工业和信息化部“十二五”规划教材

华信经管创优系列·工程硕士

本书含
精美PPT

运筹学

OPERATIONS RESEARCH

党耀国　朱建军
徐海燕　关叶青　等编著

中国工信出版集团　电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

工业和信息化部“十二五”规划教材

运筹学

OPERATIONS RESEARCH

党耀国　朱建军　徐海燕
关叶青　张凤林　张骥骧　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书系统地介绍了运筹学中的主要内容，重点讲解了应用广泛的线性规划、运输问题、整数规划、图论与网络计划、存储论、决策分析等定量分析和优化的理论、方法与 Excel 求解。本书强调学以致用，以大量实际问题为背景引出运筹学各分支的基本概念、模型和方法，具有很强的实用性；在基本原理和方法的介绍方面，本书尽量避免复杂的理论证明，通过大量通俗易懂的例子进行理论方法的讲解，具有较强的趣味性，又不失理论性，理论难度由浅入深，适合不同层次的读者。

本书可作为高等院校经济管理类、工程类各专业的本科生、专业硕士研究生教材，也可供各类管理人员及相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/党耀国等编著. —北京：电子工业出版社，2015.4
ISBN 978-7-121-25739-1

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①党… Ⅲ. ①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 057583 号

策划编辑：王赫男
责任编辑：郝黎明
印　　刷：北京京海印刷厂
装　　订：北京京海印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：14　　字数：364 千字　　插页：1
版　　次：2015 年 4 月第 1 版
印　　次：2015 年 4 月第 1 次印刷
定　　价：30.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前言

运筹学是从实际问题中抽象而来的模型化手段，是一种解决实际问题的系统化思想，它帮助人们学会如何从实践中发现、提出和分析问题，基于定性和定量相结合的方法，对实际问题进行数学建模、模型求解以寻求最优的解决方案。运筹学的核心思想是当我们面临各种决策问题时，如何做事以及如何做事才能有较高的效率。运筹学已经广泛应用于工业、农业、交通运输、商业、国防、建筑、通信、政府机关等各个部门领域，涉及生产管理实践中的最优生产计划、最优分配、最佳设计、最优决策、最佳管理等实际问题。掌握运筹学的基本理论与方法，是高等院校管理科学与工程、经济管理类专业学生和各级各类管理人员必须具备的基本素质。

对以解决实际问题为目标的经济管理类专业的学生而言，最重要的是通过本门课程的学习，培养系统的解决问题的能力，促成其建立运用模型解决问题的习惯，储备一定的数学建模、求解与利用 Excel 求解的能力。对此，在教材编写过程中，本书以生产管理实践中的实际问题为基本素材，强调实践中的理念和悟性，书中编写了大量的实际案例的分析和案例讨论，可以加深读者对实际问题的认识，增强其学习兴趣；深入浅出地讲解各种模型的基本概念和求解思路，尽力避开纯粹数学上的复杂推导，易于学生理解和自学；教材体系结构清晰，涵盖了运筹学的经典理论模型和方法，内容选择安排合理，简单实用。本书适用于高等院校经济管理类专业的本科生和研究生，MBA，面向实际应用的工程类、管理类和各类管理干部进修班的学员。

本书是在作者多年教学的基础上，根据教学过程中有关专家、学者的意见，重点对 Excel 求解过程进行介绍。把 Excel 求解过程贯穿整个教材之中，对于学生自学、解决实际问题会有较大的帮助。

全书共分 6 章，其中第 1 章由党耀国执笔，第 2 章由张凤林执笔，第 3 章由张骥骧执笔，第 4 章由徐海燕执笔，第 5 章由关叶青执笔，第 6 章由朱建军执笔，全书由党耀国教授统稿。

由于作者水平有限，本书难免存在错漏与不足之处，敬请专家、学者及读者不吝指正。

党耀国

2015 年 1 月于南京

目录

第1章

线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支，它也是现代科学管理的重要手段之一，它可以帮助管理者做出科学决策的一个有效的方法，在许多领域都有成功的应用案例。如生产计划安排问题，对于在计划期内安排生产多种产品，生产不同单位产品所需原材料及设备工时不同，同时不同产品的单位产品利润也不同，管理者如何安排各种产品的产量，使得在资源有限的情况下公司获得最大利润？再如投资问题，如何从不同的投资项目中选出一个投资方案使得投资的回报为最大？以上问题都可以利用线性规划方法进行解决。

