



工程力学实验

李皓玉 齐月芹 徐步青 编
冯文杰 主审



科学出版社

工程力学实验

编 李皓玉 齐月芹 徐步青
主审 冯文杰

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是根据工程力学实验课程的基本要求,结合编者多年的力学理论和实验教学的实践编写而成的,旨在为工程力学实验教学提供指导。

本书的主要内容包括:误差分析和数据处理,金属材料的力学性能测试及常用的材料试验机,电测技术的原理、方法及测试设备,光测技术的原理、方法及相似理论,工程力学基本实验、综合设计型实验和提高型实验。本书在编写和内容选取上力求切合高等院校工科专业的实际教学要求,并注意反映近年来工程力学实验领域的新技术、新设备和发展趋势。

本书可作为高等院校工科专业工程力学的实验教材(适用于独立设课和非独立设课),还可作为从事工程设计、施工和检测工作的工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学实验 / 李皓玉, 齐月芹, 徐步青编. —北京: 科学出版社, 2015
ISBN 978-7-03-045333-4

I. ①工… II. ①李… ②齐… ③徐… III. ①工程力学—实验
IV. ①TB12-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 186574 号

责任编辑: 滕亚帆 乔丽维 / 责任校对: 胡小洁

责任印制: 赵 博 / 封面设计: 华路天然工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

文林印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 8 月第 一 版 开本: 720×1 000 1/16

2015 年 8 月第一次印刷 印张: 13 3/4

字数: 280 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

工程力学课程是高等院校很多工科专业的重要基础课,工程力学实验则是该课程的重要组成部分,且与工程实践联系紧密,实用性强,在工程中有着理论分析与数值计算无法代替的作用。通过工程力学实验教学,使学生学习、掌握工程力学实验的基本知识、基本技能和基本方法,培养系统的科学习惯和顽强追求科学真理的意志品质,对于培养学习者的创新能力、实践动手能力和科学素质具有重要的意义。

石家庄铁道大学自1992年开始试点改革工程力学实验教学,将工程力学的实验从理论课中分离出来,开设工程力学实验课程,自编了《工程力学实验技术》讲义。在改革过程中形成了独特的实验教学体系,开发了一批实验项目。本书在自编讲义的基础上编写而成,并收录了石家庄铁道大学工程力学实验课程的改革和建设成果,内容极其丰富。本书强调学生对各类实验内在的力学概念、原理及意义的理解和掌握,注重让学生明确现有的各种力学实验方法的特点和与工程实际的联系。

本书共11章。第1章为绪论,介绍课程的内容和任务,阐述工程力学实验在人才培养中的重要地位;第2章为介绍数值修约规则、误差分析和数据处理;第3章和第4章为金属材料的力学性能测试,介绍金属材料力学性能试验的国家标准、材料试验机的结构原理和操作步骤;第5~7章为应变电测技术,介绍电阻应变计的工作原理和基本特性、测量电桥原理及应用、电阻应变仪及电阻应变计式传感器;第8~10章为光测技术,介绍光弹性法和云纹法的原理及应用、模型相似理论。第11章为工程力学实验项目,包括基本实验、综合设计型实验和提高型实验。每个实验项目都给出了实验目的、实验原理和实验步骤,实验后的思考题可促进学生对实验现象和结果深入思考和进一步探索,培养其创新能力。本书的适用面宽,既可作为高等院校工科专业工程力学的实验教材(适用于独立设课和非独立设课),又可作为从事工程设计、施工和检测工作的工程技术人员的参考用书。

本书由李皓玉、齐月芹和徐步青共同编写,其中李皓玉编写第1、2、5、6章;齐月芹编写第3、4章;徐步青编写第8~10章;第7章由李皓玉和徐步青共同编写;第11章由李皓玉、齐月芹和徐步青共同编写。

