
3. 用区间表示以点 2 为中心半径为 5 的邻域.

4. 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{-1,1\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$.

5. 设集合 $A=\{x\mid x<0\}$，$B=\{y\mid y\geqslant 0\}$，演示映射：$f:x\to y=x^2$ 是 A 到 B 的单射，但不是满射.

6. 设 $f:(0,+\infty)\to(1,+\infty)$，对每个 $x\in(0+\infty)$，$f(x)=2x+1$，求 f 的逆映射.

第二节　函　数

一、函数的定义

中学里，已经有了函数的概念，下面给出集合与映射意义下关于函数的定义.

定义　设 D 为非空数集，$f:D\to\mathbf{R}$ 是一个映射，则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**. 记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**，即 $D_f=D$；y 称为**因变量**，集合 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subset R$ 称为函数的**值域**.

事实上，初、高中学过的函数都满足上述定义，相应的定义域、值域和函数关系式都与这个定义下的函数是一样的.

由于 x 在映射 f 下的像 $f(x)$ 中，已经含有自变量 x 和映射关系，以后就把 $f(x)(x\in D)$ 称为 x 的函数. 在不指明函数的定义集合时，函数 $f(x)$ 的定义域默认为使 $f(x)$ 表达式有意义的 x 能取的实数范围.

表示函数关系的记号除 f 外，还常选取其他英文字母或希腊字母，如 g,h,f,φ 等. 相应的函数为 $g(x),h(x),f(x),\varphi(x)$ 等. 例如，$g(x)=\sin x$，则函数关系 g 表示“取自变量 x 的正弦值”. 需要指明函数变量时，通常将一个函数写为 $y=f(x)$ 的形式. 例如

$$y=2x-1,y=\mathrm{e}^x,$$

这时 x 是自变量，y 是 x 的函数.

例 1　确定函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{x^2-1}$ 的定义域.

解　按 $f(x)=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{x^2-1}$ 有意义的要求，则 $1-x\geqslant 0$ 且 $x^2-1\neq 0$，故定义域为

$$\begin{aligned}&\{x\mid 1-x\geqslant 0\}\cap\{x\mid x^2-1\neq 0\}\\&=\{x\mid x\leqslant 1\}\cap\{x\mid x^2\neq 1\}\\&=(-\infty,-1)\cup(-1,1).\end{aligned}$$

对于一个函数关系 $y=f(x)$，如果把满足关系的所有 (x,y) 看作是平面直角坐标系中的点时，它形成的轨迹称为函数的**图像**（或图形）. 有时利用函数的图像，可以更直观地发现自变量与因变量之间的变化关系，或变化趋势.

如果把平面直角坐标系中的点作为集合的元素，则点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 即为函数 $y=f(x)$ 的图形.

应当指出，组成一个函数有三个要素：定义域、映射、值域. 只有三者完全相同，才说两

个函数是同一函数.

例 2　验证以下三个函数:

(1) $f(x)=|x|$,$D_f=(-\infty,+\infty)$,$R_f=[0,+\infty)$.

(2) $g(x)=\sqrt{x^2}$,$D_g=(-\infty,+\infty)$,$R_g=[0,+\infty)$.

(3) $h(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $D_h=(-\infty,+\infty)$,$R_h=[0,+\infty)$是同一个函数关系.

解　由题设函数(1),(2),(3)的定义域、值域都相同,虽然三个映射关系表示形式不同,

但定义域中每一个元素,根据所给的三个不同形式的映射,得到的像都一致,故它们是同一个函数,如图 1-2 所示.

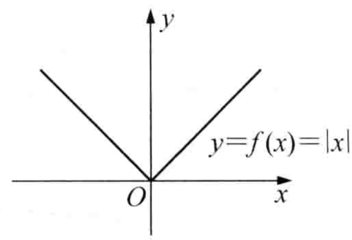


图 1-2

例 2 中函数(3)是把定义域分为两部分,不同部分由不同的函数表达式表示.通常称这种在自变量的不同变化范围中,对应关系用不同式子来表示的函数称为**分段函数**.

例 3　设分段函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x<1,\\ 4-x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ (1) 计算 $f(1)$,$f(-2)$,$f(4)$.(2) 画出该函数图形.

解　(1) $f(1)=4-1=3$,$f(-2)=2+(-2)=0$,$f(4)=4-4=0$.(2) 该函数的图形如图 1-3 所示.

