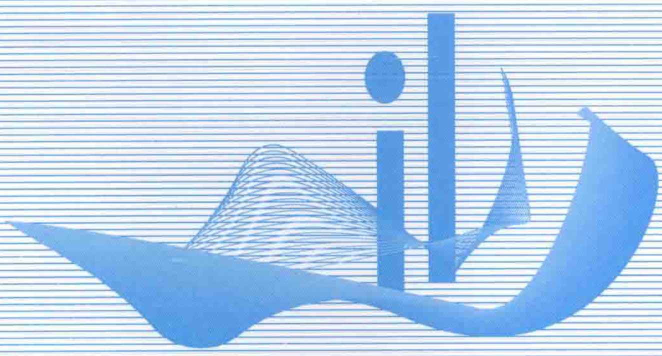
ZHONGLIXING XITONG DE
WENDINGXING YU KEDAJI BIANJIE
——XIANXING JUZHEN BUDENGSHI FANGFA

中立型系统的稳定性与可达集边界
——线性矩阵不等式方法

沈长春 著



SWJTUP 西南交通大学出版社

中立型系统的稳定性与可达集边界

——线性矩阵不等式方法

沈长春 著

西南交通大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

中立型系统的稳定性与可达集边界：线性矩阵不等式方法／沈长春著．—成都：西南交通大学出版社，2015.6
ISBN 978-7-5643-3992-0

Ⅰ．①中… Ⅱ．①沈… Ⅲ．①微分方程－研究 Ⅳ．①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 144847 号

中立型系统的稳定性与可达集边界
——线性矩阵不等式方法

沈长春　著

责任编辑	张宝华
封面设计	原谋书装
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　址	http://www.xnjdcbs.com
印　刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm × 230 mm
印　张	11.75
字　数	210 千
版　次	2015 年 6 月第 1 版
印　次	2015 年 6 月第 1 次
书　号	ISBN 978-7-5643-3992-0
定　价	48.00 元

贵州民族大学博士点建设文库
编委会组成人员名单

前 言

时滞是自然界中广泛存在的一种物理现象，在实际生活的许多系统中都含有时滞. 中立型时滞系统是一种特殊的时滞系统，由于考虑了中立项的存在，使得对这种系统的研究比一般的时滞系统更加复杂和困难. 因此，对于中立型系统的动力学性质的研究具有较大的实际意义，也是目前研究的热点. 而本书就是以中立型系统为研究对象，较详细地研究了中立型系统的稳定性以及可达集边界问题. 本书的主要内容如下：

第 1 章与第 2 章主要介绍了中立型系统的研究背景和现状，并提供了在本书中常用的基本定义、基本定理和重要引理以及研究系统动力学性质的主要方法——线性矩阵不等式方法.

第 3 ~ 5 章分别研究了具有离散时滞、分布时滞以及带非线性扰动的中立型系统及不确定中立型系统的稳定性、鲁棒稳定性及指数稳定性问题. 通过使用李雅普诺夫（Lyapunov）直接方法结合自由权矩阵思想和矩阵不等式等技巧，得到了时滞相关的稳定性条件，并结合数值算例说明所得结果的有效性.

第 6 ~ 7 章研究了具有时变离散时滞的中立型鲁里叶系统的渐近稳定性及指数稳定性问题. 通过使用李雅普诺夫直接方法，结合一类部分积分、时滞分割技巧、自由权矩阵思想和矩阵不等式技巧得到保守性较低且时滞相关的稳定性条件.

第 8 章研究了具有有界扰动的中立型系统以及具有有界扰动和非线性扰动的中立型系统的可达集边界问题. 通过构造新的李雅普诺夫泛函，并结合矩阵不等式技巧，得到了寻找可达集的椭球形边界的方法. 并且通过数值实例揭示了所得结果，较已有文献能找到更小的且有效的可达集边界.

第 9 章对全文进行了总结，并指出今后的研究方向.