石家庄铁道大学的冯文杰教授审阅了此书,并提出了许多宝贵的意见和建议,使本书得以完善和增色,在此表示衷心的感谢。

限于编者的学识水平,书中难免有不足之处,希望广大读者和同行不吝赐教。

编 者

2015年7月

目 录

第 1 章	绪论	1
1.1	工程力学实验的基本任务	1
1.2	实验的基本步骤和要求	2
1.3	实验的技术标准	3
第 2 章	误差分析和数据处理	5
2.1	基本概念	5
2.2	随机误差的统计分析方法	8
2.3	数值修约及有效数字运算法则	11
2.4	实验数据的表示方法	13
	习题	16
第 3 章	金属材料的力学性能试验	17
3.1	金属材料拉伸试验	17
3.2	弹性模量和泊松比的测定	25
3.3	金属材料压缩试验	28
3.4	金属材料扭转试验	32
3.5	金属材料冲击试验	36
3.6	金属材料疲劳试验	38
	习题	42
第 4 章	材料试验机原理及结构	43
4.1	液压式万能材料试验机	43
4.2	电子万能材料试验机	48
4.3	电子扭转试验机	57
4.4	冲击试验机	63
4.5	疲劳试验机	65
第 5 章	电阻应变计	70
5.1	应变及其测定	70
5.2	电阻应变计的工作原理及构造	73
5.3	电阻应变计的分类	75
5.4	电阻应变计的工作特性	78

5.5 电阻应变计的粘贴和防护	84
习题	88
第 6 章 测量电路原理及电测技术	89
6.1 测量电路	89
6.2 电桥的基本特性与常用的组桥方式	91
6.3 静态应变测量	98
6.4 动态电阻应变测量	105
习题	110
第 7 章 应变测量仪器与设备	114
7.1 电阻应变仪概述	114
7.2 静态电阻应变仪	114
7.3 动态电阻应变仪	120
7.4 电阻应变计式传感器	123
第 8 章 光弹性法	129
8.1 光学基础知识	129
8.2 平面应力-光性定律	133
8.3 平面偏振光场中的光弹性效应分析	134
8.4 圆偏振光场中的光弹性效应分析	137
8.5 等差线条纹级数的确定	140
8.6 等倾线观测	143
8.7 平面光弹性应力计算	145
习题	150
第 9 章 云纹法	152
9.1 概述	152
9.2 云纹法应变测量基本原理	153
9.3 测量离面位移——投影云纹法	161
习题	162
第 10 章 模型相似理论	163
10.1 相似理论	163
10.2 方程分析法求相似判据	168
10.3 量纲分析法确定相似判据	170
习题	172

第 11 章 工程力学实验项目	174
11.1 金属材料的拉伸试验	174
11.2 金属材料的压缩试验	177
11.3 金属材料的扭转试验	179
11.4 金属材料剪切模量的测定	182
11.5 金属材料的冲击试验	184
11.6 金属材料弹性模量和泊松比的测定	186
11.7 偏心拉伸实验	189
11.8 梁的纯弯曲正应力实验	191
11.9 叠合梁应力分布规律测定	194
11.10 薄壁圆筒的弯扭组合变形应力测定	198
11.11 薄壁试件拉伸实验	203
11.12 等差线条纹图绘制	205
11.13 等倾线条纹图绘制	207
11.14 光弹性材料条纹值的测定	210
参考文献	212

第1章 绪 论

1.1 工程力学实验的基本任务

工程力学实验是力学的一个重要分支，它以实验手段来研究力学问题，为工程技术服务，并在服务中发展自身的理论和应用研究。实验测试、理论分析和数值计算相互补充，各司其职，形成了解决力学问题的完整体系。随着自然科学的不断发展、新兴学科的不断出现，力学实验在吸收、应用相关学科最新成果的过程中蓬勃发展。新的实验技术、仪器设备不断出现，各种类型的传感器及测量、记录和分析仪器日新月异，工程力学实验的基本原理与基本方法几乎应用于包括土木工程、机械工程、航空航天、交通运输、水利水电、石油化工、地质勘探等工程领域。