1.1 线性规划问题及其数学模型

线性规划是研究在给定的约束条件下，求所考查的目标函数在某种意义下的极值问题。自1947年美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)提出了求解线性规划问题的方法——单纯形法之后，线性规划在理论上趋于成熟，在实际中的应用日益广泛与深入。特别是在能用计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后，它的适用领域更加广泛。从解决技术问题中的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划与管理、决策等各个领域均可发挥重要作用；从范围来看，小到一个小组的日常工作和计划安排，大至整个部门以致国民经济计划的最优方案的提出，都有用武之地。它具有适应性强、应用广泛、计算技术比较简单的特点，是现代管理科学的重要基础和手段之一。

1.1.1 线性规划问题的数学模型

在生产管理和经济活动中，经常会遇到线性规划问题，如何利用线性规划的方法来进行分析，下面举例来加以说明。

【例 1.1】 (生产计划问题)某公司在计划期内安排生产甲、乙两种产品，已知生产产品甲需原材料 B，生产产品乙需原材料 A，生产单位产品甲、乙所需原材料及设备工时和

甲、乙两种产品的单位产品利润等数据如表 1.1 所示；由于两种产品生产都在一个设备上生产，且设备工时有限，公司管理者如何安排这两种产品的生产量，使得在资源有限的情况下公司获得最大利润。

表 1.1　生产单位产品消耗原材料及占用设备工时

	甲	乙	资源限制
原材料 A(吨)	0	3	15
原材料 B(吨)	4	0	12
设备(单位设备工时)	2	2	14
单位产品利润(万元)	2	3	

现在需要确定这两种产品的产量，使公司获得最大利润。因此需要引入变量如下：

设生产产品 A 和生产产品 B 的产量用变量 x_1、x_2来表示，则称 x_1、x_2为决策变量。

若用 Z 表示该公司的利润，则该公司的利润值为

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \text{（万元）}$$

因为在计划期内原材料 A 有 15 吨可利用，所以在确定产品甲、乙的产量时，可用不等式表示为

$$3x_2 \leqslant 15$$

同理，因在计划期内原材料 B 的限制，有不等式

$$4x_1 \leqslant 12$$

设备工时的限制，有不等式：

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 14$$

此外甲、乙两种产品的产量不可能为负值，因此有对变量的非负约束

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

综上所述，该公司的生产计划安排问题可用如下数学模型表示为

目标函数　　$\max Z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件　　$$\begin{cases} 3x_2 \leqslant 15 \\ 4x_1 \leqslant 12 \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 14 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 1.2】　(成本问题)某炼油厂每季度需供应给合同单位汽油 15 万吨、煤油 12 万吨、重油 12 万吨。该厂计划从 A、B 两处运回原油提炼，已知两处的原油成分含量如表 1.2 所示；又已知从 A 处采购的原油价格为每吨(包括运费)200 元，B 处采购的原油价格为每吨(包括运费)290 元，问：该炼油厂如何从 A、B 两处采购原油，在满足供应合同的条件下，使购买成本最小。

表 1.2　A、B 两处的原油成分含量

成分 \ 产品来源	A	B
汽油	15%	50%
煤油	20%	30%
重油	50%	15%
其他	15%	5%

分析：很明显，该厂可以有多种不同的方案从 A、B 两处采购原油，但最优方案应是使购买成本最小的一个，即在满足供应合同单位的前提下，使成本最小的一个采购方案。

解：设 x_1、x_2 分别表示从 A、B 两处采购的原油量（单位：万吨），则所有的采购方案均应同时满足

$$\begin{cases} 0.15x_1 + 0.50x_2 \geqslant 15 \\ 0.20x_1 + 0.30x_2 \geqslant 12 \\ 0.50x_1 + 0.15x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

采购成本为 x_1、x_2 的函数，即

$$S = 200x_1 + 290x_2 \text{（万元）}$$

而最终目标是求满足约束条件和使采购成本最小时的解。由此，建立的数学模型为

$$\min S = 200x_1 + 290x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases} 0.15x_1 + 0.50x_2 \geqslant 15 \\ 0.20x_1 + 0.30x_2 \geqslant 12 \\ 0.50x_1 + 0.15x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 1.3】（人力资源分配问题）某昼夜服务的公交公司的公交线路每天各时段内所需司机人员如表 1.3 所示。