本书主要为作者近年来在中立型时滞系统稳定性和可达集方向的研究成果，并纳入“贵州民族大学统计学博士点建设文库”. 可以作为统计学、应用数学与现代控制理论方向研究生的辅导书或参考用书，对时滞微分系统与随机系统等控制理论方向的研究生、学者有借鉴作用.

作 者

2015 年 1 月

目　录

1 绪 论

1.1 时滞微分系统的动力学问题的研究背景和研究现状

在自然科学和工程技术的研究中，许多现象都用微分方程作为它们的数学模型，而许多实际问题所假定事物的变化规律不仅依赖于当时的状态，还依赖于过去的状态. 在这种情况下，一般的微分方程就不能精确地描述客观事物了，代之而起的是微分差分方程、微分积分方程，以及带时间滞后的时滞微分方程. 时滞是自然界中广泛存在的一种物理现象，在实际生活的许多系统中都含有时滞，如生物系统、经济系统、机械系统等. 时滞就是指信号传输的延迟，它是作为物理系统的一个固有特性而存在的. 比方说，在工业过程控制系统中，当物质和能量沿着一条特定的路径传输时就会出现时滞，像长管道进料或者皮带传输时就存在时滞. 时滞系统的运动规律不仅与系统当前的运动状态有关，同时还与系统过去的运动状态有关. 在数学上描述时滞系统一般采用时滞微分方程，由于它本质上是无限维的，因而时滞的存在使得对系统的研究变得十分困难. 同时，时滞的存在也往往是系统不稳定和系统性能变差的根源. 实际上，任何闭环控制系统都会存在滞后的现象. 对象的固有时滞给系统的分析和控制器设计带来了很大困难，时滞对象被认为是最难控制的对象之一. 近几十年来，如何抑制对象固有的时滞造成的系统性能的下降，引起了国内外许多专家的高度重视，并取得了许多很好的成果. 随着自动控制技术的发展，对时滞系统的研究不仅具有理论价值，同时也是实际控制系统设计和应用的需要.

时滞微分系统在自然科学和工程技术的研究中有着广泛的应用，它涉及自然科学的众多领域，如经济学、自动控制理论、医学、生物学、化学等. 而中立型系统作为一类特殊的时滞微分系统，能够更精确地描述实际问题. 因此，近年来中立型系统的动力学性质已得到了大量国内外学者的关注.

稳定性问题是动态系统理论研究中的一个重要问题. 系统稳定性概念的出现已有悠久的历史了. 早在 17 世纪出现的托里斯利原理就是一例，即物体仅受重力作用时，当重心位置最低时，其平衡最稳定，反之是不稳定的. 稳定性概念也早已被拉普拉斯（Laplace）、拉格朗日（Lagrange）、马克斯威尔

(Maxwell)、汤姆逊和德特(Thomson and Tait)、庞加莱(Poincare)等采用过，但是都没有给出稳定性的一个精确的定义. 因此在这之前，可以说稳定性的一般理论迟迟没有形成. 直到 1892 年，俄国数学力学家李雅普诺夫(Lyapunov)在他的博士论文“运动稳定性的一般问题”中才给出了运动稳定性的严格、精确的数学定义和一般方法，从而奠定了稳定性理论的基础. 对于李雅普诺夫稳定性理论的了解、欣赏、继承和发展，同样也经历了一个漫长的过程. 1952 年苏联著名数学家马尔金的专著《运动稳定性》以及 1955 年苏联著名控制论专家列托夫的专著《非线性调节系统的稳定性》同时在序言中提到“现代自动调节理论，不论它以何种体系出现，总是发轫于一个唯一牢固的基础——李雅普诺夫运动稳定性学说”. 1959 年，在美国达拉斯(Dallas)召开的第一次自动控制年会上，卡尔曼与伯策姆严谨地介绍了非线性系统的稳定性，并用含状态变量的系统方程来描述控制系统. 随后，卡尔曼又发表了《控制系统的一般理论》及《线性估计和辨识问题的新结果》，同时也奠定了现代控制理论的基础. 1976 年，美国布朗大学著名数学家 LaSalle 教授在动力系统稳定性序言中写道：“可以说在某种程度上，李雅普诺夫的直接法在西方重新发现是五十年代中期的事，那时至少在非线性控制系统的设计研究中广泛地承认了它的重要性. 我对于李雅普诺夫理论的理解和赏识始于 1959 年，……”他在 20 世纪 60 年代还指出：“稳定性理论在吸引全世界数学家的注意，而且李雅普诺夫直接法得到了工程师们的广泛赞赏”“稳定性理论在美国迅速变成训练控制方面的工程师的一个标准部分.”可想而知，稳定性理论从一个具体的控制系统到一个大的社会系统、金融系统、生态系统，总是在某种偶然的或是持续的干扰下进行的. 承受这种干扰之后，能否保持预定的运行或是工作状态，而不至于失控，至关重要.

