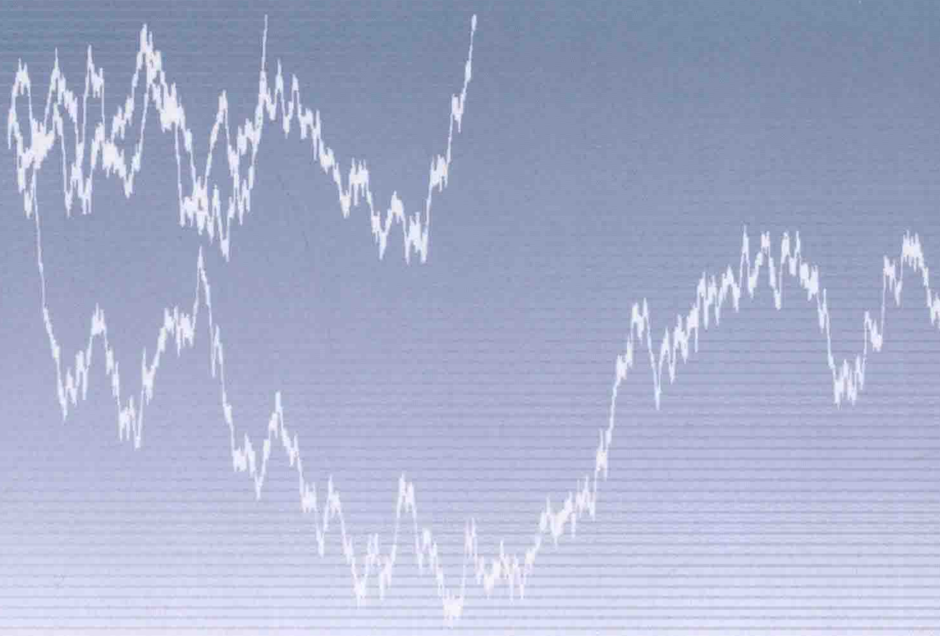
鞅与随机微分方程

王　力　编著
李龙锁　主审



科学出版社

鞅与随机微分方程

王　力　编著
李龙锁　主审

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书系统地介绍概率论、鞅和随机积分及随机微分方程的基本理论.内容包括:测度与积分,独立性,Radon-Nikodym 定理和条件数学期望等概率论的基础知识;停时、离散鞅和连续鞅的基本内容;鞅和连续局部半鞅随机积分的一般理论及 Itô 型随机微分方程的初步内容.阅读本书只需要读者具有初等概率论的知识,而不需要具备测度论的知识.

本书可作为高等院校数学专业硕士研究生“随机分析”类课程的入门教材,也可供理科、工科、财经、师范院校相关专业的硕士研究生、博士研究生和教师参考,还可供有志从事“随机分析”研究和应用的科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

鞅与随机微分方程/王力编著. —北京:科学出版社,2015.6
ISBN 978-7-03-044489-9

Ⅰ.①鞅… Ⅱ.①王… Ⅲ.①鞅②随机微分方程 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 116241 号

责任编辑:张中兴 周金权 / 责任校对:彭 涛
责任印制:徐晓晨 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 B5
2015 年 6 月第一次印刷 印张:21 1/2
字数:434 000

定价:69.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

近半个多世纪以来，随机微分方程、扩散过程及随机分析有了迅速发展，并广泛应用于金融系统、数量经济、控制系统、统计物理、系统生物学等各个方面. 有关这方面的专著虽然很多，但往往由于它们的篇幅巨大，论题过多，起点要求较高，需要读者花很长时间学习几门课程，才有可能弄清楚几部分知识之间的系统关系而付诸运用，而这对于仅两年或三年就要毕业的研究生来说是很难做到的.

为了教学的实际需要，作者吸收一些专著中关于鞅、随机微分方程及随机分析方面的基础知识、概念、典型方法和一般理论，加入作者自己的理解，整理写作成此书，以期能更便于读者理解掌握，为有兴趣学习随机微分方程及随机分析的初学者提供一本入门的教科书.

本书内容分为四个部分：概率论基础（第 1～3 章）；鞅（第 4 章和第 5 章）；随机积分（第 6 章）；Itô 型随机微分方程理论（第 7～9 章）.

