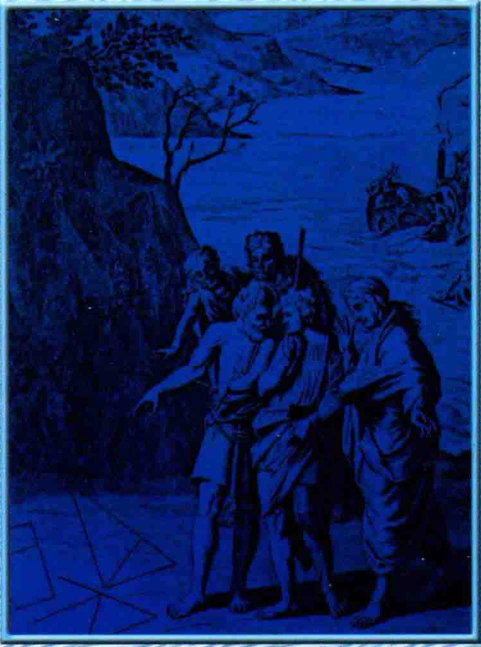
摆线族

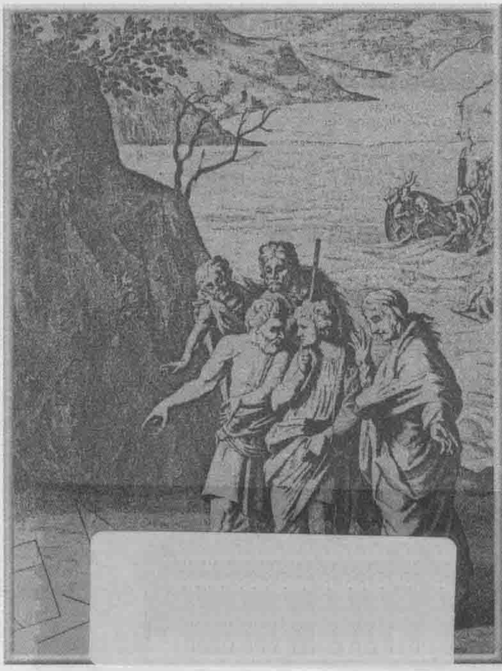


张家瑞 李兴春 编著

- 摆线
- 摆线的渐屈线和渐伸线
- 摆线的等距线
- 摆线族的应用
- 一般曲线上的摆线
- 摆线的实际应用

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

摆线族



张家瑞　李兴春　编著

◎摆线

◎摆线的渐屈线和渐伸线

◎摆线的等距线

◎摆线族的应用

◎一般曲线上的摆线

◎摆线的实际应用

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书全面系统地介绍了摆线系的基本知识，并利用微积分的知识推证摆线的各种重要性质和计算公式. 读者可从中学到用解析几何、微积分来研究轨迹曲线性质的一套解决问题的方法和思想.

本书适合高中生、大学低年级学生以及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

摆线族/张家瑞，李兴春编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.1

ISBN 978-7-5603-4966-4

Ⅰ.①摆… Ⅱ.①张… ②李… Ⅲ.①解析几何-普及读物②微积分-普及读物 Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 237158 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　关虹玲
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 16.25　字数 186 千字
版　　次　2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4966-4
定　　价　38.00 元

前言

摆线在有些书中称为旋轮线,我们认为还是称摆线比较恰当,为什么?因摆线这个名称最早是由研究摆线的意大利天文学家、物理学家和启蒙运动者伽利略定名的,它的原意是“联想到圆”的曲线,道出了摆线的原始来源.其次,根据摆线的特殊性质——等时性,荷兰学者克里斯坦·惠更斯(Huygens,1629—1695)创造了摆线摆,把摆的性质用到了时钟上,把有关圆的曲线称为钟摆,将两者结合起来的曲线称为摆线,更能反映摆线的本质特性,故此曲线定名为摆线更科学.现在世界上大多数国家都采用这个名称,仅古代法国学者,把所有和圆沿直线滚动有关的曲线都叫旋轮线,这样的名称没有揭示曲线的本质.我国的有关教材早已放弃先前采用旋轮线的名称而一律改称摆线,旋轮线的名称已淡出我们的视线.