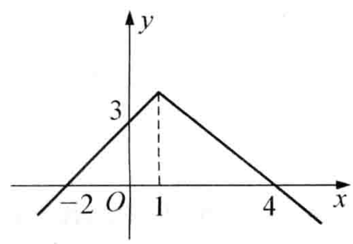


图 1-3

例 4　设 x 为任意实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作$[x]$.则 $y=[x]$ 是一个定义域为全体实数的函数,试画出 $y=[x]$ 的图像.

解　按题意,如果 $x\in[n,n+1)$(n 为整数),则$[x]=n$,现在原点附近取点作图,由于

$$[-2]=-2,[-1.3]=-2,[-1]=-1,$$
$$[-0.1]=-1,[0.7]=0,[1]=1,[3.98]=3.$$

描点后图像如图 1-4 所示,它的图像为阶梯形直线段.

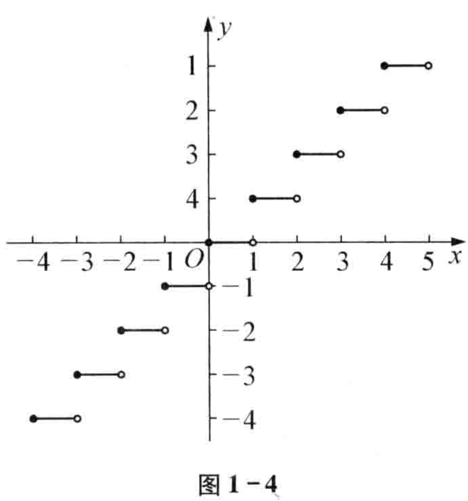


图 1-4

二、函数的性质

1. 函数的单调性

定义　设函数$f(x)$对于区间I上任意两点x_1,x_2,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$成立,则称函数$f(x)$在区间I上是**单调增加的**,也称$f(x)$在区间I上是**增函数**(见图1-5);如果对于I上任意两点x_1,x_2,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)>f(x_2)$成立,则称函数$f(x)$在区间I上是**单调减少的**,也称$f(x)$在区间I上是**减函数**(见图1-6).单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.相应的区间I称为它的**单调区间**.

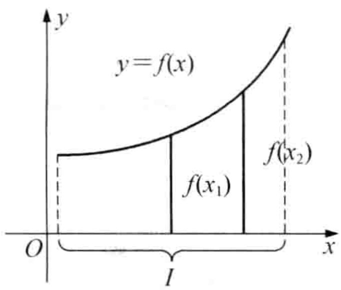


图1-5

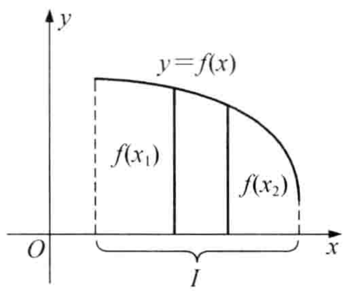


图1-6

例如,函数$f(x)=x^3$在其定义域区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加函数.函数$f(x)=|x|$在其定义域区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数.但在区间$(-\infty,0]$上单调减少,在区间$[0,+\infty,)$上单调增加.

2. 函数的有界性

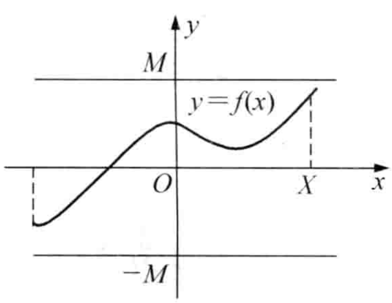
定义　设函数$f(x)$在数集X上有定义.

(1)如果存在实数K_1,使得对于任意$x\in X$,所对应的函数值$f(x)$都满足$f(x)\leqslant K_1$,则称函数$f(x)$在X上**有上界**.

(2)如果存在实数K_2,使得对于任意$x\in X$,所对应的函数值$f(x)$都满足$f(x)\geqslant K_2$,则称函数$f(x)$在X上**有下界**.