感谢哈尔滨工业大学研究生教育教学改革研究项目（JCJS-201304）的资助使本书得以正式出版. 在本书的编写过程中，得到了王勇教授（博士生导师）的关怀与鼓励，在此谨致深深的谢意；同时也要感谢李龙锁教授（博士生导师）的帮助和支持.

由于作者的水平和经验有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大教师和读者批评指正.

王　力

2014 年于哈尔滨工业大学

主要符号对照表

Ω	一个抽象空间，即一个非空集合，必然事件
$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$	由 Ω 的某些子集构成的集类
$\mathscr{P}(\Omega)$	由 Ω 的子集全体构成的集类
$\mathscr{A}(\mathscr{C})$	集类 $\mathscr{C}$ 张成的代数
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$	集合序列 $\{A_n:n\geqslant1\}$ 的上极限或事件序列 $\{A_n:n\geqslant1\}$ 的上限事件
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$	集合序列 $\{A_n:n\geqslant1\}$ 的下极限或事件序列 $\{A_n:n\geqslant1\}$ 的下限事件
$\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$	将 $\mathscr{C}\cap A$ 看成 $\mathscr{P}(A)$ 的子集在 A 上生成的 σ 代数
$\mathbb{R}$	数直线 $(-\infty,+\infty)$
$\overline{\mathbb{R}}$	广义数直线 $[-\infty,+\infty]$
$\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 或 $\mathscr{B}$	数直线 $\mathbb{R}$ 上由开集全体生成的 σ 代数，即 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 代数
$\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$	广义数直线 $\overline{\mathbb{R}}$ 上由开集全体生成的 σ 代数
$\mathscr{B}_E$	拓扑空间 E 的开集全体生成的 σ 代数，即 E 上的 Borel 代数
$\mathscr{M}(\mathscr{C})$	包含集类 $\mathscr{C}$ 的最小单调类，即由 $\mathscr{C}$ 生成的单调类
$\lambda(\mathscr{C})$	包含集类 $\mathscr{C}$ 的最小 λ 类
$\varnothing$	不可能事件
$A\cup B$ 或 $\bigcup\limits_n A_n$	集合或事件 A,B 或序列 $\{A_n:n\geqslant1\}$ 的并
$A\cap B$ 或 $\bigcap\limits_n A_n$	集合或事件 A,B 或序列 $\{A_n:n\geqslant1\}$ 的交
A^c	集合 A 的补集或事件 A 的逆事件
$\prod\limits_{i=1}^n A_i$	集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的乘积集
$\Omega=\prod\limits_{i=1}^n\Omega_i$	空间 $\Omega_1,\cdots,\Omega_n$ 的乘积空间
$\mathscr{F}=\prod\limits_{i=1}^n\mathscr{F}_i$	σ 代数 $\mathscr{F}_i$ 的乘积 σ 代数，$i=1,2,\cdots,n$
$(\Omega,\mathscr{F})=\prod\limits_{i=1}^n(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$	可测空间 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$ 的乘积可测空间，$i=1,2,\cdots,n$
$\mathscr{F}=\prod\limits_{\alpha\in J}\mathscr{F}_\alpha$	σ 代数族 $\{\mathscr{F}_\alpha:\alpha\in J\}$ 的乘积 σ 代数
$(\Omega,\mathscr{F})=\prod\limits_{\alpha\in J}(\Omega_\alpha,\mathscr{F}_\alpha)$	可测空间族 $\{\Omega_\alpha:\alpha\in J\}$ 的乘积可测空间
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间，即数直线 $\mathbb{R}$ 的 n 重乘积空间
$\mathscr{B}^n$	$\mathbb{R}^n$ 中 Borel 点集全体

