张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（试卷分册·数学二）

史上最全
含1987—2015年
全部真题

AUTHENTIC EXAMINATION PAPERS WITH ANSWERS

□ Mr. Zhang

张宇◎主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

[张宇考研数学系列丛书]

张宇

考研数学真题大全解

（试卷分册 · 数学二）

CLASSIC

张宇 ◎ 主编

编委（按姓氏拼音顺序）：蔡燧林 高昆轮 胡金德 刘国辉 杨洋 亦一（笔名）

于吉霞 曾凡（笔名） 张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解．试卷分册．数学二／张宇主编．—北京：北京理工大学出版社，2015.5

ISBN 978－7－5682－0401－9

Ⅰ．①张…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－习题集　Ⅳ．①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第067142号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／4.5
字　　数／110千字
版　　次／2015年5月第1版　2015年5月第1次印刷
定　　价／40.00元(共2册)

责任编辑／梁铜华
文案编辑／多海鹏
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

目　录

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……1
1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……2
1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……3
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……4
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……5
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……6
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……7
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……8
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……9
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题……10
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……11
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……12
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……13
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……14
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……15
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……16
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……17
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……19
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……20
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……22
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……23
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……25
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……26
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……28
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……29
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……30
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……31
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题……32
2015 年全国硕士研究生招生考试数学二试题……34

【编者注】1987年到1996年的数学试卷Ⅲ为现在的数学二.

1987年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1)设 $y=\ln(1+ax)$,其中 a 为非零常数,则 $y'=$________,$y''=$________.

(2)曲线 $y=\arctan x$ 在横坐标为1的点处的切线方程是________;法线方程是________.

(3)积分中值定理的条件是________,结论是________.

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$________.

(5)$\int f'(x)\mathrm{d}x=$________;$\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x=$________.

二、(本题满分6分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

三、(本题满分7分)

设 $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

四、(本题满分8分)

计算定积分 $\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$.

五、(本题满分8分)

设 D 是由曲线 $y=\sin x+1$ 与三条直线 $x=0,x=\pi,y=0$ 围成的曲边梯形,求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

六、证明题(本题满分10分)

(1)若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,且导数 $f'(x)$ 恒大于零,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

(2)若 $g(x)$ 在 $x=c$ 处二阶导数存在,且 $g'(c)=0,g''(c)<0$,则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

七、(本题满分10分)

计算不定积分 $\int\dfrac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x$,其中 a,b 是不全为0的非负数.

八、(本题满分10分)

(1)求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y$ 满足条件 $y\big|_{x=\sqrt{2}}=0$ 的特解.

(2)求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^x$ 的通解.

九、选择题(本题共4小题,每小题4分,满分16分)

(1)$f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是

(A)有界函数. (B)单调函数. (C)周期函数. (D)偶函数.

(2)函数 $f(x)=x\sin x$

(A)当 $x\to\infty$ 时为无穷大. (B)在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(C)在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界. (D)当 $x\to\infty$ 时有有限极限.

(3)设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于

(A)$f'(a)$. (B)$2f'(a)$. (C)0. (D)$f'(2a)$.

(4)设 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 连续,$s>0,t>0$,则 I 的值

(A)依赖于 s,t. (B)依赖于 s,t,x.

(C)依赖于 t,x,不依赖于 s. (D)依赖于 s,不依赖于 t.

十、(本题满分10分)

在第一象限内求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点,使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小,并求此最小面积.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

(1)设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0,\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，则 $a=$________．

(2)设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$________．

(3)设 $f(x)$连续，且$\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$，则 $f(7)=$________．

(4)$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$________．

(5)$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________．

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

(1)$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点(0,1)处切线与 x 轴交点坐标是

(A)$\left(-\dfrac{1}{6},0\right)$． (B)$(-1,0)$． (C)$\left(\dfrac{1}{6},0\right)$． (D)$(1,0)$．

(2)设 $f(x)$与 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上皆可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有

(A)$f(-x)>g(-x)$． (B)$f'(x)<g'(x)$． (C)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$． (D)$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$．