关于连续性动态系统的稳定性研究自从 20 世纪 70 年代开始就已被人们所关注，近三十年来关于时滞微分系统的稳定性研究[1-28]一直是国际控制理论界研究的热点问题之一. 目前，国际上的学术期刊及一些重要的会议都设有此类研究的专栏，同时也吸引了国内外大批的科研工作者从事此项研究，并获得了相当丰富和较为完善的研究成果. 中立型时滞系统是一种特殊的时滞系统，它能更深刻、更精确地反映事物变化的规律，揭示事物的本质. 因此可以利用中立型时滞系统更精确地来描述实际问题，例如，涡轮喷气发动机系统、横向切削等问题. 然而由于中立项的存在，使得对中立型系统的动力学性质的研究比一般时滞微分系统更加复杂和困难. 因此，对中立型微分系统的研究也相对滞后. 自从 M. A. Cruz 和 J. K. Hale 提出中立型泛函微分方程的概念以及与其平行的基本理论[29]，至今已有大量的关于其稳定性的

理论成果[30-61]. 而这些稳定性结果主要是利用李雅普诺夫直接方法、状态方法和特征方程法等得到的. 尤其是李雅普诺夫直接方法，已成为目前研究时滞系统稳定性问题的主要方法. 近年来，很多时滞系统的稳定性结论都是通过使用李雅普诺夫直接方法得到的[44-39].

在研究时滞系统稳定性时，李雅普诺夫直接方法是一种非常有效的方法. 尤其是Boyd. Stephen等所总结的线性矩阵不等式方法[3]已成为研究系统稳定性问题的主要方法，并得到了广泛的应用. 通过构造适当的李雅普诺夫泛函并对其沿着系统的状态依时间求导，结合一些不等式分析技巧，我们可以得到时滞无关或相关的稳定性条件. 而所得出的稳定性条件常常是由线性矩阵不等式表示的. 由于在研究系统稳定性的过程中所构造的李雅普诺夫泛函不同以及在对李雅普诺夫泛函求导时使用了不同的不等式变换技巧，我们所得到的稳定性条件具有不同的保守性. 对于各种类型的中立型系统的稳定性情况，目前许多学者都进行了相关研究，并取得了一定的成果. 文献[45-49]均对具有离散时滞的中立型系统的稳定性情况进行了研究. 其中，文献[45]利用中立型算子构造了李雅普诺夫泛函，并在求导过程中适当地添加零项，得到了判断系统稳定的充分条件；文献[48]利用牛顿-莱布尼兹公式引入自由矩阵得到的新算子来构造李雅普诺夫泛函，结合矩阵不等式技巧[50, 51]，得到了保守性较小的稳定性条件；文献[46]使用拆分矩阵方法并结合矩阵分析技巧，得到了不确定中立型系统的渐近稳定性条件，较文献[45,49]所得到的稳定性条件有较小的保守性；文献[52,53]研究了具有混合时滞的中立型系统的稳定性问题，其中文献[52]通过构造离散李雅普诺夫泛函并结合线性矩阵不等式方法，得到了使系统稳定的充分条件；而文献[53]使用牛顿-莱布尼兹公式并结合自由权矩阵构造李雅普诺夫泛函的方法，得到了保守性较小的稳定性条件；文献[54]结合矩阵拆分技巧与自由权矩阵方法构造了新的李雅普诺夫泛函，得到了时滞相关且保守性较低的稳定性条件；文献[55-57]均对具有多个时滞的中立型系统的稳定性做了研究，其中文献[55]利用李雅普诺夫直接方法并结合矩阵不等式技巧[58]得到了判定系统渐近稳定的稳定性条件. 文献[58]通过对系统进行等价变换并利用重新定义的算子构造李雅普诺夫泛函，得到了判定系统稳定的黎卡提方程条件；而文献[57]使用了等价系统方法并结合牛顿-莱布尼茨公式添加零项，得到了时滞相关稳定性条件，降低了其稳定性条件的保守性；文献[59-61]研究了具有非线性扰动的中立型系统的稳定性问题. 许多学者通过线性化方法来处理非线性项，然后使用不同的不等式分析技巧得到了系统的稳定性判定条件[62-67]. 而在文献[61]中，时变中立型时滞被分为有限个相等的区间，并在此基础上构造李雅普诺夫泛函得到了判定系统稳