本书主要介绍摆线的基本知识.摆线的许多重要性质及非常有用的计算公式,都需要应用微积分学的计算方法和技巧,有的甚至要用到变分法的知识和方法才能够严格的论证出有关结论.为了使读者坚信我们得出的每个结论的正确性,对所有的公式、定理我们都一一做了严格的推证,对于具备微积分知识的读者来说,可以把公式、定理的推证当作有趣的练习,共同享受数学高度严密之美.证明是数学的灵魂,最合情的推理,最后还得过证明关.对于不具备微积分知识的读者,可暂时不看这些过程,而着重系统地记忆这些重要结论,待学习有关知识后再来消化被略去的过程.

摆线之所以受到人们的青睐,不仅仅因为它是数学上一种重要的曲线,而且还因为它有一个庞大的家族体系,内容实在太丰富,故历史上很多著名学者、数学家都对它进行了长期的研究,得到很多重要的成果.而且随着科学技术的进步,摆线在生产实践中的应用越来越广泛.例如,摆线针轮行星减速器的诞生,现已日益广泛地应用到国防、航天、矿山、冶金、化工、纺织等许多工业部门的设备中,以及新型的旋转式发动机的零件等.所以,熟悉摆线的基本知识及其性质对于广大科技工作者来说是非常必要的.

本书主要是供高中高年级、大学低年级学生作为课外读物,帮助他们通过阅读建立恰当坐标系导出轨迹方程,然后利用微积分学的知识推导出轨迹曲线的各种性质,这是一种研究问题的基本方法,但像本书这样系统地全面地运用解析几何、微积分知识对一种曲线做网络式的阐述尚不多见.1956 年,中国青年出版

社出版过一本由别尔曼著的《摆线》(高徹等译),他对摆线做了详细的定性分析,介绍了摆线丰富多彩的性质及应用,但没有做定量分析,本书则对摆线做定量分析研究,也是对别氏著作的一个补充.

我们出这本书的目的是为数学爱好者和有关学生提供运用解析几何、微积分知识的方法思想来研究曲线的一个模型,在此基础上应用这种方法去研究其他的新的轨迹曲线,探索新的问题,把数学应用到更广泛的领域中去.

本书的出版感谢刘培杰和张永芹两位老师的热情支持,同时感谢关虹玲老师的具体细致的指导.

由于本人数学素养不高,书中疏漏错误之处敬请同行及专家批评指正.

张家瑞　李兴春

目录

第1章 摆线

§1 摆线的基本概念

一、做一个实验

我们做一个这样的实验，把自行车的后支撑架起来，让后轮悬空，把浓度比较大的泥浆放在车轮的下面并和车轮接触，然后让一个人骑上车且踏动脚踏板，使后轮飞速旋转. 如果猛一刹车，这时我们能清楚地看到粘贴在车轮上的泥浆从车轮边缘不同位置上沿着切线方向飞出去，此时挡泥板起到绝对保险作用，使骑在车上的人不会沾一点泥浆(图1).

图1

可奇怪的是当我们骑自行车高速行驶在含有泥浆的马路上(假设是沿直线行驶),如果猛一刹车,有时就会在脊背上留下许多泥浆点.

仔细分析一下,这里虽然是同一辆自行车,但是粘在车轮上的泥浆,却做着不同的运动.第一种情况,粘在车轮上的泥浆只是跟着车轮做圆周运动,当猛一刹车时,由于惯性作用,泥浆就沿着圆周的切线方向飞出去了.

而第二种情况,粘在车轮某一点上的泥浆不仅要跟着车轮做圆周运动,而且还和自行车一道向前做直线运动.如果在理想的情况下,这个泥浆点在空间画出的轨迹就是我们这本书所要介绍的摆线,而当我们猛一刹车时,这个泥浆点就不会沿着车轮的切线方向飞出去,而是沿着上面所说的摆线的切线方向飞出去(图2).