工程力学实验课程侧重于工程中最基本和最常用的实验技术和实验方法。在教学过程中，让学生通过实际操作，观察判断实验现象，分析总结实验结果，验证工程力学课程中阐述的相关知识，掌握测定材料力学性能、构件应变和应力的基本原理和常见设备的操作方法。力求通过学习和训练，培养学生综合利用力学知识分析问题的能力，锻炼学生实践动手能力、观察分析解决问题的能力，训练学生的创新思维和主动获取知识的能力。本课程的基本任务包括以下三个方面。

1. 测定材料的力学性能

构件在拉压、扭转、剪切、弯曲、冲击、疲劳等各种负荷条件下，会由于过量变形、尺寸改变、表面损伤或断裂而失效。为避免各种失效现象的发生，必须通过试验测定材料在不同负荷条件下的力学性能，并规定具体的力学性能指标，以便为构件的选材和预防失效提供可靠的依据。材料的主要力学性能指标有屈服强度、抗拉强度、抗压强度、弹性模量、泊松比、断后伸长率、断面收缩率、冲击吸收能量、疲劳强度等。

2. 孕育和验证理论

很多理论公式都是以实验观察为引线，再以科学假设为基础推导出来的，但是这些假设和结论是否正确，理论公式能否应用于实际之中，必须通过实验来验证。著名的梁弯曲理论的建立就是一个典型例子。

3. 实测构件的力学行为

工程实际中,经常会遇到一些构件的形状和载荷十分复杂的情况,其理论模型难以建立,无法求解诸如应变、应力、位移、振动模态等参数,这时用工程力学实验技术实际测定常常是一种行之有效的解决途径。

对于已经投入运行的工程结构,如核反应堆、高层建筑、大型桥梁等,为了确保安全,需要对这些结构的动力学响应、动态的应变和位移进行实时监测,这些实时测试技术都是以工程力学实验为基础的。

1.2 实验的基本步骤和要求

实验教学的显著特点是实践性强,要接触较多的测试仪器和设备,实验过程一般需要数人相互配合,共同完成。为使实验能够顺利进行,同时保证实验设备及实验人员的人身安全,现将实验的基本步骤和要求明确如下。

1. 实验准备

(1)认真做好实验前的预习工作,阅读实验指导书,复习有关的理论知识,明确实验的目的、原理和实验步骤等。

(2)对实验中使用的仪器、设备和实验装置等,要初步了解其工作原理、使用方法和操作注意事项。

(3)对于需要小组完成的实验,课前应编好实验小组,小组成员需分工明确,相互配合,协调操作。实验小组人数不宜过多,以保证每个人均有事做、有所收获。

(4)了解实验所需记录的数据项目及数据处理的原理和方法,设计好数据记录表格。

2. 实验操作

(1)认真学习实验室的规章制度,服从实验指导教师安排。进入实验室后,要注意保持室内的整洁、安静,未经允许,不得随意动用室内的仪器和设备。

(2)操作仪器、设备之前,应注意检查仪器、设备的运行是否正常;必要的工具、量具、材料、器件是否齐全,摆放位置是否恰当。

(3)实验过程中,严格按仪器、设备的操作规程进行操作,认真观察实验现象,记录实验数据,要随时分析判断实验过程是否正常,发现不正常情况及时请教指导教师或中止实验。

(4)实验结束前,应将全部数据交指导教师审阅,经教师同意后结束实验;实验结束后,应将仪器、设备复原,关闭电源,清理实验现场。

3. 实验报告

实验报告是反映实验工作及实验结果的书面综合资料,通过实验报告的书写,能培养学生准确有效地用文字来表达实验结果的能力。书写实验报告需做到字迹工整,图表清晰,结论简明。一份完整的实验报告,应由以下内容组成。

(1) 实验名称,实验日期,环境条件(温度、湿度等),实验小组成员名单。

(2) 实验目的和要求,实验原理和装置,通常要画出装置简图。

(3) 实验仪器和设备的名称、规格、型号及精度。

(4) 实验数据及其处理,要求列出计算公式和分析过程。

(5) 实验结果和结论。通常可用表格或曲线表示实验结果,实验结论应简单、明确,符合科学习惯,要与实验的目的、要求相呼应。

(6) 分析与讨论。对实验所得结果进行分析,指明实验结果能说明什么问题,有何优缺点,分析实验中出现的問題,并对结果进行误差分析,回答指定的问题。同时对实验中有关技术问题进行讨论,也可以写下心得体会或提出对实验的改进建议。