定性判定的充分条件. 而所得的稳定性条件与所分割的时滞区间是相关的，这使得其稳定性条件具有较小的保守性. 因为当时滞较小时，时滞相关的稳定性条件往往比时滞无关的稳定性条件具有更小的保守性，所以本书所得到的稳定性条件都是时滞相关的. 然而构造适当的李雅普诺夫泛函方式并不是唯一的，从而降低稳定性条件的保守性的方法还需要进行更深入的研究. 本书将利用线性矩阵不等式方法来讨论中立型系统的时滞相关稳定性问题.

鲁里叶系统是一类非常重要的非线性系统，其非线性项满足一定的角域条件. 近年来，鲁里叶系统已受到国内外学者的广泛关注，并取得一定的成果[68-79]. 文献[71]研究了不确定鲁里叶系统的鲁棒稳定性，得到了时滞无关的稳定性条件. 而文献[72,73]对同样的系统进行了研究，并得到了较文献[71]的结论具有更小保守性的稳定性条件. 但文献[71-73]所研究的系统中的时滞均为常数. 而文献[75,76]研究了含有时变时滞的鲁里叶系统的稳定性问题，其中文献[75]通过构建增广李雅普诺夫泛函并使用线性矩阵不等式方法研究了不确定鲁里叶系统的鲁棒稳定性；而文献[76]应用李雅普诺夫直接方法并结合自由权矩阵思想和矩阵不等式技巧研究了中立型鲁里叶系统的稳定性情况，得出了保守性较小的稳定性条件. 由于鲁里叶中立型系统所含有的非线性函数的特殊性，使得其系统更加复杂，也增加了研究的难度. 而本书将利用线性矩阵不等式方法来讨论不确定中立型鲁里叶系统的鲁棒稳定性问题.

可达集估计[80]是控制理论中的一个重要问题. 动力系统的可达集是指在有界扰动下从某一初始条件出发所能够到达的、所有的状态集合. 对于含有界输入的线性常微分系统，Boyd 等在文献[3]中基于 S-过程以线性矩阵不等式的形式得出了微分系统的可达集的椭球边界，并广泛应用于具有饱和执行器的控制系统的设计[81-83]. 然而在工程实践中，时滞现象是普遍存在的，而且时滞特性常常会对系统的性能指标产生严重的影响. Frideman 等人[84]运用李雅普诺夫-拉祖米欣方法给出了用椭球来界定状态可达集的边界条件，而且在寻求最小椭球边界时只需处理 5 个非凸的未知标量. 而文献[85]使用类似于对系统进行指数稳定分析时所构造的李雅普诺夫泛函[86-87]得到了只含有一个非凸标量的可达集椭球界. 但是结果中包含了 7 个矩阵以及 1 个未知标量，使结果具有较大的保守性. 文献[88]通过构造最大李雅普诺夫泛函，并引入适当的积分不等式得到了用椭球体的交集来表示的、时滞相关的可达集边界条件. 然而，到目前为止，关于时滞中立型系统的可达集的结果较少. 针对这一问题，本书在文献[88]等的基础上，研究了中立型系