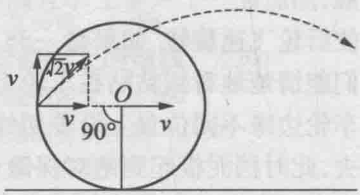


图2　从车轮上跳出的泥浆点所经的路径

在骑自行车的过程中,泥浆点运动的轨迹不像车轮那样直观地让我们看见,所以当泥浆点沿摆线的切线方向飞出时,我们就会感到意外.

从这里我们可以看到摆线在我们的日常生活中还是经常出现的,但是由于它不像圆那样是被人们所熟知的图形,且对它的性质了解得很少,所以对摆线有陌生之感也不足为奇.实际上,摆线的用途相当的广泛,

且摆线的直观形体也出现在各种机器上和设备中,因此我们熟悉它研究它将是理所当然的. 只需具备解析几何基础知识和微积分初步知识,掌握它的性质是不难办到的.

二、摆线的定义及有关概念

什么样的曲线叫作摆线呢?

摆线的定义 在平面上,一个动圆沿着一条定直线做无滑动的滚动时,动圆圆周上一定点的运动轨迹叫作摆线.

我们把动圆称为母圆,定直线称为基线. 根据摆线定义,容易画出摆线(图3).

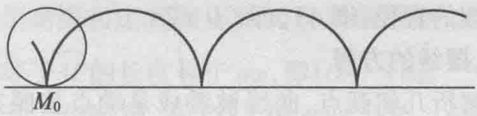


图3 摆线的一般形状

从图3可看出,只要动圆向着一个方向沿直线不停地滚动,那么这个摆线就可以继续画下去,所以摆线是一条无限的曲线.

但是当圆周上定点 M_0 与基线相交,当圆周滚动一周时,点 M_0 又落在基线上,所以摆线是由无限多个首尾相连的拱形弧组成的曲线.

由于这些拱形弧是重复出现的,也就是说摆线具有周期性(摆线的周期性有严格的论证,见后文),所以我们只要研究一个拱形弧的性质就能推及一般了.

摆线的一个拱形弧构成的基本要素(图4):

(1)歧点. 一个拱形弧的两个端点(也就是摆线与基线的交点 $A,B,\cdots$)称歧点.

(2)底. 两个相邻的歧点中间的线段称摆线的底,

显然,底的长就等于母圆的周长,即$|AB|=2\pi a$(a为母圆的半径).

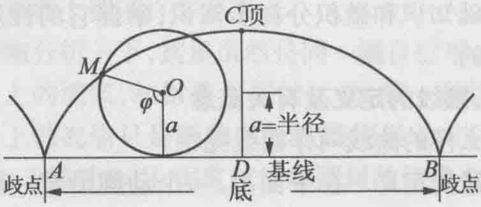


图4

(3)顶点.拱形弧的中间的一点C,也就是拱形弧的最高点,称此点为摆线的顶点.易知顶点到底的距离等于母圆的直径(图4),即$CD=2a$.

三、摆线的方程

按解析几何观点,曲线被看成是动点按照某种规律运动所产生的动点轨迹.由于动点按照不同的规律运动,因此就产生了各种各样的曲线.数学的任务就是要找出表示曲线的方程.因此我们推导摆线的方程对我们掌握摆线的运动规律,研究摆线的性质是非常重要的.

众所周知,由于我们把摆线放在不同的坐标系中,或者是在同一坐标系中放在不同的位置,从而得到的方程也不会相同.我们应取最简便的位置以简化计算过程,为此选用如下笛卡儿直角坐标系,并且是这样来建立坐标系的:取x轴与基线重合,开始的歧点为坐标原点O,过原点O并与x垂直的直线为y轴(图5).

把摆线放置在这样的坐标系中,我们称为标准位置,这样推导出来的方程称为摆线的标准方程.下面我们来推导它的方程.