(3)若函数 $y=f(x)$，有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是

(A)与 Δx 等价的无穷小． (B)与 Δx 同阶的无穷小．

(C)比 Δx 低阶的无穷小． (D)比 Δx 高阶的无穷小．

(4)由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\leqslant x\leqslant\pi)$与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

(A)$\dfrac{4}{3}$． (B)$\dfrac{4}{3}\pi$． (C)$\dfrac{2}{3}\pi^2$． (D)$\dfrac{2}{3}\pi$．

(5)n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的充分必要条件是

(A)有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$．

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关．

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示．

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示．

三、（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

(1)已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$并写出它的定义域．

(2)已知 $y=1+xe^{xy}$，求$y'|_{x=0}$及$y''|_{x=0}$．

(3)求微分方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$的通解（一般解）．

四、（本题满分 12 分）

作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$的图形，并填写下表．

单调增加区间		凹(∪)区间	
单调减少区间		凸(∩)区间	
极值点		拐　点	
极　值		渐近线	

五、（本题满分 8 分）

将长为 a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形，问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小．

六、（本题满分 10 分）

设函数 $y=y(x)$满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形在点(0,1)处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$．

七、（本题满分 7 分）

设 $x\geqslant -1$，求$\int_{-1}^x(1-|t|)\mathrm{d}t$．

八、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数，且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$．

(1)求$\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t$；

(2)证明$\left|\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\right|\leqslant M-m\ (a>0)$．

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共 7 小题，每小题 3 分，满分 21 分）

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=$________.

(2) $\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t=$________.

(3)曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的切线方程是________.

(4)设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$________.

(5)设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$________.

(6)设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 与 b 应满足的关系是________.

(7)设 $\tan y=x+y$，则 $\mathrm{d}y=$________.

二、（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

(1)已知 $y=\arcsin \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$，求 y'.

(2)求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

(3)求 $\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(4)已知 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(5)已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}$，$f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$，求 $\int_0^1 x^2f''(2x)\mathrm{d}x$.

三、选择题（本题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

(1)当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

(A)有且仅有水平渐近线. (B)有且仅有铅直渐近线.

(C)既有水平渐近线，也有铅直渐近线. (D)既无水平渐近线，也无铅直渐近线.

(2)若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$

(A)无实根. (B)有唯一实根.

(C)有三个不同实根. (D)有五个不同实根.

(3)曲线 $y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围成的图形，绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

(A) $\dfrac{\pi}{2}$. (B) π. (C) $\dfrac{\pi^2}{2}$. (D) π^2.

(4)设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处

(A)必取极大值. (B)必取极小值.

(C)不可能取极值. (D)是否取极值不能确定.

(5)微分方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)

(A) $a\mathrm{e}^x+b$. (B) $ax\mathrm{e}^x+b$. (C) $a\mathrm{e}^x+bx$. (D) $ax\mathrm{e}^x+bx$.

(6)设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在. (B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在. (D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

四、（本题满分 6 分）

求微分方程 $xy'+(1-x)y=\mathrm{e}^{2x}(0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解.

五、（本题满分 7 分）

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

六、（本题满分 7 分）

证明：方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、（本题满分 11 分）

对函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2}$ 填写下表.

单调减区间	
单调增区间	
极值点	
极值	
凹区间	
凸区间	
拐点	
渐近线	

八、（本题满分 10 分）

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时 $y\geqslant0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 的值，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处的法线方程是________.

(2)设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}$，则 $y'=$________.

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=$________.

(4)下列两个积分的大小关系是：$\int_{-2}^{-1}e^{-x^3}\,dx$ ________ $\int_{-2}^{-1}e^{x^3}\,dx$.

(5)设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$________.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分）

(1)已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则

(A) $a=1,b=1$. (B) $a=-1,b=1$.

(C) $a=1,b=-1$. (D) $a=-1,b=-1$.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $d\left[\int f(x)\,dx\right]$ 等于

(A) $f(x)$. (B) $f(x)\,dx$. (C) $f(x)+C$. (D) $f'(x)\,dx$.