统的可达集边界问题.

1.2 基础知识和主要引理

本节简要介绍时滞微分系统的基本定义以及引理，以便引用和查阅.

1.2.1 基本定义

我们称下面的微分方程为时滞微分系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x_t),\ \ t_0\geqslant 0,\\ x_{t_0}=\phi,\ \ t_0\times C[-h,0],\ \ x_t(\theta)=x(t+\theta),\ \ -h\leqslant\theta\leqslant 0.\end{cases}\tag{1-1}$$

其中 $f,g:[t_0,\infty]\times Q_H\to\Re^n$ 连续可微， $Q_H=\{u\,|\,u\in[-h,0],\ \|x\|<H\}$ ，并且满足

$$f(t,0)\equiv g(t,0)\equiv 0,\ \ |f(t,\psi)|\leqslant C,\ \ t\geqslant t_0,\ \ \psi\in Q_H,\ \ 0\leqslant h\leqslant\infty.\tag{1-2}$$

微分系统的状态变量 $x(t)$ 在时域空间中常表现为一条连续的轨线. 我们对其轨线的研究往往是分析在 $t\to\infty$ 时系统状态 $x(t)$ 的动力学性质. 而当 $t\to\infty$ 时 $x(t)$ 收敛于某个点，则称该点为系统的平衡点.

定义 1.1 系统(1-1)的解成为系统(1-1)的一个平衡点，如果 $f(t,x_t)\equiv 0$ 对 $\forall t\geqslant 0$ 均成立.

一个系统可以没有平衡点，也可以有一个平衡点或多个平衡点. 非线性系统的平衡点一般比较复杂，有多个平衡点或没有平衡点. 对于线性系统

$$\dot{x}=At\ ,$$

当 A 非奇异时，系统具有唯一的平衡点 $x=0$.

本书主要考虑下面的中立型系统:

$$\begin{cases}[x(t)-g(t,x_t)]'=f(t,x_t),\ \ t_0\geqslant 0,\\ x_{t_0}=\phi,\ \ t_0\times C[-h,0],\ \ x_t(\theta)=x(t+\theta),\ \ -h\leqslant\theta\leqslant 0.\end{cases}\tag{1-3}$$

其中 $f,g:[t_0,\infty]\times Q_H\to\Re^n$ 连续可微， $Q_H=\{u\,|\,u\in[-h,0],\ \|x\|<H\}$ ，并且满足

$$\begin{cases}f(t,0)\equiv g(t,0)\equiv 0,\ \ |f(t,\psi)|\leqslant C,\\ |h(t,\psi)|\leqslant C,\ \ t\geqslant t_0,\ \ \psi\in Q_H,\ \ 0\leqslant h\leqslant\infty.\end{cases}\tag{1-4}$$

可以看出，$x\equiv 0$ 是中立型系统(1-3)的平衡点，因此称 $x\equiv 0$ 是中立型系统

(1-3)的平凡解. 而中立型系统与一般的时滞系统的区别在于系统的微分项不仅与当前状态 $x(t)$ 有关,还与之前某一个状态函数 $g(t,x_t)$ 有关. 而线性的中立型系统往往也可以转化为退化的线性一般时滞系统来研究，例如中立型系统(1-5):

$$\dot{x}(t)-C\dot{x}(t-\tau)=Ax(t)+Bx(t-h(t)), \tag{1-5}$$

可以转化为退化系统:

$$E\dot{z}(t)=\hat{A}z(t)+\hat{B}z(t-h(t))+\hat{C}z(t-\tau), \tag{1-6}$$

其中 $z(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$， $E=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$， $\hat{A}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{bmatrix}$， $\hat{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$， $\hat{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$. 这样我们就可以使用研究一般时滞微分系统的方法来研究中立型系统(1-3)的动力学性质了.