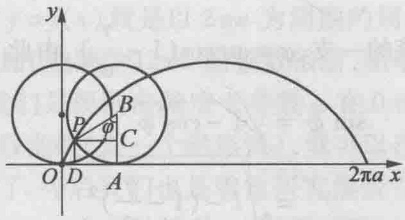


图5

记动圆半径为 a，设 $P(x,y)$ 为摆线上任一点，它是相当于滚动圆圆心在点 B，与定直线（x 轴）相切于点 A 时，动圆上定点的位置. 以 $\angle PBA=\varphi$（弧度），φ 为参数，作 $PC\perp AB$，$PD\perp Ox$，C，D 分别为垂足. 那么

$$x=OD=OA-DA=OA-PC$$

由于动圆在定直线上做无滑动的滚动，所以，OA 的长度等于 $\overset{\frown}{AP}$ 的长度等于 $a\varphi$，即 $|OA|=a\varphi$.

在 Rt$\triangle PBC$ 中，有 $PC=BP\sin\angle PBC=a\sin\varphi$. 因此

$$x=a\varphi-a\sin\varphi$$
$$y=DP=AC=AB-CB=a-a\cos\varphi$$

所以

$$\begin{cases}x=a(\varphi-\sin\varphi)\\ y=a(1-\cos\varphi)\end{cases}\quad(-\infty<\varphi<+\infty)\qquad(1)$$

式(1)就是摆线的参数方程. 参数 φ 称为摆线上点 P 的滚动角，当滚动圆向 x 轴负方面滚动时，相应的 φ 取负值.

如果从参数方程(1)中消去参数 φ，那么可以得到摆线的直角坐标方程.

由 $y=a(1-\cos\varphi)$，解得

$$\varphi=\pm\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)+2n\pi\quad(n\in\mathbf{Z})$$

取单值的一支，$\varphi=\arccos(1-\frac{y}{a})$，由此

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \sqrt{1-\cos^2\varphi}\\ &= \sqrt{1-(1-\frac{y}{a})^2}\\ &= \sqrt{\frac{2y}{a}-\frac{y^2}{a^2}}\\ &= \frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2}\end{aligned}$$

代入 $x=a(\varphi-\sin\varphi)$ 中便得到摆线在 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 内一段的普通方程为

$$x = a\cdot\arccos(1-\frac{y}{a})-\sqrt{2ay-y^2} \quad (2)$$

这就是摆线的直角坐标方程，在这个方程中，出现了反三角函数，不便于对它进行讨论和作图，下面我们直接根据摆线的参数方程来研究摆线的性质. 今后我们讲摆线的方程就是指摆线的标准参数方程(1).

四、摆线的基本性质

1. 周期性

从摆线方程

$$\begin{cases}x=a(\varphi-\sin\varphi)\\ y=a(1-\cos\varphi)\end{cases} \quad (-\infty<\varphi<+\infty)$$

可以看到当 φ 增加(或减少)2π 的整数倍时，摆线上对应点的横坐标 x 就增加(或减少)$2\pi a$ 的整数倍，而纵坐标 y 的值并不改变，也就是说曲线上横坐标 x 相差 $2\pi a$ 的整数倍的点，纵坐标 y 都相等. 如果把曲线上点的纵坐标 y 看作点的横坐标 x 的函数 $f(x)$，那么

这一函数 $y=f(x)$ 就是以 $2\pi a$ 为周期的周期函数. 因每当 x 增加(或减少) $2\pi a$ 的整数倍后,图形将重复出现,所以我们只要画出相应于参数 φ 在 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 间取值的一段曲线(即一个拱形弧),就可以作出整个摆线的图形了. 今后我们也是着重研究摆线在一个拱形弧内(即 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$)的情况. 由特殊反映一般,由特殊认一般这是数学中常用的辩证法.

2. 对称性

在 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 内摆线的一个拱形弧关于直线 $x=\pi a$ 对称(图 6).

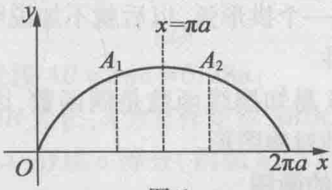


图 6

下面我们来证明这个结论. 事实上,如果 A_1 为曲线上任一点,它所对应的参数值为 φ_1,那么 A_1 的坐标为

$$\begin{cases}x_1=a(\varphi_1-\sin\varphi_1)\\ y_1=a(1-\cos\varphi_1)\end{cases}$$