(3)已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A)不可导. (B)可导，且 $f'(0)\neq 0$.

(C)取得极大值. (D)取得极小值.

(4)设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

(A)连续点. (B)第一类间断点.

(C)第二类间断点. (D)连续点或间断点不能由此确定.

三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

(1)已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a.

(2)求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy.

(3)求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}\,(x>0)$ 的拐点.

(4)计算 $\int\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}\,dx$.

(5)求微分方程 $x\ln x\,dy+(y-\ln x)\,dx=0$ 满足条件 $y\big|_{x=e}=1$ 的特解.

四、（本题满分 9 分）

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P，使该点处的切线，椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小（其中 $a>0,b>0$）.

五、（本题满分 9 分）

证明：当 $x>0$ 时，有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

六、（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{1+t}\,dt$，其中 $x>0$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

七、（本题满分 10 分）

过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

八、（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解，其中 a 为实数.

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)设 $y=\ln(1+3^{-x})$，则 $\mathrm{d}y=$________.

(2)曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的凸区间是________.

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$________.

(4)质点以速度 $t\sin t^2$ 米/秒作直线运动，则从时刻 $t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于________米.

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=$________.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 a,b 是常数，则

(A) $a=0,b=-2$.　(B) $a=1,b=-3$.　(C) $a=-3,b=1$.　(D) $a=-1,b=-1$.

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant2,\end{cases}$ 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,0\leqslant x\leqslant2$，则

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant2.\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant2.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ \frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant2.\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant2.\end{cases}$

(3)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$x_0\neq0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，则

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点.　(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点.

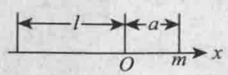
(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点.　(D)对一切 x 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$.

(4)设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　(D) 0.

(5)如图，x 轴上的一线密度为常数 μ，长度为 l 的细杆，若质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a，已知引力系数为 k，则质点和细杆之间引力的大小为



(A) $\int_{-l}^0\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$.　(B) $\int_0^l\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$.

(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^0\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$.　(D) $2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$.

三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

(1)设 $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(2)计算 $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}$.

(3)求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}$.

(4)求 $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

(5)求微分方程 $xy'+y=x\mathrm{e}^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

四、（本题满分 9 分）

利用导数证明：当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

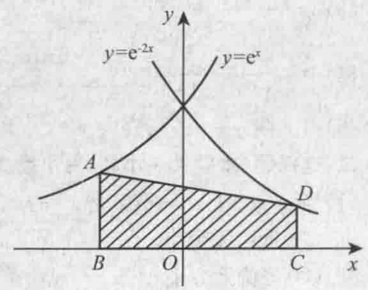
五、（本题满分 9 分）

求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

六、（本题满分 9 分）

曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

七、（本题满分 9 分）



如图，A,D 分别是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 上的点，AB 和 DC 均垂直 x 轴，且 $|AB|:|DC|=2:1$，$|AB|<1$. 求点 B 和 C 的横坐标，使梯形 $ABCD$ 的面积最大.

八、（本题满分 9 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x,x\in[0,\pi)$，计算 $\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

1992年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共5小题，每小题3分，满分15分）

(1)设$\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$其中$f$可导，且$f'(0)\neq 0$，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$________.

(2)函数$y=x+2\cos x$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值为________.

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$________.

(4)$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x^2+1)}=$________.

(5)由曲线$y=xe^x$与直线$y=ex$所围成图形的面积$S=$________.

二、选择题（本题共5小题，每小题3分，满分15分）

(1)当$x\to 0$时，$x-\sin x$是x^2的

(A)低阶无穷小. (B)高阶无穷小.

(C)等价无穷小. (D)同阶但非等价无穷小.

(2)设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$则

(A)$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$ (B)$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C)$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$ (D)$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2 & x\geqslant 0.\end{cases}$

(3)当$x\to 1$时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A)等于2. (B)等于0. (C)为∞. (D)不存在但不为∞.

(4)设$f(x)$连续，$F(x)=\int_0^{x^2}f(t^2)dt$，则$F'(x)$等于

(A)$f(x^4)$. (B)$x^2f(x^4)$. (C)$2xf(x^4)$. (D)$2xf(x^2)$.