表 1.3　各时段内所需司机人员

班　次	时　间	所需人数
1	6：00－10：00	60
2	10：00－14：00	70
3	14：00－18：00	60
4	18：00－22：00	50
5	22：00－2：00	20
6	2：00－6：00	30

设司机人员分别在各时间段开始时上班，并连续工作 8 小时。

问题：

该公司公交各时段应如何安排司机，既能满足工作需要，又使配备司机人员的人数最少？

解：设 x_i 表示第 i 班次开始上班的司机人员人数，这样可以知道在第 i 班工作的人数应

包括第 $i-1$ 班次开始上班的人数和第 i 班次开始上班的人数，如 $x_1+x_2 \geqslant 70$，又要求这6个班次开始上班的人数总和最少，即可以建立如下的数学模型

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{s. t}\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 70 \\ x_2 + x_3 \geqslant 60 \\ x_3 + x_4 \geqslant 50 \\ x_4 + x_5 \geqslant 20 \\ x_5 + x_6 \geqslant 30 \\ x_1 + x_6 \geqslant 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例1.4】（连续投资问题）某公司在今后5年内考虑给下列项目投资，已知：

项目A：从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%；

项目B：第三年年初需要投资，到第五年年末能回收本利125%，但规定最大投资额不超过4亿元；

项目C：第二年年初需要投资，到第五年年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3亿元；

项目D：五年内每年年初可购买公债，于当年年末归还，并加利息6%。

已知该公司现有资金10亿元，问它应如何确定给这些项目每年的投资额，使到第五年年末拥有资金的本利总额为最大？

解：(1)确定变量：这是一个连续投资问题，与时间有关。但这里设法用线性规划方法静态地处理。设

x_{iA}：表示第 i 年年初给项目A的投资额(万元) $i=1,\cdots,5$；

x_{iB}：表示第 i 年年初给项目B的投资额(万元) $i=1,\cdots,5$；

x_{iC}：表示第 i 年年初给项目C的投资额(万元) $i=1,\cdots,5$；

x_{iD}：表示第 i 年年初给项目D的投资额(万元) $i=1,\cdots,5$；

它们都是待定的未知变量。

(2)投资额应等于手中拥有的资金额。由于项目D每年都可以投资，并且当年末即可收回本息，因此该部门每年应把资金全部投出，手中不应当有剩余的呆滞资金。

因此有

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1D} = 100000 \\ x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} = 1.06x_{1D} \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} = 1.15x_{1A} + 1.06x_{2D} \\ x_{4A} + x_{4D} = 1.15x_{2A} + 1.06x_{3D} \\ x_{5D} = 1.15x_{3A} + 1.06x_{4D} \end{cases}$$

(3)目标函数：目标要求是在第五年年末该部门手中拥有的资金额达到最大。这个目

标函数可表示为

$$\max Z = 1.15x_{4A} + 1.25x_{3B} + 1.40x_{2C} + 1.06x_{5D}$$

(4)数学模型:

$$\max Z = 1.15x_{4A} + 1.25x_{3B} + 1.40x_{2C} + 1.06x_{5D}$$

$$\text{s. t}\begin{cases} x_{1A} + x_{1D} = 100000 \\ -1.06x_{1D} + x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} = 0 \\ -1.15x_{1A} - 1.06x_{2D} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} = 0 \\ -1.15x_{2A} - 1.06x_{3D} + x_{4A} + x_{4D} = 0 \\ -1.15x_{3A} - 1.06x_{4D} + x_{5D} = 0 \\ x_{2C} \leqslant 30000 \\ x_{3B} \leqslant 40000 \\ x_{iA}, x_{iB}, x_{iC}, x_{iD} \geqslant 0 (i = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

【例 1.5】 (航线安排问题)总部设在南京的某航空公司拥有波音 737 飞机 6 架、空客 320 飞机 9 架、ERJ-190 飞机 5 架飞往 A、B、C、D 四个城市,通过收集相关资料数据,得到不同型号的飞机由南京飞往各个城市的往返费用、往返时间等数据如表 1.4 所示。

表 1.4　各种飞机往返各地的费用与时间

飞机类型	飞往城市	飞行费用(元)	飞行时间(小时)
波音 737	A	60000	4
	B	65000	5
	C	75000	6
	D	100000	9
空客 320	A	45000	3
	B	70000	4
	C	80000	7
	D	90000	10
ERJ-190	A	40000	4
	B	50000	4
	C	90000	7
	D	95000	9