1.3 实验的技术标准

材料的力学性能、构件的力学行为等参数的测定受到实验对象、实验设备、实验条件、实验技术和方法等诸多因素的影响。为了使实验结果具有可比性及技术交流和贸易,需要制定统一的实验标准,并在实验时遵照执行。

实验标准通常由标准化组织制定,根据标准组织的级别和标准的执行范围,可把标准分为不同层次。我国的标准分为行业标准(如交通行业标准,代号 JT)和国家标准(代号 GB)。在国际上,分国家标准和国际标准(代号 ISO),ISO 标准层次最高,接受的国家最多。近年来,我国在制定和修订标准时,尽可能向国际标准靠拢。需要指出的是,一些发达国家的实验标准通常种类齐全,方法先进,在某些方面具有权威性,如美国的 ASTM 标准。图 1-1 列出了国际上有重要影响的几个标准,并示出了各标准之间的层次关系。

《工程力学实验》参考的部分国家标准如下:

《金属粘贴式电阻应变计》(GB/T 13992—2010);

《金属材料拉伸试验第 1 部分:室温试验方法》(GB/T 228.1—2010);

《金属材料室温压缩试验方法》(GB/T 7314—2005);

《金属材料室温扭转试验方法》(GB/T 10128—2007);

《金属材料弹性模量和泊松比试验方法》(GB/T 22315—2008);

《数值修约规则与极限数值的表示和判定》(GB/T 8170—2008);

《金属材料夏比摆锤冲击试验方法》(GB/T 229—2007);

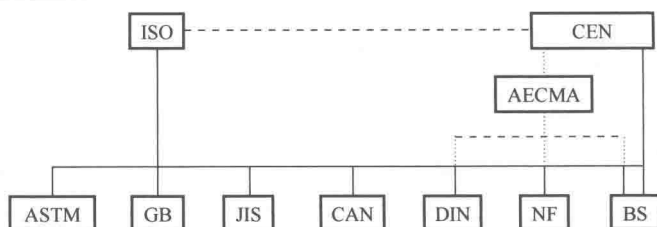


图 1-1 标准及其层次关系

ISO—国际标准化组织标准；CEN—欧洲标准化委员会标准；
AECMA—航天设备制造商协会标准；ASTM—美国材料与试验协会标准；
GB—中国国家标准；JIS—日本工业标准；CAN—加拿大国家标准；
DIN—德国国家标准；NF—法国国家标准；BS—英国国家标准

《金属材料轴向等幅低循环疲劳试验方法》（GB/T 15248—2008）；
《金属材料疲劳试验轴向力控制方法》（GB/T 3075—2008）；
《金属材料疲劳试验轴向应变控制方法》（GB/T 26077—2010）；
《金属材料疲劳试验旋转弯曲方法》（GB/T 4337—2008）。

第2章 误差分析和数据处理

2.1 基本概念

2.1.1 真值

被测物理量的实际值称为真值。真值是根据统一制定的标准定义的，这种标准是以长期不变的基准事物和标准器具的数值定义的，如规定光在真空中 $1/299792458\text{s}$ 的时间内所通过的距离为 1m 。有时真值可以用被测物理量的理论值和定义值表达，如三角形的内角和是 180° 。

真值是无法测得的。在实验中，当测量的次数很多（可以认为趋于无限）时，根据“无限多次测量中正负误差出现概率相等”这一原则，认为多次测量时正负误差自动抵消，再经过严格地消除系统误差，将测量值加以平均，即可获得近似真值。

为了使测量值有统一的比较基准，由国家对各种物理量设立长期稳定不变的基准实物和标准器具，规定以其数值作为参考标准。测量工作是广泛、大量的，因此不可能让所有的测量仪器或量具直接与国家标准进行比较，实际上是通过国家建立的多级计量检定网按照逐级计量传递关系对比。通常某一级仪器以比它高一级的标准仪器为比较基准，并且将基准量值当成真值，称为相对真值。