(5)若$f(x)$的导函数是$\sin x$，则$f(x)$有一个原函数为

(A)$1+\sin x$. (B)$1-\sin x$. (C)$1+\cos x$. (D)$1-\cos x$.

三、（本题共5小题，每小题5分，满分25分）

(1)求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

(2)设函数$y=y(x)$由方程$y-xe^y=1$所确定，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$的值.

(3)求$\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(4)求$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$.

(5)求微分方程$(y-x^3)dx-2xdy=0$的通解.

四、（本题满分9分）

设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$求$\int_1^3 f(x-2)dx$.

五、（本题满分9分）

求微分方程$y''-3y'+2y=xe^x$的通解.

六、（本题满分9分）

计算曲线$y=\ln(1-x^2)$上相应于$0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$的一段弧的长度.

七、（本题满分9分）

求曲线$y=\sqrt{x}$的一条切线l，使该曲线与切线l及直线$x=0$，$x=2$所围成图形面积最小.

八、（本题满分9分）

设$f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何$x_1>0$，$x_2>0$，有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$________.

(2) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

(3) 设 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\,(x>0)$，则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是________.

(4) $\displaystyle\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$________.

(5) 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，则 $f(x)=$________.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 当 $x\to0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小. (B) 无穷大.

(C) 有界的，但不是无穷小的. (D) 无界的，但不是无穷大.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$

(A) 不连续. (B) 连续，但不可导.

(C) 可导，但导数不连续. (D) 可导，且导数连续.

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)dt\,(0\leqslant x\leqslant2)$，则 $F(x)$ 为

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant2.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant2.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant2.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant2.\end{cases}$

(4) 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

(5) 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内

(A) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$. (B) $f'(x)<0$，$f''(x)>0$.

(C) $f'(x)>0$，$f''(x)<0$. (D) $f'(x)>0$，$f''(x)>0$.

三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

(1) 设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

(3) 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos2x}dx$.

(4) 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$.

(5) 求微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初值条件 $y(0)=1$ 的特解.

四、（本题满分 9 分）

设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$. 试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

五、（本题满分 9 分）

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

六、（本题满分 9 分）

作半径为 r 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高 h 为何值时，其体积 V 最小，并求出该最小值.

七、（本题满分 9 分）

设 $x>0$，常数 $a>e$. 证明：$(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、（本题满分 9 分）

设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明：$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\leqslant\dfrac{Ma^2}{2}$，其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

1994年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1)若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,则$a=$________.

(2)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定,则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$________.

(3)$\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos 3x} f(t)dt\right)=$________.

(4)$\int x^3e^{x^2}dx=$________.

(5)微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1)设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,则

(A)$a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.　(B)$a=0,b=-2$.　(C)$a=0,b=-\dfrac{5}{2}$.　(D)$a=1,b=-2$.

(2)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$在$x=1$处的

(A)左、右导数都存在.　(B)左导数存在,但右导数不存在.

(C)左导数不存在,但右导数存在.　(D)左、右导数都不存在.

(3)设 $y=f(x)$是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解,且$f'(x_0)=0$,则$f(x)$在

(A)x_0 某邻域内单调增加.　(B)x_0 某邻域内单调减少.

(C)x_0 处取得极小值.　(D)x_0 处取得极大值.

(4)曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有

(A)1条.　(B)2条.　(C)3条.　(D)4条.

(5)设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$,$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$,则有

(A)$N<P<M$.　(B)$M<P<N$.　(C)$N<M<P$.　(D)$P<M<N$.

三、(本题共5小题,每小题5分,满分25分)

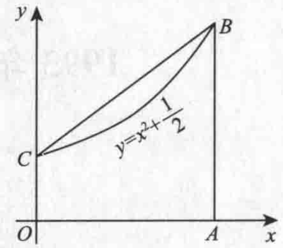
(1)设 $y=f(x+y)$,其中 f 具有二阶导数,且其一阶导数不等于1,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2)计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

(3)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

(4)求$\int\dfrac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

(5)如图,设曲线方程为 $y=x^2+\dfrac{1}{2}$,梯形 $OABC$ 的面积为 D,曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1,点 A 的坐标为$(a,0)$,$a>0$,证明:$\dfrac{D}{D_1}<\dfrac{3}{2}$.