假定每架飞机每天的最大飞行时间为 16 小时,城市 A 为每天 10 班,城市 B 为每天 12 班,城市 C 为每天 15 班,城市 D 为每天 12 班。航空公司希望合理安排飞机飞行使得总费用最低。

假设用 $i = 1,2,3$ 表示波音 737、空客 320、ERJ-190 三种飞机的机型,$j = 1,2,3,4$ 表示 A、B、C、D 四个城市,引入决策变量 x_{ij} 表示第 i 种飞机飞往第 j 城市的航班次数。有如下约束。

(1)城市飞行次数约束:

$$\text{A 城市}: x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10$$

$$\text{B 城市}: x_{12} + x_{22} + x_{32} = 12$$

$$\text{C 城市}: x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15$$

$$\text{D 城市}: x_{14} + x_{24} + x_{34} = 12$$

(2)每种飞机飞行时间的约束：

$$\text{波音 737}: 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 9x_{14} = 6 \times 16$$

$$\text{空客 320}: 3x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 10x_{24} = 9 \times 16$$

$$\text{ERJ-190}: 4x_{31} + 4x_{32} + 7x_{33} + 9x_{34} = 5 \times 16$$

(3)非负约束：

$$x_{ij} \geqslant 0\ (i = 1,2,3, j = 1,2,3,4)$$

目标函数为总的飞行费用最小

$$\begin{aligned}\min Z = & 60000x_{11} + 65000x_{12} + 75000x_{13} + 100000x_{14} + 45000x_{21} + 70000x_{22} \\ & + 80000x_{23} + 90000x_{24} + 40000x_{31} + 50000x_{32} + 90000x_{33} + 95000x_{34}\end{aligned}$$

因此该问题的线性规划模型为：

$$\begin{aligned}\min Z = & 60000x_{11} + 65000x_{12} + 75000x_{13} + 100000x_{14} + 45000x_{21} + 70000x_{22} \\ & + 80000x_{23} + 90000x_{24} + 40000x_{31} + 50000x_{32} + 90000x_{33} + 95000x_{34}\end{aligned}$$

$$\text{s. t}\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 12 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 12 \\ 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 9x_{14} = 96 \\ 3x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 10x_{24} = 144 \\ 4x_{31} + 4x_{32} + 7x_{33} + 9x_{34} = 80 \\ x_{ij} \geqslant 0, i = 1,2,3; j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

从以上几个例子的数学模型可以看出，该类数学模型具有如下特点：

(1)有一组非负的决策变量(decision or control variable)，这组决策变量的值都代表一个具体方案；

(2)有一组约束条件：含有决策变量的线性不等式(或等式)组(linear function constraints)；

(3)有一个含有决策变量的线性目标函数(objective linear function)，按研究问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

把满足上述三个条件的数学模型称为线性规划数学模型。如果目标函数是决策变量的非线性函数，或约束条件含有决策变量的非线性不等式(或等式)，称这类数学模型为非线性规划数学模型。

线性规划数学模型的一般形式如下：

$$(\min)\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.1}$$

$$\text{s.t}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ (1.2) \\ \\ (1.3) \end{matrix}$$

在该数学模型中，式(1.1)称为目标函数；式(1.2)称为约束条件；式(1.3)称为变量的非负约束条件。

1.1.2 线性规划问题的标准型

由前面所举的例子可知，线性规划问题可能有各种不同的形式。目标函数根据实际问题的要求可能是求最大化，也有可能求最小化；约束条件可以是"≤"形式、"≥"形式的不等式，也可以是等式的形式。决策变量有时有非负限制，有时没有非负限制。这种多样性给讨论问题带来了不便。为了便于讨论，我们规定线性规划问题描述为如下的标准形式：

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

这里我们假设 $b_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,m)$。

以上模型的简写形式为

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.5}$$

用向量形式表达时，上述模型可以写为

$$\max Z = CX$$

$$\text{s.t}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b & (i = 1,2,\cdots,m) \\ X \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.6}$$

用矩阵形式表达时，上述模型可以写为

$$\max Z = CX$$

$$\text{s.t}\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

式中，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，$P_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$，$A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，$0=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$(j=1,2,\cdots,n)$。