$f^{-1}(A_2)=\{\omega_1\in\Omega_1:f(\omega_1)\in A_2\}$	集合 A_2 的原像
$f^{-1}(\mathscr{A}_2)=\{f^{-1}(A_2):A_2\in\mathscr{A}_2\}$	集类 $\mathscr{A}_2$ 的原像
$f\in\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2,f\in\mathscr{F}_1$	f 为$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$到$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$的可测映射
$\sigma(f)=\sigma_{\Omega_1}(f)=f^{-1}(\mathscr{F}_2)$	由可测映射 f 生成的σ 代数
$f\circ g$	映射 f 和 g 的复合映射
I_A	集合 A 的示性函数
$(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}^n),(\mathbb{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty)$	可测空间$(\mathbb{R},\mathscr{B})$的有限、可列维乘积空间
$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$	测度空间
$(\Omega,\mathscr{F},P)$	概率空间
$(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mu})$	测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$的完备化扩张
$EX,E[\cdot],\int X\mathrm{d}P$	随机变量 X 的期望或数学期望
$\int_A X\mathrm{d}P$	随机变量 X 的不定积分
$\alpha_k=EX^k$	随机变量 X 的 k 阶原点矩
$\beta_k=E\|X\|^k$	随机变量 X 的 k 阶绝对原点矩
$\mu_k=E(X-EX)^k$	随机变量 X 的 k 阶中心矩
$\nu_k=E\|X-EX\|^k$	随机变量 X 的 k 阶绝对中心矩
$\mathrm{Var}X$	随机变量 X 的方差
EX	随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的数学期望
σ_{jk}	随机变量 X_j 与 X_k 的协方差
矩阵 $\Sigma=(\sigma_{jk})_{n\times n}$	随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的协方差矩阵
ρ_{jk}	随机变量 X_j 与 X_k 的相关系数
$X\sim Y,X=Y$ a.s.	$P(X\neq Y)=0$
$\operatorname{ess\,sup}\limits_{i\in I}X_i$ 或 $\operatorname{esup}\limits_{i\in I}X_i$	随机变量族$\{X_i:i\in I\}$的本性上确界
$\operatorname{ess\,inf}\limits_{i\in I}X_i$	随机变量族$\{X_i:i\in I\}$的本性下确界
$A\subset B$ a.s.	$A\backslash B$ 为可略集
$\mathscr{B}_{[0,1]}$	$[0,1]$上的 Borel 点集全体
$X_n\to X$ a.s.	随机变量序列$\{X_n;n\geqslant1\}$以概率 1 收敛于随机变量 X 或几乎必然收敛于随机变量 X,简称随机变量序列$\{X_n:n\geqslant1\}$a.s. 收敛于随机变量 X
$X_n\xrightarrow{P}X$ 或 $\operatorname{pr-}\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X$	随机变量序列$\{X_n:n\geqslant1\}$依概率收敛于随机变量 X
$\lim\limits_{n,m\to\infty}P(\|X_n-X_m\|>\varepsilon)=0,\forall\varepsilon>0$	随机变量序列$\{X_n:n\geqslant1\}$是依概率收敛意义下的一个 Cauchy 基本列
$F_n\xrightarrow{d}F$	函数列$\{F_n(x):n\geqslant1\}$弱收敛于函数 $F(x)$
$X_n\xrightarrow{d}X$	随机变量列$\{X_n:n\geqslant1\}$依分布收敛于随机变量 X
$X_n\xrightarrow{L_p}X$	随机变量序列$\{X_n:n\geqslant1\}$ p 阶平均收敛于随机变量 X