四、(本题满分9分)

设当 $x>0$ 时,方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解,求 k 的取值范围.

五、(本题满分9分)

设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$,求

(1)函数的增减区间及极值;

(2)函数图像的凹凸区间及拐点;

(3)渐近线;

(4)作出其图形.

六、(本题满分9分)

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解,其中常数 $a>0$.

七、(本题满分9分)

设 $f(x)$在$[0,1]$上连续且递减,证明:当$0<\lambda<1$时,$\int_0^\lambda f(x)dx\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)dx$.

八、(本题满分9分)

求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________　分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $y=\cos x^2\sin^2\frac{1}{x}$,则 $y'=$________.

(2)微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为________.

(3)曲线 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=t^3\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为________.

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

(5)曲线 $y=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 的渐近线方程为________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$ 有间断点,则

(A)$\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　(B)$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C)$f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　(D)$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

(2)曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形面积可表示为

(A)$-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(B)$\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(C)$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(D)$\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

(3)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且对任意 x_1,x_2,当 $x_1>x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则

(A)对任意 x,$f'(x)>0$.　(B)对任意 x,$f'(-x)\leqslant 0$.

(C)函数 $f(-x)$ 单调增加.　(D)函数 $-f(-x)$ 单调增加.

(4)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$,则 $f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A)$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　(B)$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C)$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　(D)$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

(5)设 $f(x)$ 可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$. 若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则必有

(A)$f(0)=0$.　(B)$f'(0)=0$.　(C)$f(0)+f'(0)=0$.　(D)$f(0)-f'(0)=0$.

三、(本题共 6 小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1)求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

(2)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq 1$,求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(3)设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

(4)设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5)求摆线 $\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}$ 一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长 S.

(6)设单位质点在水平面内作直线运动,初速度 $v|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比(比例常数为 1),问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$? 并求到此时刻该质点所经过的路程.

四、(本题满分 8 分)

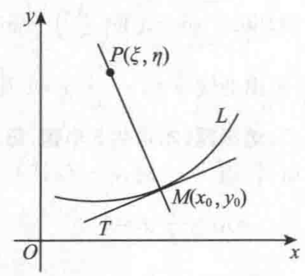
求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值和最小值.

五、(本题满分 8 分)

设 $y=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解,求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

六、(本题满分 8 分)

如图,设曲线 L 的方程 $y=f(x)$,且 $y''>0$,又 MT,MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为 $\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$(其中 $y_0'=y'(x_0)$,$y_0''=y''(x_0)$),试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.



七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$,计算 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

八、(本题满分 8 分)

设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$,且 $f''(x)>0$,证明:$f(x)\geqslant x$.

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅲ）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，则 $y'\big|_{x=0}=$________.

(2) $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=$________.

(3)微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为________.

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$________.

(5)由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$，$x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=$________.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1)设当 $x\to0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小，则

(A)$a=\frac{1}{2}$，$b=1$. (B)$a=1$，$b=1$.

(C)$a=-\frac{1}{2}$，$b=-1$. (D)$a=-1$，$b=1$.

(2)设函数 $f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$时，恒有$|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$的

(A)间断点. (B)连续而不可导的点.

(C)可导的点，且 $f'(0)=0$. (D)可导的点，且 $f'(0)\neq0$.

(3)设 $f(x)$处处可导，则

(A)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(4)在区间$(-\infty,+\infty)$内，方程$|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$

(A)无实根. (B)有且仅有一个实根.

(C)有且仅有两个实根. (D)有无穷多个实根.

(5)设 $f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且 $g(x)<f(x)<m$(m 为常数)，由曲线 $y=g(x)$，$y=f(x)$，$x=a$及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为

(A) $\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

(B) $\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

(C) $\int_a^b\pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

(D) $\int_a^b\pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

三、（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

(1)计算 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\mathrm{d}x$.