我们称 A 为约束方程组的系数矩阵($m\times n$ 阶)，一般情况下 $m<n$，m、n 为正整数，分别表示约束条件的个数和决策变量的个数，C 为价值向量，X 为决策向量，通常 $a_{ij},b_i,c_j(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ 为已知常数。

实际上，具体问题的线性规划数学模型是各式各样的，需要把它们化成标准型，并借助于标准型的求解方法进行求解。

以下就具体讨论如何把一般的线性规划模型化成标准型。

(1)目标函数的转化。若原问题的目标函数是求最小化，即

$$\min Z=CX$$

这时只需要将目标函数的最小值变换为求目标函数的最大值。令 $Z'=-Z$，就是将目标函数乘以(-1)后转化为如下最大化问题：

$$\max Z'=-CX$$

(2)不等式约束转化为等式约束。不等式约束有两种情况：一是约束条件为"≤"形式的不等式，则在"≤"号的左边加入非负的松弛变量，把原"≤"形式的不等式转化为等式；另一种是约束条件为"≥"形式的不等式，则可在"≥"号的左边减去一个非负的剩余变量，把原"≥"形式的不等式转化为等式。同时相应的松弛变量或剩余变量在目标函数中的价值系数取值为0。

(3)变量约束的转换

若原线性规划问题中某个变量为无非负要求的变量，即有某一个变量 x_j 取正值或负值都可以。这时为了满足标准型对变量的非负要求，可令 $x_j=x_j'-x_j''$，其中：$x_j',x_j''\geqslant 0$，将其代入原问题，即在原问题中将 x_j 用两个非负变量之差代替。

上述的标准型具有如下特点：

(1)目标函数求最大值；

(2)所求的决策变量都要求是非负的；

(3)所有的约束条件都是等式；

(4)常数项为非负。

综合以上的讨论，可以把任意形式的线性规划问题通过上述手段化成标准型的线性规划问题。现举例如下：

【例 1.6】 将例 1.1 的线性规划数学模型化为标准型。

解：引进 3 个新的非负变量 x_3、x_4、x_5 使不等式变为等式，标准型为

$$\max Z=2x_1+3x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}3x_2+x_3=15\\4x_1+x_4=12\\2x_1+2x_2+x_5=14\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

【例 1.7】 试将如下线性规划问题化成标准型

$$\min Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 无限制} \end{cases}$$

解：由于 x_3 无限制，因此令 $x_3 = x_4 - x_5$，x_4、$x_5 \geqslant 0$，第 1 个约束不等式左端加上非负松弛变量 x_6，第 2 个约束不等式左端减去非负剩余变量 x_7，目标函数由于求最小化，因此令 $Z' = -Z$，同时将目标函数及约束条件中的 x_3 换为 $x_3 = x_4 - x_5$，则可将上述线性规划问题化成如下的标准型：

$$\max Z' = x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_4, \cdots, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2 线性规划问题的图解法及几何意义

1.2.1 线性规划问题解的概念

在讨论线性规划问题的求解之前，要先了解线性规划问题解的概念。由前面讨论可知线性规划问题的标准型为

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.8}$$

$$\text{s.t}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1, 2, \cdots, m) & (1.9) \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n) & (1.10) \end{cases}$$

(1) 可行解：满足约束条件式(1.9)、式(1.10)的解 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划问题的可行解；所有可行解的集合称为可行解集或可行域。

(2) 最优解：满足约束条件及目标函数式(1.8)的可行解称为线性规划问题的最优解。

(3) 基。假设 A 是约束方程组的 $m \times n$ 阶系数矩阵，其秩数为 m，B 是矩阵 A 中由 m 列构成的非奇异子矩阵(B 的行列式值不为0)，则称 B 是线性规划问题的一个基。也就是说，矩阵 B 是由 m 个线性无关的列向量组成的。

在例 1.1 中得到该问题的数学模型

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

约束条件
$$\begin{cases}3x_2 \leqslant 15\\4x_1 \leqslant 12\\2x_1 + 2x_2 \leqslant 14\\x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

其标准型为

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t}\begin{cases}3x_2 + x_3 = 15\\4x_1 + x_4 = 12\\2x_1 + 2x_2 + x_5 = 14\\x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0\end{cases}$$

该问题有 3 个约束方程，它的系数矩阵为

$$A = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \begin{bmatrix}0 & 3 & 1 & 0 & 0\\4 & 0 & 0 & 1 & 0\\2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中，p_j 为系数矩阵 A 中第 j 列的列向量，在 A 中存在一个不为零的 3 阶子式，在此例中