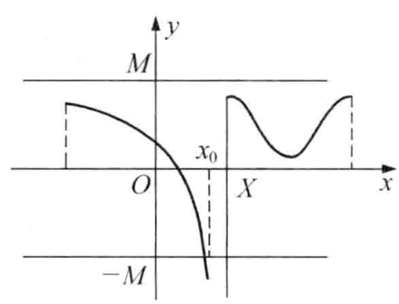
(3)函数$f(x)$在数集X既有上界又有下界时,称为函数在数集X上**有界**.否则称$f(x)$在数集X上**无界**.

根据函数有界的定义,当函数有界时,若取$M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$,就有对任意$x\in X$,所对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x)|\leqslant M$(见图1-7).函数无上界,或无下界都称为函数无界(见图1-8).



有界

图1-7



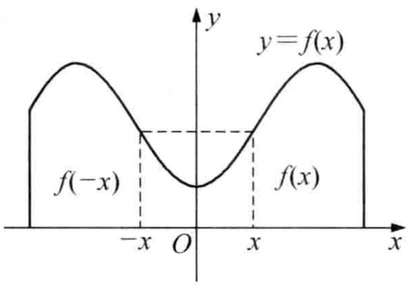
无界

图1-8

例如,函数 $y=\sin x$,对任意 $x\in R$,有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;但函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无上界,也无下界;函数 $y=\sqrt{x}$,$x\in[0,+\infty)$ 有下界,但无上界.

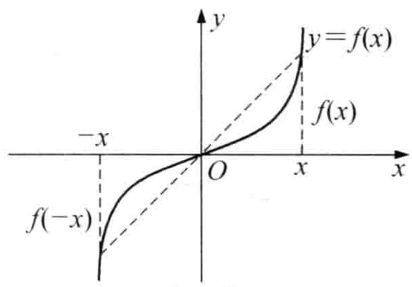
3. 函数的奇偶性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**(见图 1-9). 如果对于 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**(见图 1-10).



偶函数

图 1-9



奇函数

图 1-10

例 5 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=|x|$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $g(x)=x$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $h(x)=x+1$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $\varphi(x)=0$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

解 (1) 由对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$,所以为偶函数.

(2) 由对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$g(-x)=-x=-g(x)$,所以为奇函数.

(3) 由对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$h(-x)=-x+1\neq x+1=h(x)$,所以不是偶函数.

又 $h(-x)=-x+1\neq-(x+1)=-h(x)$,所以不是奇函数,即为非奇非偶函数.

(4) 由对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$\varphi(-x)=0=\varphi(x)$,$\varphi(-x)=0=-\varphi(x)$,所以为既奇又偶函数.

由函数的奇偶性定义可知,奇函数图像关于原点对称,偶函数图像关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

定义 对于函数 $f(x)$,如果存在不为零的常数 l,使得对于定义域内的任何一点 x,恒有 $f(x+l)=f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,其中 l 为函数的一个周期,通常所说周期函数的周期是指**最小正周期**,如图 1-11 所示.

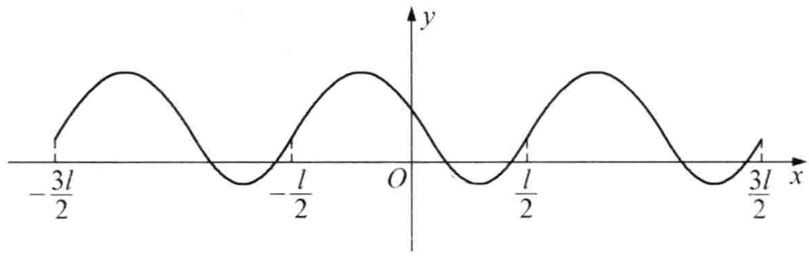


图 1-11

例如,正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 都是周期函数，实数 $2n\pi, n \neq 0, n \in \mathbf{Z}$ 都是它们的周期,且具有最小正周期为 2π. 又如常数函数 $y = C(x \in \mathbf{R})$ 是周期函数,由周期函数定义可得,任意非零实数都是它的周期,所以它没有最小正周期.