稳定性是动态系统的一个重要性质，它反映了动力系统的状态变量在一定初始条件下始终保持系统稳定的特性. 下面给出中立型系统的平衡点稳定的定义.

定义 1.2[2] 中立型系统(1-3)的平凡解称为

（1）稳定的，如果对任意的 $\varepsilon>0$， $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，对任意 $t\geqslant t_0$，当 $\|x_0\|\leqslant\delta(\varepsilon,t_0)$ 时有 $\|x(t,x_0)\|\leqslant\varepsilon$ 成立;

（2）吸引的，如果对任意的 $\varepsilon>0$， $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta(t_0)>0$，当 $\|x_0\|\leqslant\delta(t_0)$， $t\to+\infty$ 时有 $\|x(t,x_0)\|\leqslant\varepsilon$ 成立;

（3）渐近稳定的，如果系统的平衡点既是稳定的又是吸引的;

（4）指数稳定的，如果对任意的 $\varepsilon>0$， $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta(t_0)>0$， $\alpha>0$，对任意 $t\geqslant t_0$，当 $\|x_0\|\leqslant\delta(\varepsilon,t_0)$ 时有 $\|x(t,t_0,x_0)\|\leqslant\varepsilon \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}$ 成立.

定义 1.3[2] 如果存在常数 $\alpha>0$， $\gamma\geqslant 1$，对于任意的 $x(t)$ 有下式成立:

$$\|x(t)\|\leqslant\gamma\sup_{-\gamma^*\leqslant s\leqslant 0}\sqrt{\|\varphi(s)\|^2+\|\phi(s)\|^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}, \tag{1-7}$$

则称系统(1-3)是指数稳定的，其衰减度为 α.

1.2.2 基本引理

在进行系统稳定性研究时，为了得到保守型较少的稳定性条件，我们往往会使用一些矩阵不等式对所得的条件进行放缩. 为了后面的方便，我们引

入如下的引理.

引理 1.1[54] 对给定的对称常矩阵 $\Sigma_1, \Sigma_2>0$, Σ_3, 若 $\Sigma_1+\Sigma_3^{\mathrm{T}}\Sigma_2^{-1}\Sigma_3<0$ 成立，当且仅当

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_3^{\mathrm{T}} \\ \Sigma_3 & -\Sigma_2 \end{bmatrix}<0, \begin{bmatrix} -\Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_3^{\mathrm{T}} & \Sigma_1 \end{bmatrix}<0. \tag{1-8}$$

引理 1.2[59] 对任意矩阵 $\Phi\in\Re^{n\times n}$，常数 $\gamma>0$，如果函数 $w:[0,\gamma]\to\Re^n$ 可积，则下式成立：

$$\left(\int_0^{\gamma} w(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\Phi\left(\int_0^{\gamma} w(s)\mathrm{d}s\right)\leqslant\gamma\int_0^{\gamma} w^{\mathrm{T}}(s)\Phi w(s)\mathrm{d}s. \tag{1-9}$$

引理 1.3[3] 令 $V(x(0))=0$ 且 $w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\leqslant w_m^2$，如果下式成立：

$$\dot{V}(t,x_t)+\alpha V(t,x_t)-\beta w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\leqslant 0, \tag{1-10}$$

则对 $\forall t\geqslant t_0$ 有：$V(t,x_t)\leqslant\dfrac{\beta}{\alpha}w_m^2$.