$\mathscr{B}^* = \bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_k:k\geqslant n)$	随机变量序列 $X=\{X_n:n\geqslant 1\}$ 的尾 σ 域或尾事件域
$P=P_1\times P_2$	概率测度 P_1 和 P_2 的乘积测度
$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P_1\times P_2)$	概率空间$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$和$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$的乘积概率空间
$(\mathbb{R}^{\mathbf{T}},\mathscr{B}^{\mathbf{T}},P)$	标准概率空间
μ^+,μ^- 及 $\lvert\mu\rvert\triangleq\mu^++\mu^-$	广义测度 μ 的为正变差、负变差和全变差
$\nu\ll\mu$	测度 ν 关于测度 μ 绝对连续
$\nu\equiv\mu$ 或 $\nu\sim\mu$	测度 μ,ν 相互等价
$\mu\perp\nu$	测度 μ,ν 相互奇异
$f=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}P}$ 及 $\nu=f\cdot P$	广义测度 ν 关于概率测度 P 的 Radon-Nikodym 导数
$P_B(A)\triangleq P(A\mid B)$	事件 A 在事件 B 发生条件下的条件概率
$E_B[X]=\int X(\omega)P_B(\mathrm{d}\omega)$	随机变量 $X(\omega)$关于概率测度 $P_B(\cdot)$的期望
$L_\infty(\mathscr{G})$	有界关于 σ 代数 $\mathscr{G}$ 可测随机变量全体
$E[X\mid\mathscr{G}]$	随机变量 X 关于 σ 代数 $\mathscr{G}$ 的条件期望
$E[X\mid V]$	随机变量 X 关于随机变量 V 的条件期望
$P(A\mid\mathscr{G})$	事件 A 关于 σ 代数 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数 $\mathscr{G}$ 的条件概率
$f_{12}(x_1\mid x_2)$	当随机变量 $X_2=x_2$ 时可积随机变量 X_1 的条件概率密度
$\mathbf{T}$	指标集或参数集，广义实数集$\overline{\mathbb{R}}$或它的某个子集
$\mathbf{F}=\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\},\mathbf{F},\{\mathscr{F}_t\}$ 或 $\mathscr{F}_t$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个 σ 域流
$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\},P),(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	域流空间
$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_{t\geqslant0}\mathscr{F}_t=\sigma(\bigcup_{t\geqslant0}\mathscr{F}_s)$	σ 代数流$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$在$\infty$处的 σ 代数
$\mathscr{F}_t^X=\sigma(X_s:s,t\in\mathbf{T},s\leqslant t)$	随机过程 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$生成的自然流
$\mathscr{F}_\tau=\{A\in\mathscr{F}_\infty:A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,$ $\forall t\in\mathbb{R}_+\}$	τ 前事件 σ 代数或停时 σ 代数
$D_B(\omega)=\inf\{s\in\mathbb{R}_+:X_s(\omega)\in B\}$	随机过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$对应于$\mathbb{R}$的子集 B 的首中时
$\{\mathscr{F}_{t_n}:n\in\mathbb{Z}_+\}$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的一个具离散时间的域流
$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_{t_n}:n\in\mathbb{Z}_+\},P)$, $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_{t_n}\},P)$	一个具离散时间的域流空间
$\mathscr{F}_{t_\infty}$，其中 $t_\infty=\lim_{n\to\infty}t_n\in\overline{\mathbb{R}}_+$	$\sigma(\bigcup_{n\in\mathbf{Z}_+}\mathscr{F}_{t_n})$
$\mathscr{F}_\tau=\{A\in\mathscr{F}_{t_\infty}:A\cap\{\tau\leqslant t_n\}\in\mathscr{F}_{t_n},$ $\forall n\in\mathbb{Z}_+\}$	τ 前 σ 代数或停时 σ 代数
X_∞	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个广义实值 $\mathscr{F}_\infty$ 或 $\mathscr{F}_{t_\infty}$ 可测随机变量
$X_\tau(\omega)$	停时随机变量
$X^\tau=\{X_{\tau\wedge t}:t\in\mathbb{R}_+\}$	适应过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$关于停时 τ 的停时过程
$X^\tau=\{X_{\tau\wedge t_n}:n\in\mathbb{Z}_+\}$	适应过程 $X=\{X_{t_n}:n\in\mathbb{Z}_+\}$关于停时 τ 的停时过程