习题 1-2

1. 确定函数 $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{x - 1}$ 的定义域.
2. 设分段函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 4 - x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ (1) 计算 $f(-1), f(0), f(1)$；(2) 画出该函数图形.
3. 判断下列函数的奇偶性：

   (1) $f(x) = x^2 + 1$；(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$；(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$；

   (4) $f(x) = x + \cos x$；(5) $f(x) = x\sin x$.
4. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任何函数. 证明 $g(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数，$h(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数.
5. 判断下列函数的有界性：

   (1) $f(x) = \sin^2 x$；(2) $f(x) = \tan x$；(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$；(4) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

第三节　初等函数

一、反函数概念

设某种商品销售总收益为 y,销售量为 x,商品销售单价为 $a(a \neq 0)$,则总收益函数为 $y = ax$,如果已知该商品的市场价格 a 和计划的总收益 y,要求销售量 x,则由函数 $y = ax$,可解得 $x = \dfrac{y}{a}$,我们把 $x = \dfrac{y}{a}$ 中的 y 看作是自变量时,它称为函数 $y = ax$ 的反函数.

定义　如果函数 $y = f(x)$ 是定义域 D 到值域 $f(D)$ 上的单射,则其逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$ 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$,称为 $y = f(x)(x \in D)$ 的**反函数**.

由于习惯上函数的自变量用 x 表示,函数用 y 表示. 因此,今后提到 $y = f(x)$ 的反函数时,是指 $y = f^{-1}(x)$. 由反函数的定义可得,在同一直角坐标系中函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称(见图1-12). 如果 $P(a,b)$ 在 $y = f(x)$ 上,则它关于直线 $y = x$ 的对称点为 $Q(b,a)$.

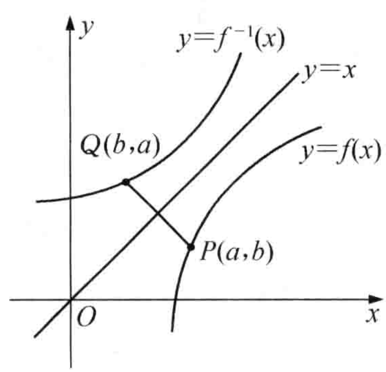


图 1-12

例如,$y = x^3(x \in \mathbf{R})$ 的反函数为 $y = x^{\frac{1}{3}}(x \in \mathbf{R})$；$y$

$= e^x(x \in \mathbf{R})$ 的反函数为 $y = \ln x\ (x \in \mathbf{R}^+)$.

例 1 求正弦函数 $y = \sin x$ 在靠近原点附近的单调区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数.

解 由正弦函数的定义可知,$x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,正弦映射

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

是单映射,记$\sin^{-1} = \arcsin$,则

$$\arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

则 $\sin x$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数为 $\arcsin x$.

需要指出:正弦函数是周期函数,整个定义域上不是单调函数,所以不存在反函数,但在其每个单映射区间内都可确定反函数. 把周期函数在原点附近取得值域中所有值的区间称为该周期函数的**主值区间**. 因此,例 1 中的 $\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数 $\arcsin x$ 是正弦函数 $\sin x$ 在主值区间上的反函数,本书所论的三角函数的反函数均指它们主值区间上的反函数.

同理可得:$\cos x(x \in [0,\pi])$ 的反函数为 $\arccos x(x \in [-1,1])$;

$\tan x\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数 $\arctan x(x \in (-\infty, +\infty))$;

$\cot x(x \in (0,\pi))$ 的反函数 $\operatorname{arccot} x(x \in (-\infty, +\infty))$.

二、基本初等函数

中学里已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数的基本形式称为**基本初等函数**. 为便于应用理整如下:

(1) 幂函数. $y = x^\alpha$,α 为常数,定义域与值域均与常数 α 有关.

(2) 指数函数. $y = a^x(a > 0$,且 $a \neq 1)$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0, +\infty)$.

(3) 对数函数. $y = \log_a x(a > 0$,且 $a \neq 1)$. 定义域为$(0, +\infty)$,值域为$(-\infty, +\infty)$.

特别地,$y = \log_e x$ 记为 $y = \ln x$,称为**自然对数函数**,其中 $e \approx 2.718$ 为无理数.

(4) 三角函数.

正弦函数, $y = \sin x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$[-1,1]$.

余弦函数, $y = \cos x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$[-1,1]$.

正切函数, $y = \tan x$,定义域为$\left\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$,值域为$(-\infty, +\infty)$.

余切函数, $y = \cot x$,定义域为$\{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$,值域为$(-\infty, +\infty)$.

正割函数, $y = \sec x, \sec x = \frac{1}{\cos x}$,定义域为$\left\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$,值域为$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

余割函数, $y = \csc x, csc x = \frac{1}{\sin x}$. 定义域为$\{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$,值域为