引理 1.4[44] 设 $\alpha\in\Re^{n_a}$，$\beta\in\Re^{n_b}$，$N\in\Re^{n_a\times n_b}$，如果 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}\geqslant 0$，则对任意矩阵 $X\in\Re^{n_a\times n_a}$，$Y\in\Re^{n_a\times n_b}$ 及 $Z\in\Re^{n_b\times n_b}$，有下面不等式成立：

$$-2\alpha^{\mathrm{T}}N\beta\leqslant\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^{\mathrm{T}}-N^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}. \tag{1-11}$$

引理 1.5[44] 已知适当维数的矩阵 $Q=Q^{\mathrm{T}}, H, E, R=R^{\mathrm{T}}$，则对 $\forall F^{\mathrm{T}}F\leqslant R$，有：

$$Q+HFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0 \tag{1-12}$$

成立，当且仅当 $\exists\varepsilon>0$，使得：

$$Q+\varepsilon HH^{\mathrm{T}}+\eta^{-1}E^{\mathrm{T}}RE<0. \tag{1-13}$$

2 Lyapunov 直接方法

稳定性是动态系统的一个重要性能，保证系统的稳定性通常是控制器设计的最基本要求. 在古典控制中，分析一个系统的稳定性有 Routh 稳定判据、Nyquist 稳定判据，而且通过 Bode 图、根轨迹图可以分析系统的稳定性. 这些方法都是频域的方法，然而状态空间模型是时域的模型，并不能直接应用这些方法. 对于一般的时域动态系统的稳定性分析方法是由俄国人 Lyapunov 在 1892 年建立的，在他的博士论文 *The general problem of the stability motion* 中系统地研究了由微分方程描述的一般运动系统的稳定性问题，建立了著名的 Lyapunov 方法，为现代控制和非线性控制奠定了基础.

本章介绍判断系统稳定性的 Lyapunov 直接方法，并通过实例展示了几种使用线性不等式研究微分系统稳定性时常用的方法与技巧.

2.1 稳定性定理

Lyapunov 直接方法又称 Lyapunov 第二方法. 其步骤为：首先构造适当的 Lyapunov 泛函并对其进行求导，然后根据其导数的性质来研究系统的稳定性. 下面是一般时滞微分系统的稳定性定理.

定理 2.1[2] 若存在正定函数 $V(t,x_t)$，使下面不等式成立

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x_t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0\,, \tag{2-1}$$

则系统(1-1)的平凡解是稳定的.

证明 由 $\dot V(t,x_t)\leqslant 0$ 可得函数 $V(t,x_t)$ 是单调不增的，又因为 $V(t,x_t)$ 是正定函数，则对 $\forall\varepsilon>0$ 均存在 k 类函数 $\omega(t)$，使得下面不等式成立：

$$\varpi(\|x(t)\|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant V(t_0,x_{t_0})=V(t_0,\phi)\leqslant\varpi(\varepsilon)\,,\quad t\geqslant 0\,.$$

由于 $V(t_0,0)\equiv 0$ 且 $V(t,x_t)$ 连续，则 $\exists\delta(t_0,x_{t_0})$ 使得下式成立：

$$\varpi(|x(t)|)\leqslant\max_{\|\phi\|\leqslant\delta(\varepsilon,t_0)}V(t_0,\phi)\leqslant\varpi(\varepsilon)\,.$$

由此可知，对 $\forall t>0$ 有

$$\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$$

成立，因此系统(1-1)是稳定的. 由此定理得证.

中立型系统(1-3)的稳定性定理如下.

定理 2.2[2] 若差分系统 $x(t)-Cx(t-\tau)=0$ 是稳定的，且存在正定函数 $V(t,x_t)\in C^1[I\times\Re^n,\Re^+]$，使下面不等式成立：

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x_t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0\,, \tag{2-2}$$

则系统(1-3)的平凡解是稳定的.