又设 A_2 为对应于参数 $\varphi_2=2\pi-\varphi_1$ 的点,那么点 A_2 的坐标为

$$\begin{aligned}x_2&=a(\varphi_2-\sin\varphi_2)\\&=a[2\pi-\varphi_1-\sin(2\pi-\varphi_1)]\\&=2\pi a-a(\varphi_1-\sin\varphi_1)\\&=2\pi a-x_1\\y_2&=a(1-\cos\varphi_2)\\&=a[1-\cos(2\pi-\varphi_1)]\\&=a(1-\cos\varphi_1)\end{aligned}$$

$=y_1$

由 $y_2=y_1$ 可知 A_1,A_2 的纵坐标相等，所以线段 A_1A_2 与直线 $x=\pi a$ 垂直. 另一方面，由 $x_2=2\pi a-x_1$ 知，$\frac{x_1+x_2}{2}=\pi a$，这表示线段 A_1A_2 的中点在直线 $x=\pi a$ 上，因而直线 $x=\pi a$ 垂直平分线段 A_1A_2，这就表明 A_1,A_2 是关于直线 $x=\pi a$ 为对称的两点. 由于点 A_1 是任意选取的，所以也就证明了摆线上任一点关于直线 $x=\pi a$ 为对称的点也在摆线上，所以摆线的第一个拱形弧关于直线 $x=\pi a$ 对称（当然这里的摆线指的是 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 的一个拱形弧，以后就不加说明了）.

3. 奇偶性

根据图 5 易知摆线函数是偶函数，因为它的图像关于 y 轴成轴对称图形.

五、摆线的画图

1. 教具画图

根据摆线的定义，我们做如图 7 所示的教具.

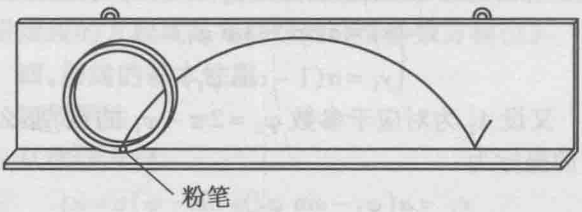


图 7　教具

它是由一块可以竖直挂起来的黑板，下边钉一条水平的边板，沿着这条边板滚动着一个厚实的铁环（木环，塑料环也行）. 铁环上有一个小孔，这里可以插进一小段粉笔，当铁环沿边板滚动的时候，粉笔就画出一条摆线. 用类似的方法我们可以创造出各式各样画

摆线的工具.

2. 摆线的几何画法

已知母圆 C 的半径为 a，试用几何法画出以圆 C 为动圆的摆线的一个拱形弧.

画法(图 8)：

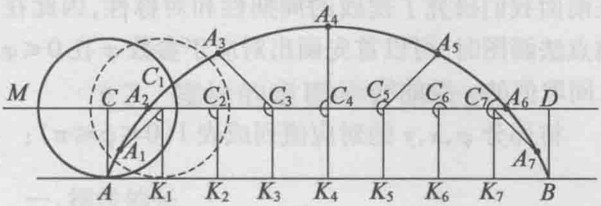


图 8

(1)作线段 $AB=2\pi a\approx 6.28a$；

(2)以 AB 为长，a 为宽作矩形 $ABDC$；

(3)把 CD 分成 n 等分(例如 $n=8$)，分点为

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$$

(4)以各分点 C_i 为顶点，以 270°线为始边，顺时针方向分别作角 $C_i=\dfrac{360^\circ}{n}\times i(i=1,2,\cdots,n-1)$. 例如，当 $n=8$ 时，角 $C_1=45^\circ$，$C_2=90^\circ$，$C_3=135^\circ$，$C_4=180^\circ$，$C_5=225^\circ$，$C_6=270^\circ$，$C_7=315^\circ$.

(5)分别以 C_i 为圆心，以 a 为半径，画弧交(4)所作角的终边于点 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$.

(6)按趋势，用平滑的曲线顺次联结 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}B$. 得到以 a 为半径的母圆沿基线 AB 做无滑动的滚动，其圆周上一点的轨迹为摆线的一个拱形弧.

从画图的过程看出 n 越大，即把 CD 分的越细，则画出的图形越精密.