$X^{[\tau]}$	适应过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$ 被停时 τ 的截断过程
$L_p(\Omega,\mathscr{F},P)$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上满足条件 $\Vert X\Vert_p\triangleq\left(\int_\Omega \vert X\vert^p\mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$ 的广义实值随机变量的等价类的线性空间
$L_\infty(\Omega,\mathscr{F},P)$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的基本有界的随机变量的等价类的线性空间
$\Vert X\Vert_\infty$	基本有界的随机变量 X 的所有基本界的下确界
$X\vee Y$	X 和 Y 的最大值
$X\wedge Y$	X 和 Y 的最小值
$C\bullet X$	鞅、下鞅或上鞅 X 关于可料过程 C 的鞅变换或随机积分
$C^{(\tau)}=\{C_n^{(\tau)}:n\in\mathbb{Z}_+\}$	来源于停时 τ 的停止过程
$U_a^b(X,N)$	有限随机变量序列$\{X_1,\cdots,X_N\}$上穿区间$[a,b]$的次数
$D_a^b(X,N)$	有限随机变量序列$\{X_1,\cdots,X_N\}$下穿区间$[a,b]$的次数
$U_a^b(X)$	随机变量序列 $X=\{X_n:n\in\mathbb{Z}_+\}$上穿区间$[a,b]$的次数
$D_a^b(X)$	随机变量序列 $X=\{X_n:n\in\mathbb{Z}_+\}$下穿区间$[a,b]$的次数
$U_a^b(X,\tau)=U_a^b(X^{(\tau)},N)$	随机过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$相应于集合 $J\cap S$ 中的严格递增有限序列$\tau=\{t_0,\cdots t_N\}$上穿区间$[a,b]$的次数
$D_a^b(X,\tau)=D_a^b(X^{(\tau)},N)$	随机过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$相应于集合 $J\cap S$ 中的严格递增有限序列$\tau=\{t_0,\cdots t_N\}$下穿区间$[a,b]$的次数
$U_a^b(X,J\cap S)$	随机过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$相应于集合 $J\cap S$ 上穿区间$[a,b]$的次数
$D_a^b(X,J\cap S)$	随机过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$相应于集合 $J\cap S$ 下穿区间$[a,b]$的次数
$\mathbb{Q}$	所有有理数的集合
$\langle\bullet,\bullet\rangle$	空间 $L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个内积
$\mathscr{F}_{-\infty}$	域流$\{\mathscr{F}_{-n}:n\in\mathbb{Z}_+\}$中 σ 代数的交，即 $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}_+}\mathscr{F}_{-n}$
$\mathbf{J}$	域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\},P)$上的所有有界停时的集合
$\mathbf{J}_a$	有界停时集合 $\mathbf{J}$ 中的所有以 a 为界的停时组成集合
$\mathbf{J}_\infty$	域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\},P)$上的所有停时的集合
$A_\infty(\omega)=\lim\limits_{t\to\infty}A_t(\omega)$	具有例外集 Λ_A 的几乎必然增过程 $A=\{A_t:t\in\mathbb{R}_+\}$的极限
$\mu_A(\bullet,\omega)$	可测空间$(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$上的由几乎必然增过程 $A=\{A_t:t\in\mathbb{R}_+\}$所确定的 Lebesgue-Stieltjes 测度族
$\int_{[0,t]}X(s,\omega)\mathrm{d}A(s,\omega)=\int_{[0,t]}X(s,\omega)\mu_A(\mathrm{d}s,\omega)$	随机过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$ 关于几乎必然增过程 A 在区间$[0,t]$ 的积分
$\mathbf{M}_2=\mathbf{M}_2(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\},P)$	标准域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\},P)$上的所有满足 $X_0=0$ a.s. 的右连续平方可积(或 L_2)鞅 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$的等价类的线性空间