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}与\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

都是该线性规划的一个基。

(4)基向量与非基向量。基 B 中的一列称为一个基向量。基 B 中共有 m 个基向量，在此例中，对于基

$$B_1 = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

它的每一列向量都是基 B_1 的基向量。

在 A 中除了基 B 之外的任意一列都称为非基向量。在此例中对

$$B_1 = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}与 B_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

来说，向量 $(3,0,2)^{\mathrm{T}}$ 是基 B_1 的基向量，同时还是基 B_2 的非基向量。

(5)基变量与非基变量。与基向量 p_j 对应的变量称为基变量，基变量有 m 个，在此例中，x_2、x_4、x_5 都是 B_1 的基变量，x_3、x_4、x_5 是 B_2 的基变量。

与非基向量 p_i 对应的变量称为非基变量，非基变量有 $n-m$ 个，在此例中，x_1、x_3 是 B_1 的非基变量，x_1、x_2 是 B_2 的非基变量。

(6)基本解与基本可行解。由线性代数的知识知道，如果在约束方程组系数矩阵中找到一个基，令非基变量为零，这时线性方程组可以得到唯一解，这个解称为线性规划的基

本解。在此例中，B_1 是一个基，令这个基的非基变量 $x_1=0$、$x_3=0$，这时求得基变量的唯一解 $x_2=5$、$x_4=12$、$x_5=4$，这样就求得一个基本解 $(0,5,0,12,4)^T$。

由于基本解不能保证所有分量都大于等于零，也就是说基本解不一定是可行解。若满足非负条件的基本解称为基本可行解。上面得到的基本解就是基本可行解。此时对应的基称为可行基。一般来说，判断一个基是否为可行基，只有在求出基本解以后，当其基本解所有变量都大于等于零时，才能判定这个解是基本可行解，这个基是可行基。

1.2.2 线性规划问题的图解法

对于简单的线性规划问题(只有两个决策变量的线性规划问题)，可以通过图解法对它进行求解。图解法简单直观，有助于帮助我们理解线性规划问题的基本原理。下面以例 1.1 为例，介绍具体的图解法求解线性规划的方法。

【例 1.8】 用图解法求解线性规划问题

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t}\begin{cases}3x_2 \leqslant 15\\4x_1 \leqslant 12\\2x_1 + 2x_2 \leqslant 14\\x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

解：对于上述只有两个变量的线性规划问题，以 x_1 和 x_2 为坐标轴建立直角坐标系。从图 1.1 可知，同时满足约束条件的点必然落在由两个坐标轴与三条直线所围成的多边形 *OABCD* 的区域内或该多边形的边界上，该多边形区域内及边界上的点就是满足约束条件的解的集合，就是该线性规划的可行域；画两条目标函数 $Z=2x_1+3x_2$ 的等值线，找出其递增的方向，用虚线表示，用箭头表示目标函数值递增的方向。沿箭头方向移动目标函数的等值线，平移等值线直至与可行域 *OABCD* 相切或融合为一条直线，此时就得到最优解为 *B* 点，其坐标可通过解方程组得到。

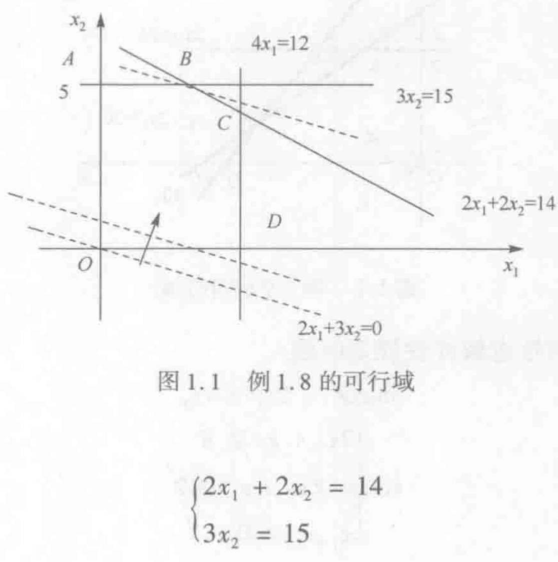

图 1.1 例 1.8 的可行域

求解方程组

$$\begin{cases}2x_1 + 2x_2 = 14\\3x_2 = 15\end{cases}$$