2.1.2 误差及其分类

1. 误差

测量得到的数值与真值之间总是存在差异的，这种差异称为误差。误差的大小，可用绝对误差和相对误差来描述。

测量值 x 与真值 x_0 之差称为绝对误差 Δ ，即

$$\Delta = x - x_0 \quad (2-1)$$

绝对误差反映的是测量值对真值的偏差大小，不能反映测量的可信程度。工程上常采用相对误差 δ ，即绝对误差与真值之比，并以百分数表示为

$$\delta = \frac{\Delta}{x_0} \times 100\% = \frac{x - x_0}{x_0} \times 100\% \quad (2-2)$$

2. 误差的分类

测量误差按其性质和来源可分为三类：系统误差、随机误差和过失误差。

1) 系统误差

系统误差是指测量过程中一些确定性因素引起的误差，主要包括以下几方面。

(1) 方法误差：由于测量方法的设计不能完全符合所依据的理论、原理或由于理论本身不够完善所导致的误差。

(2) 仪器误差：由于测量仪器、测试设备的调试和校准等没做好产生的误差。

(3) 安装误差：由于测量系统布置(布局)不合理、安装不正确及调整不当等造成的误差。

(4) 环境误差：由于温度、湿度、振动、电磁场等因素干扰引起的误差。

(5) 人身误差：由于测量人员的生理特点、心理状态及个人习惯等引起的误差。

系统误差通常有一定的偏向和规律性，即在同一条件下进行多次测量时，误差的绝对值和符号均保持不变，或条件改变时，按某一规律变化，找到产生误差的原因就有可能采取措施加以消除或降低。例如，在拉伸试件对称的两侧安装引伸计或粘贴应变计，取平均值作为变形值就可以消除偏心加载引起的误差；再如，增量法可以消除初始读数或调零不准造成的误差；此外，为保证仪器和设备的测量精度，应按规定定期请计量部门对仪器和设备进行校准。

2) 随机误差

随机误差也称偶然误差，是指测量过程中由随机因素所造成的误差。在相同条件下多次测量同一物理量，即使将系统误差控制到极其微小的程度以至于可以忽略不计，所测得的数据仍然不完全一致，误差的绝对值和符号变化没有确定的规律，这就是随机误差。通常所说的实验误差，或者说合理的误差主要是指这种误差。

随机误差是由不明原因(尚未认识的原因)引起的，难以控制和不可避免。但实践表明，通过改进测量仪器、完善测量方法及提高测量技能等措施可以在一定程度上降低和减少随机误差。

实际上，随机误差并非完全没有规律性，只不过其规律是统计性的。如果用同一测量系统在相同条件下对同一物理量进行大量次数测量，可以发现测量结果的随机误差呈正态分布。随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值会逐渐趋近于零。因此，假如没有系统误差的存在，随着测量次数的增加，所得测量数据的算术平均值将趋近于真值。

3) 过失误差

过失误差是由于操作人员的粗心大意，不按操作规程办事等技术性事故造成的误差，如读错仪表刻度、记录和计算错误等。过失误差一般数值较大，并且常与事

实明显不符。出现这种误差,要认真查找原因,采取相应措施,剔除有关数据或重做实验。

2.1.3 测量数据的精度

工程力学实验中所测得的数据都是近似数,因为无论测量力值大小的砝码和试验机,还是测量尺寸、位移和应变的量具和应变计等,都不是绝对精确的,其本身的精度是有限的。所谓精度,实际指的是不精确度和不准确度,具体包括以下三方面的含义。

(1)精密度:精密度是对测量数据集中程度的度量,指多次测量所得数据的重复程度。影响精密度的主要因素是随机误差,随机误差越小,测量的精密度越高,也就是测试数据比较集中,分散性小,重复性好。

(2)准确度:准确度是对测试结果正确性的度量,指多次测量数据的平均值与真值接近的程度。影响准确度的主要因素是系统误差,系统误差越小,测量的准确度越高,也就是测试数据的平均值接近真值的程度越高。