$\mathbf{M}_2^c=\mathbf{M}_2^c(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\},P)$	空间 $\mathbf{M}_2$ 的包含所有几乎必然连续成员的线性子空间
$\lvert X\rvert_t=[E(X_t^2)]^{1/2}$	空间 $\mathbf{M}_2$ 上的一个半范数
$\lvert X\rvert_\infty=\sum_{m\in\mathbf{N}}2^{-m}\{\lvert X\rvert_m\wedge 1\}$	空间 $\mathbf{M}_2$ 上的一个拟范数
$\mathbf{A}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	标准域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$上的所有几乎必然增过程的等价类的集合
$\mathbf{A}^c(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	$A(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$的包含所有连续成员的子集
$\mathbf{V}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	标准域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$上的所有几乎必然局部有界变差过程的等价类的线性空间
$\mathbf{V}^c(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	$\mathbf{V}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$的包含所有连续成员的子集
$\mathbf{L}_{p,\infty}(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mu_A,P)$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上所有满足条件 $E\left[\int_{[0,t]}\lvert X(s)\rvert^p\mathrm{d}A(s)\right]<\infty$,对每一 $t\in\mathbb{R}_+$ 的所有可测过程 $X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$ 的等价类的线性空间,对 $A\in\mathbf{A}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$ 和 $p\in[0,\infty)$
$\lVert X\rVert_{p,t}^{A,P}=\left\{E\left[\int_{[0,t]}\lvert X(s)\rvert^p\mathrm{d}A(s)\right]\right\}^{\frac{1}{p}}$	线性空间 $\mathbf{L}_{p,\infty}(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mu_A,P)$上的一个半范数
$\lVert X\rVert_{p,\infty}^{A,P}=\sum_{m\in\mathbf{N}}2^{-m}\{\lVert X\rVert_{p,m}^{A,P}\wedge 1\}$	线性空间 $\mathbf{L}_{p,\infty}(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mu_A,P)$上的一个拟范数
$[M,M]$	$M\in\mathbf{M}_2(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$的二次变差过程
$[M,N]$	M 和 N 的二次协变差过程,$M,N\in\mathbf{M}_2(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$
$\mathbf{L}_0(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	标准域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$上的所有有界左连续适应简单过程的集合
$X\bullet M$	X 关于 M 的随机积分
$\int_{[0,t]}X(s)\mathrm{d}M(s)$	X 关于 M 在区间$[0,t]$上的随机积分
$N(\mu,\sum)$	期望向量为 μ,协方差矩阵为Σ的多维正态分布
$\lvert x\rvert$	$x\in\mathbb{R}^d$ 的 Euclidean 范数
$\varphi_X(y)=E[\exp\{\mathrm{i}\langle y,X\rangle\}]$	随机变量 X 的特征函数
m_L	可测空间$(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$上的 Lebesgue 测度
$\mathbf{L}_{p,\infty}(\mathbb{R}_+\times\Omega,m_L\times P)$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上所有满足条件 $\int_{[0,t]\times\Omega}\lvert X(s,\omega)\rvert^p(m_L\times P)(\mathrm{d}(s,\omega))<\infty$, 对每一 $t\in\mathbb{R}_+$ 的可测过程的等价类的线性子空间
$\lVert X\rVert_{p,t}^{m_L\times P}$	空间 $\mathbf{L}_{p,\infty}(\mathbb{R}_+\times\Omega,m_L\times P)$上的一个半范数
$\lVert X\rVert_{p,\infty}^{m_L\times P}=\sum_{m\in\mathbf{N}}2^{-m}\{\lVert X\rVert_{p,t}^{m_L\times P}\wedge 1\}$	空间 $\mathbf{L}_{p,\infty}(\mathbb{R}_+\times\Omega,m_L\times P)$上的一个拟范数