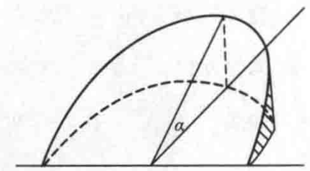
(2)求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

(3)设$\begin{cases}x=\int_0^t f(u^2)\mathrm{d}u,\\ y=[f(t^2)]^2,\end{cases}$其中 $f(u)$具有二阶导数，且 $f(u)\neq0$，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(4)求函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$在点 $x=0$ 处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

(5)求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解.

(6)设有一正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为 $2a$、$2b$，用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角$(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$的平面截此柱体，得一楔形体(如图)，求此楔形体的体积 V.



四、（本题满分 8 分）

计算不定积分 $\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

五、（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1)写出 $f(x)$的反函数 $g(x)$的表达式；

(2)$g(x)$是否有间断点、不可导点？若有，指出这些点.

六、（本题满分 8 分）

设函数 $y=y(x)$由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$的驻点，并判别它是否为极值点.

七、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$在区间$[a,b]$上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$和 $\eta\in(a,b)$使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

八、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$为连续函数.

(1)求初值问题$\begin{cases}y'+ay=f(x),\\ y\big|_{x=0}=0\end{cases}$的解 $y(x)$，其中 a 是正常数；

(2)若$|f(x)|\leqslant k$(k 为常数)，证明当 $x\geqslant0$ 时，有$|y(x)|\leqslant\frac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名_______ 分数_______

一、填空题:1～5 小题,每小题 3 分,共 15 分.

(1)已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$__________.

(2)设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''|_{x=0}=$__________.

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$__________.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=$__________.

(5)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$的秩为 2,则$t=$__________.

二、选择题:6～10 小题,每小题 3 分,共 15 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(6)设 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

(7)设在区间$[a,b]$上函数 $f(x)>0$,$f'(x)<0$,$f''(x)>0$. 令 $S_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$S_2=f(b)(b-a)$,$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则

(A)$S_1<S_2<S_3$. (B)$S_2<S_1<S_3$.

(C)$S_3<S_1<S_2$. (D)$S_2<S_3<S_1$.

(8)已知函数 $y=f(x)$对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$,若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$,则

(A)$f(x_0)$是 $f(x)$的极大值.

(B)$f(x_0)$是 $f(x)$的极小值.

(C)$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D)$f(x_0)$不是 $f(x)$的极值,$(x_0,f(x_0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(9)设 $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$,则 $F(x)$

(A)为正常数. (B)为负常数.

(C)恒为零. (D)不为常数.

(10)设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$

(A)$\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (B)$\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C)$\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (D)$\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

三、解答题:11～21 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11)(本题满分 5 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

(12)(本题满分 5 分)

设函数 $y=y(x)$由$\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5\end{cases}$所确定,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(13)(本题满分 5 分)

计算$\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x$.

(14)(本题满分 5 分)

求微分方程$(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

(15)(本题满分 5 分)

已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$,$y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$,$y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$是某二阶线性非齐次微分方程的三个解,求此微分方程.

(16)(本题满分 5 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(17)(本题满分 8 分)

λ 取何值时,方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1,\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解,有唯一解或有无穷多解?并在有无穷多解时写出方程组的通解.

(18)(本题满分 8 分)

设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$,$M(r,\theta)$为 L 上任一点,$M_0(2,0)$为 L 上一定点. 若极径 OM_0、OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0、M 两点间弧长值的一半,求曲线 L 的方程.

(19)(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,在开区间$(0,1)$内大于零,并满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$($a$ 为常数),又曲线 $y=f(x)$与 $x=1$,$y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2,求函数 $y=f(x)$,并问 a 为何值时,图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

(20)(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$连续,$\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

(21)(本题满分 8 分)

就 k 的不同取值情况,确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内根的个数,并证明你的结论.

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、填空题：1～5 小题，每小题 3 分，共 15 分.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

(2) 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$________.

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx=$________.

(4) 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt=$________.