(3)精确度:精确度是对测量数据集中程度和测量结果与真值接近程度的度量。精确度高说明测量数据比较集中,并且集中在真值周围,即精密度和准确度都较高,此种情况说明测试结果的随机误差和系统误差都较小。

精密度、准确度和精确度之间的关系可用打靶图来解释。图 2-1(a)表示精密度高,准确度低,即随机误差小,系统误差大;图 2-1(b)表示准确度高,精密度低,即系统误差小,随机误差大;图 2-1(c)表示精确度高,即精密度和准确度都高。

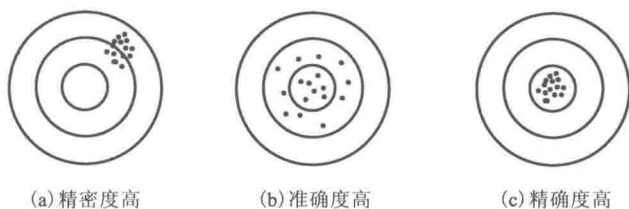


图 2-1 精度示意图

仪器和设备的精密度一般在检定书或说明书上注明,也可以取最小刻度的一半作为一次测量可能的最大误差,故常把每一最小刻度值作为其精密度。这里所指的实际上是其分辨能力,即灵敏度。

在设计实验时,应根据实验要求,选择有足够精度的仪器、设备或仪表,并选择合适的量程(最好使用满量程范围的 50%~80%),以最好地利用其精度。在实验中,正确地使用和操作实验仪器、设备或仪表以及正确地读数,才能得到尽可能高的精确度。

2.2 随机误差的统计分析方法

2.2.1 随机误差的分布规律

随机误差的出现虽然没有确定的规律,但统计研究表明,它通常呈正态分布(图 2-2),并具有以下规律。

- (1) 对称性: 绝对值相等的正、负误差出现的概率相同。
- (2) 单峰性: 绝对值小的误差出现的概率大,而绝对值大的误差出现的概率小。
- (3) 有界性: 绝对值很大的误差出现的概率趋近于零,也就是误差值不会超过某一界限。
- (4) 抵偿性: 当测量次数无限多时,误差的算术平均值趋于零。

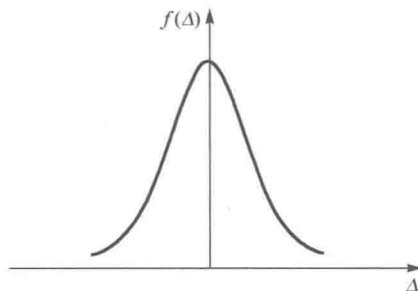


图 2-2 随机误差的概率分布

描述随机误差正态分布的数学表达式由高斯给出,即

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\Delta^2/2\sigma^2} \quad (2-3)$$

式中, Δ 为随机误差; σ 为随机误差的标准误差; f 为随机误差出现的概率密度。

2.2.2 算术平均值

平均值的计算有算术平均值、几何平均值、加权平均值等多种。采用的计算方法不同,所得的误差值不同,误差出现的概率亦不同。能使计算误差最小、出现概率最大的平均值称为最佳值。可以证明,对于一组精度相同的测量值,其算术平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2-4)$$

为最佳值。这是因为,若设每次测量的随机误差为

$$\Delta_i = x_i - x_0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (2-5)$$

则其算术平均值为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - x_0 = \bar{x} - x_0 \quad (2-6)$$

根据随机误差的抵偿性, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \rightarrow 0$, 故 $\bar{x} \rightarrow x_0$, 即算术平均值趋于真值。运用最小二乘原理还可以证明, 各测量值与算术平均值之差最小。因此, 算术平均值为最佳值。

2.2.3 标准误差

测量值的分散程度, 即测量值偏离算术平均值的大小分布用标准误差表示。有限次测量时, 标准误差的计算公式为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2-7)$$

标准误差不是具体的误差值, 它反映了在一定条件下等精度测量的每个测量值对其算术平均值的分散和偏离程度。 σ 值越小, 说明测量值对其算术平均值的分散度就越小, 测量的精度高, 反之则精度低。