$\mathbf{M}_2^{\mathrm{loc}}=\mathbf{M}_2^{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	标准域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\},P)$上所有满足$X_0=0$ a.s.的右连续局部平方可积$X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$的等价类的集合
$\mathbf{M}_2^{c,\mathrm{loc}}=\mathbf{M}_2^{c,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	集合$\mathbf{M}_2^{\mathrm{loc}}$的包含几乎必然连续成员的子集
$\mathbf{A}^{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	标准域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\},P)$上的满足下面条件的所有过程$A$的等价类的集合： (1) $A=\{A_t:t\in\mathbb{R}_+\}$是一个适应过程； (2) 存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P)$的一个零集$\Lambda_A$，使得对每一$\omega\in\Lambda_A^c$，有$A(\cdot,\omega)$是$\mathbb{R}_+$上的一个实值右连续单调增函数，满足对每一$\omega\in\Omega$有$A(0,\omega)=0$
$\mathbf{A}^{c,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$和$V^{c,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	包含集合$\mathbf{A}^{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$和空间$\mathbf{V}^{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$中的几乎必然连续成员的集合
$[X,X]$	右连续局部平方可积鞅X的二次变差过程
$[X,Y]$	右连续局部平方可积鞅X和Y的协二次变差过程
$\mathbf{L}_{2,\infty}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mu_A,P)$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的满足下面条件的可测过程$X=\{X_t:t\in\mathbb{R}_+\}$的等价类的线性空间：存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个零集$\Lambda$，使得对每一$\omega\in\Lambda^c$，有$\int_{[0,t]}X^2(s,\omega)\mu_A(\mathrm{d}s,\omega)<\infty$，对每一$t\in\mathbb{R}_+$
$(X\cdot M)_t$	$\int_{[0,t]}X(s)\mathrm{d}M(s)$
$C^2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$上所有具有一、二阶连续导数的连续实值函数的集合
$\mathbf{L}_{1,\infty}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mu_A,P)$	满足$\int_{[0,t]}\lvert\Phi(s,\omega)\rvert\mu_A(\mathrm{d}s,\omega)<\infty$的可测过程$\Phi=\{\Phi_t:t\in\mathbb{R}_+\}$等价类的线性空间
$\mathbf{C}(\mathbb{R}_+\times\Omega)$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上满足对几乎每一$\omega\in\Omega$，$\Phi(\cdot,\omega)$是$\mathbb{R}_+$上的连续函数的可测过程$\Phi=\{\Phi_t:t\in\mathbb{R}_+\}$的等价类的线性空间
$\mathbf{B}(\mathbb{R}_+\times\Omega)$	概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上使得对几乎每一$\omega\in\Omega$，$\Phi(\cdot,\omega)$是$\mathbb{R}_+$的每一有限区间上的有界函数的可测过程$\Phi=\{\Phi_t:t\in\mathbb{R}_+\}$的等价类的线性空间
$\int_{[0,t]}\Phi(s)\mathrm{d}X(s)=\int_{[0,t]}\Phi(s)\mathrm{d}M_X(s)+\int_{[0,t]}\Phi(s)\mathrm{d}V_X(s)$	可料过程Φ关于拟鞅M的随机积分
$\Phi\cdot X$，$\Phi\cdot M_X$和$\Phi\cdot V_X$	过程$\left\{\int_{[0,t]}\Phi(s)\mathrm{d}X(s):t\in\mathbb{R}_+\right\}$，$\left\{\int_{[0,t]}\Phi(s)\mathrm{d}M_X(s):t\in\mathbb{R}_+\right\}$和$\left\{\int_{[0,t]}\Phi(s)\mathrm{d}V_X(s):t\in\mathbb{R}_+\right\}$
$M_{\Phi\cdot X}$和$V_{\Phi\cdot X}$	拟鞅$\Phi\cdot X$的鞅部和有界变差部分

$C^2(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$上所有具有一、二阶连续偏导数的实值函数的集合
$\mathrm{d}X$	拟鞅 X 的随机微分
$\mathbf{Q}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$	标准域流空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$上的所有拟鞅的集合
$X\underset{\sim}{q}Y$	$X,Y\in Q(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$是等价的拟鞅
$\mathbf{dQ}$	集合 $Q(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$关于等价关系 $\underset{\sim}{q}$ 的等价类的集合
$\mathrm{d}M_2^{c,\mathrm{loc}}$	$\mathbf{dQ}$ 的包含 $\mathrm{d}M$ 的子集，其中 $M\in M_2^{c,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$
$\mathrm{d}V^{c,\mathrm{loc}}$	$\mathbf{dQ}$ 的包含 $\mathrm{d}V$ 的子集，其中 $V\in V^{c,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$
$\mathrm{d}X+\mathrm{d}Y=\mathrm{d}(X+Y)$	$\mathbf{dQ}$ 中的加法
$c\mathrm{d}X=\mathrm{d}(cX)$	$\mathbf{dQ}$ 中的数乘
$\mathrm{d}X\cdot\mathrm{d}Y=\mathrm{d}[M_X,M_Y]$，$\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$	$\mathbf{dQ}$ 中的乘法
$\Phi\cdot\mathrm{d}X=\mathrm{d}(\Phi\cdot X)$，$\Phi\mathrm{d}X$	Φ 对 $\mathrm{d}X$ 的 · 乘运算
$\int_{(s,t]}\mathrm{d}X(u)=X(t)-X(s)$	随机微分 $\mathrm{d}x$ 在区间$(s,t]$的积分，其中 $X\in Q(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},P)$，$s,t\in\mathbb{R}_+$，$s<t$
$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$	所有满足 $\int_0^T \lvert f(t)\rvert^p\mathrm{d}t<\infty$ a.s. 对每一 $T>0$ 的$\mathbb{R}^d$值的 $\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbb{R}_+\}$可测的过程 $f=\{f(t)\}_{t\geqslant0}$的族
$\mathcal{M}^p(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$	所有满足 $E\left[\int_0^T \lvert f(t)\rvert^p\mathrm{d}t\right]<\infty$，对每一 $T>0$ 的过程 $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$的族
$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$	$d\times m$ 维矩阵值$\{\mathscr{F}_t\}$适应的满足 $\int_0^T \lvert f(t)\rvert^p\mathrm{d}t<\infty$ a.s. 对每一 $T>0$ 的过程 $f=\{(f_{ij}(t))_{d\times m}\}_{t\geqslant0}$的族
$\int_{[0,t]}g(s)\mathrm{d}B_s$	g 关于 $B=\{B_t\}_{t\geqslant0}$ 的 Itô 积分，也记作$\int_0^t g(s)\mathrm{d}B_s$
$x(t)=x(0)+\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\int_0^t g(s)\mathrm{d}B_s$	一维、d 维 Itô 过程
$\mathrm{d}x(t)=f(t)\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}B_t$	一维、d 维 Itô 过程的随机微分形式
$C^{2,1}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$上的满足对 x 连续二次可微而对 t 一次可微的实值函数 $V(x,t)$的族
$\Delta=\sum_{i=1}^m\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	Laplace 算子
$\mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}^d)$	所有满足对 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$ 有$\int_a^b \lvert f(t)\rvert^p\mathrm{d}t<\infty$ a.s. 的$\mathbb{R}^d$值的过程 $f=\{f(t):a\leqslant t\leqslant b\}$ 的族
$\mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}^{d\times m})$	所有满足对 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$ 有$\int_a^b \lvert f(t)\rvert^p\mathrm{d}t<\infty$ a.s. 的$\mathbb{R}^{d\times m}$ 值的过程 $f=\{f(t):a\leqslant t\leqslant b\}$ 的族
$x(t;t_0,x_0)$	随机微分方程 $\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t)\mathrm{d}t+g(x(t),t)\mathrm{d}B(t)(t_0\leqslant$