证明 由 $\dot{V}(t,x_t)\leqslant 0$ 可得函数 $V(t,x_t)$ 是单调不增的，又因为 $V(t,x_t)$ 是正定函数，则对 $\forall\varepsilon>0$ 均存在 k 类函数 $\omega(t)$，使得下面不等式成立：

$$\varpi(\|x(t)\|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant V(t_0,x_{t_0})=V(t_0,\phi)\leqslant\varpi(\varepsilon)\,,\quad t\geqslant 0\,,$$

由于 $V(t_0,0)\equiv 0$ 且 $V(t,x_t)$ 连续，则 $\exists\delta(t_0,x_{t_0})$ 使得下式成立：

$$\varpi(\|x(t)\|)\leqslant\max_{\|\phi\|\leqslant\delta(\varepsilon,t_0)}V(t_0,\phi)\leqslant\varpi(\varepsilon)\,.$$

由 $\omega(t)$ 是 k 类函数以及差分系统 $x(t)-Cx(t-\tau)=0$ 稳定可知，对 $\forall t>0$ 有

$$\|x(t)\|\leqslant\varepsilon$$

成立，因此系统(1-3)是稳定的. 由此定理得证.

定理 2.3[2] 若差分系统 $x(t)-Cx(t-\tau)=0$ 是稳定的，且存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,x_t)\in C^1[I\times\Re^n,\Re^+]$ 和负定函数 $V_1(t,x_t)$，使在任何固定域 $0<\lambda\leqslant\|x\|\leqslant\mu<H$ 中，$\forall\delta>0$，$\exists t^*(\delta)$，当 $\exists t\geqslant t^*$ 时有：

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x_t)}{\mathrm{d}t}\leqslant V_1(t,x_t)+\delta\,, \tag{2-3}$$

则系统(1-3)的平凡解是渐近稳定的.

定理 2.4[2] 若差分系统 $x(t)-Cx(t-\tau)=0$ 是稳定的，且存在连续函数 $V(t,x_t)\in C^1[I\times\Re^n,\Re^+]$，满足：

（1）$\|x(t)\|\leqslant V(t,x_t)\leqslant K(\alpha)\|x(t)\|$，$x\in S_\alpha=\{x:\|x\|\leqslant\alpha\}$，$K(\alpha)>0$；

（2）$\dfrac{\mathrm{d}V(t,x_t)}{\mathrm{d}t} < -cV(t,x_t)$， $c > 0$，

则系统(1-3)的平凡解是指数稳定的.

2.2 线性矩阵不等式方法

Riccati 方法和线性矩阵不等式方法是常用的两种方法，它们都隶属于 Lyapunov 直接方法，其最大区别在于所得稳定性条件的形式各不相同：Riccati 方法得出的稳定性条件是线性的 Riccati 方程，而线性矩阵不等式方法得出的稳定性条件为一个或多个线性矩阵不等式表示. 然而随着 Matlab 推出了可求解线性矩阵不等式的矩阵工具箱后，线性矩阵不等式方法已经成为研究时滞系统稳定性的主要方法. 在本节将结合实例简单介绍使用线性矩阵不等式方法研究线性系统的稳定性.

例 2.1 考虑下面带离散时滞的线性系统的稳定性条件：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \\ x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \quad \forall\theta \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{2-4}$$

其中 $x(t) \in \Re^n$ 为系统的状态向量， h 是常离散时滞， A, B 为适当维数的常矩阵.

解 首先，我们构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t),$$

其中

$$V_1(t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t),$$

$$V_2(t) = \int_{t-h}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s,$$

其中矩阵 $P > 0$， $Q > 0$. 分别对 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 求导，得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) = 2x^{\mathrm{T}}(t)P[Ax(t) + Bx(t-h)] \\ &= x^{\mathrm{T}}(t)[PA + A^{\mathrm{T}}P]x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PBx(t-h), \end{aligned} \tag{2-5}$$

$$\dot{V}_2(t) = x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) - x^{\mathrm{T}}(t-h)Qx(t-h). \tag{2-6}$$

由此我们可得