可以证明, 当误差为正态分布时, 误差落在 $\pm\sigma$ 、 $\pm 2\sigma$ 和 $\pm 3\sigma$ 上的概率分别为 68.26%、95.44% 和 99.73%。也就是说, 在多次重复测量中, 误差超过 $\pm 3\sigma$ 的概率不会大于 0.3%。因此, 若个别数据的误差绝对值超过 3σ , 则应舍去。

2.2.4 误差传递与间接误差估计

在工程力学实验中, 有些物理量能够直接测量, 如时间、载荷、长度等, 有些是不能直接测量的, 如应力、材料常数等。对于这些不能直接测量的物理量, 需要根据直接测量结果通过理论公式和函数计算而间接获得。由于各直接测量值都含有误差, 所以由计算得到的间接量中也必然含有误差。这就需要我们了解误差传递规律, 掌握间接误差的计算方法。

设间接测量物理量 y 是 n 个独立的直接测量物理量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的函数, 即

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-8)$$

令 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ 为直接测量物理量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的误差, 则由泰勒展开, 并忽略高阶小量, 可得 y 的绝对误差为

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (2-9)$$

其相对误差为

$$\begin{aligned}\delta_y &= \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\Delta x_n}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{y} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta_{x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta_{x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta_{x_n} \right)\end{aligned}\tag{2-10}$$

式中， $\delta_{x_1} = \frac{\Delta x_1}{x_1}$ ， $\delta_{x_2} = \frac{\Delta x_2}{x_2}$ ， $\cdots$ ， $\delta_{x_n} = \frac{\Delta x_n}{x_n}$ 分别为直接测量物理量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的相对误差； $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 为误差传递系数。

例如，已知某间接测量物理量 N 与直接测量物理量 $a、b、c、d、e$ 的函数关系为 $N = \frac{a^m b^n c^p}{d^q e^r}$ ，根据式 (2-10) 得

$$\delta_N = \frac{\Delta N}{N} = m \frac{\Delta a}{a} + n \frac{\Delta b}{b} + p \frac{\Delta c}{c} - q \frac{\Delta d}{d} - r \frac{\Delta e}{e}$$

由于 $\Delta a、\Delta b、\Delta c、\Delta d、\Delta e$ 可正可负，在求最大相对误差时，取各误差的绝对值，即

$$\delta_N = m \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + n \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + p \left| \frac{\Delta c}{c} \right| + q \left| \frac{\Delta d}{d} \right| + r \left| \frac{\Delta e}{e} \right|$$

常用函数的误差传递公式如表 2-1 所示。

表 2-1 常用函数的误差传递公式

函数关系	最大绝对误差	最大相对误差
$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$	$\Delta y = \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n)$	$\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$
$y = x_1 x_2$	$\Delta y = \pm (x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1)$	$\delta_y = \pm \left \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \right $
$y = x_1 x_2 x_3$	$\Delta y = \pm (x_1 x_2 \Delta x_3 + x_1 x_3 \Delta x_2 + x_2 x_3 \Delta x_1)$	$\delta_y = \pm \left \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3} \right $
$y = x^n$	$\Delta y = \pm (n x^{n-1} \Delta x)$	$\delta_y = \pm \left(n \left \frac{\Delta x}{x} \right \right)$
$y = \sqrt[n]{x}$	$\Delta y = \pm \left(\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x \right)$	$\delta_y = \pm \left(\frac{1}{n} \left \frac{\Delta x}{x} \right \right)$
$y = x_1 / x_2$	$\Delta y = \pm \left(\frac{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}{x_2^2} \right)$	$\delta_y = \pm \left \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \right $
$y = cx$	$\Delta y = \pm c \Delta x $	$\delta_y = \pm \left \frac{\Delta x}{x} \right $
$y = \lg x$	$\Delta y = \pm \left \frac{0.4343 \Delta x}{x} \right $	$\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$
$y = \ln x$	$\Delta y = \pm \left \frac{\Delta x}{x} \right $	$\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$