	$t\leqslant t$)的一个具初值 x_0 的解或解过程
$\mathcal{M}^p([a,b];\mathbb{R}^{d\times m})$	所有满足对 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$ 有 $E\int_a^b \vert f(t)\vert^p dt<\infty$ 的过程 $f\in\mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}^{d\times m})$ 的族
$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\vert x(t)\vert$	$x(t)$的 Lyapunov 指数或轨道 Lyapunov 指数
$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(E\vert x(t)\vert^p)$	$x(t)$的 p 阶矩 Lyapunov 指数
$\vert\boldsymbol{A}\vert=\sqrt{\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}$	矩阵的迹范数
$\Vert\boldsymbol{A}\Vert=\sup\{\vert\boldsymbol{Ax}:\vert\boldsymbol{x}\vert=1\vert\}$	矩阵的算子范数
$\mathrm{trace}F(s)$	矩阵 $F(s)$的迹
$\Phi^{-1}(t)$	矩阵 $\Phi(t)$的逆矩阵
$\mathcal{K}$	$\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 的所有连续非减的满足 $\mu(0)=0$ 和当 $r>0$ 时有 $\mu(r)>0$ 成立的函数 μ 的集合
$S_h=\{x\in\mathbb{R}^d:\vert x\vert<h\}$	$\mathbb{R}^d$ 中以 $h>0$ 为半径的球
$C^{1,1}(S_h\times[t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$	所有的从 $S_h\times[t_0,\infty)$到$\mathbb{R}_+$的对向量(x,t)的分量 x 和 t 都具有连续的一阶偏导数的函数 $V(x,t)$的集合
$C^{2,1}(S_h\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$	$S_h\times\mathbb{R}_+$上的关于(x,t)的 x 具有连续二阶偏导数而关于 t 具有连续一阶偏导数的非负函数 $V(x,t)$的集合
$\lambda_{\max}(A)$	表示矩阵 A 的最大特征值
$V\in C^{2,1}(\mathbb{R}^d\times[t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$	$\mathbb{R}^d\times[t_0,\infty)$上关于$(x,t)$的分量 x 具有连续二阶偏导数而关于分量 t 具有连续一阶偏导数的非负函数 $V(x,t)$的集合
$\lambda_{\min}(Q)$和 $\lambda_{\max}(Q)$	Q 的最小和最大特征值
$B\subset D$ a.s.	$P(B\cap D^c)=0$

目　　录

第二篇 鞅