(5) 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线方程为________.

二、选择题：6～10 小题，每小题 3 分，共 15 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(6) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必发散.

(B) 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 必有界.

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

(7) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(8) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，其中 α 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小，且 $y(0)=\pi$，则 $y(1)=$

(A) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$. (B) 2π. (C) π. (D) $e^{\frac{\pi}{4}}$.

(9) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant 0$. (B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0$.

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0(x\neq a)$. (D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant 0(x\neq a)$.

(10) 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq 0,\pm 1$，则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$

(A) $k\boldsymbol{A}^*$. (B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$. (C) $k^n\boldsymbol{A}^*$. (D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

三、解答题：11～21 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11)（本题满分 5 分）

求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型.

(12)（本题满分 5 分）

确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\displaystyle\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\,dt}=c(c\neq 0)$.

(13)（本题满分 5 分）

利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程

$$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$$

化简，并求出原方程的通解.

(14)（本题满分 6 分）

计算积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

(15)（本题满分 6 分）

从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始垂直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.

(16)（本题满分 8 分）

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(Ⅰ) 试证存在 $x_0\in(0,1)$，使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积；

(Ⅱ) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明(Ⅰ)中的 x_0 是唯一的.

(17)（本题满分 8 分）

设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

(18)（本题满分 8 分）

设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

(19)（本题满分 8 分）

设 $x\in(0,1)$，证明：

(Ⅰ) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；

(Ⅱ) $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

(20)（本题满分 5 分）

设 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{C}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

(21)（本题满分 6 分）

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^T$，问

(Ⅰ) a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(Ⅱ) a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？并写出此表示式.

1999年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

姓名________ 分数________

一、填空题：1～5小题，每小题3分，共15分.

(1)曲线 $\begin{cases} x=e^t\sin 2t, \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 在点(0,1)处的法线方程为________.

(2)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

(3) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx=$________.

(4)函数 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 上的平均值为________.

(5)微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为________.

二、选择题：6～10小题，每小题3分，共15分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(6)设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0, \\ x^2g(x), & x\leqslant 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A)极限不存在. (B)极限存在，但不连续.

(C)连续，但不可导. (D)可导.

(7)设 $\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt$，$\beta(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的

(A)高阶无穷小. (B)低阶无穷小.

(C)同阶但不等价的无穷小. (D)等价无穷小.

(8)设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A)当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

(B)当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

(C)当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

(D)当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

(9)"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A)充分条件但非必要条件. (B)必要条件但非充分条件.

(C)充分必要条件. (D)既非充分条件又非必要条件.

(10)记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1. (B)2.

(C)3. (D)4.

三、解答题：11～20小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11)(本题满分5分)

求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

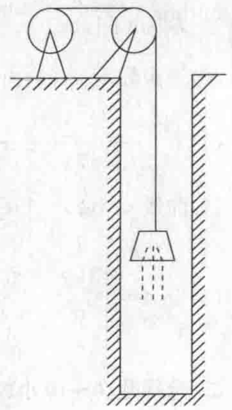
(12)(本题满分6分)

计算 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

(13)(本题满分7分)

求初值问题 $\begin{cases} (y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0\ (x>0), \\ y|_{x=1}=0 \end{cases}$ 的解.

(14)(本题满分7分)



为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口(如图). 已知井深30 m，抓斗自重400 N，缆绳每米重50 N，抓斗抓起的污泥重2 000 N，提升速度为3 m/s. 在提升过程中，污泥以20 N/s的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？

(说明：① 1 N×1 m=1 J；m，N，s，J分别表示米，牛顿，秒，焦耳. ②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

(15)(本题满分8分)

已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求

(Ⅰ)函数的增减区间及极值；

(Ⅱ)函数图形的凹凸区间及拐点；

(Ⅲ)函数图形的渐近线.

(16)(本题满分8分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

(17)(本题满分8分)

设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

(18)(本题满分7分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

(19)(本题满分6分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

(20)(本题满分8分)

设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^T.$$

(Ⅰ) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^T$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

(Ⅱ) p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

1999年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题