普通高等教育“十二五”规划教材·经济管理类数学基础系列配套用书

概率论与数理统计
学习指导

（第二版）

李伯德　智　婕　主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

经济管理类数学基础系列配套用书

概率论与数理统计学习指导

（第二版）

李伯德　智　婕　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是“普通高等教育‘十二五’规划教材——经济管理类数学基础系列”《概率论与数理统计》(科学出版社 2015 年出版)配套使用的学习辅导与解题指南.

书中各章内容与主教材同步，每章包括基本要求、内容提要、典型例题、教材习题选解、自测题及自测题参考答案六个部分. 内容提要与典型例题部分是本书的重心所在，它是学生自学和教师上习题课的极好材料. 通过对内容和方法进行归纳总结，把基本理论、基本方法、解题技巧、数学应用等方面的教学要求，融于典型例题之中，从而达到举一反三、触类旁通的效果. 教材习题选解部分选择教材中较难的、具有代表性的一部分习题，给出了较详细的分析与解答. 自测题大多选自于各章相关的历年考试的典型试题，并给出了相应的参考答案，供读者复习和自测使用.

本书适合经济管理类专业和其他相关专业的学生学习概率论与数理统计课程使用，也可供报考研究生的学生复习使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/李伯德，智婕主编. —2 版. —北京：科学出版社，2015

普通高等教育“十二五”规划教材. 经济管理类数学基础系列配套用书

ISBN 978-7-03-044459-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李…②智… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 114498 号

责任编辑：相 凌 孙翠勤/ 责任校对：钟 洋
责任印制：赵 博/ 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
文林印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 6 月第 二 版 印张：13 1/2
2015 年 6 月第七次印刷 字数：272 000

定价：26.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

2011 年本书第一版出版以来，按照全国高等学校教学研究中心研究项目“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的要求，进行了四年的教学实践. 四年中，读者和使用本书的同行们提出了许多宝贵的修改意见和建议，这些意见和建议除了在平时的教学实践中不断吸纳外，借这次修订机会，对本书的部分内容也作了相应调整与修订，使其更符合先易后难、循序渐进的教学规律，本书是兰州财经大学“质量工程”——“经济数学基础系列课程教学团队(2013 年度)”教材建设的阶段性成果.

本书习题配置合理，难易适度，适当融入了一些研究生入学考试内容，选用了近年全国硕士研究生入学统一考试中的部分优秀试题，如 1998 考研真题用(1998)表示，2009 考研真题用(2009)表示. 教材每章后的习题均为(A)(B)两组，其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课的基本要求，(B)组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的学生练习.

各章中标有“ * ”的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或供读者自学用.

本书由李伯德、智婕主编. 第 1、4 章由樊馨蔓编写，第 2 章由智婕编写，第 3 章由李伯德编写，第 5、6 章由刘转玲编写，第 7、8 章由王媛媛编写，全书由主编统稿定稿.

尽管这次修订编者希望本书更符合现代教育教学规律，更符合大学数学教学的实际，更容易被读者所接纳，但仍可能存在不妥之处，恳请读者和同行继续批评指正.

编　者

2015 年 3 月

第一版前言

本书是中国科学院“十一五”规划教材——经济管理类数学基础系列《概率论与数理统计》(科学出版社出版)配套使用的学习辅导与解题指南,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考研究生的学生作为复习之用.

全书以提高大学生的数学素养,领会概率论与数理统计基本概念和理论、掌握概率论与数理统计的基本解题方法和思路为目的,精心编写而成. 书中包括教材的全部内容:随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量及其分布、大数定律与中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析. 每章均有基本要求、内容提要、典型例题、教材习题选解、自测题及自测题参考答案六个部分.

基本要求,既是对学习内容的要求,也是学习的重点;内容提要,指明学习要点,对有关概念、性质和定理作了深入分析与归纳,以方便读者课后复习;典型例题,是在教材已有例题的基础上,进一步扩展了例题范围,通过对典型例题的深入分析和详尽解答,帮助读者弄懂基本概念、提高分析能力、熟悉解题方法、掌握解题技巧;教材习题选解,对教材中有一定特点或难度较大的习题,给予详细的解答,解决读者在学习该课程时遇到的困难;自测题,是对本章学习内容的进一步扩展,有针对性地给出了一些综合性练习题,同时提供参考答案,以帮助学生增强自主学习的能力.

书的最后附有模拟试题及参考答案,以方便学生考试前的总复习.

本书由李伯德教授、李战存副教授主编. 第 1 章由李战存编写,第 2、3、5 章由智婕编写,第 4 章由李伯德编写,第 6、7 章由刘转玲编写,第 8、9 章由王媛媛编写,全书由主编统稿定稿.

由于编者水平所限,书中难免有不足之处,恳请读者及专家学者批评指正.

编　者

2011 年 3 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

一、基本要求

(1) 了解随机现象与随机试验，了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握随机事件之间的关系与运算.

(2) 了解随机事件频率的概念，理解随机事件概率的公理化定义，熟练掌握概率的基本性质.

(3) 熟悉古典概型、几何概型的条件及计算公式，能够正确计算几种基本古典概型事件的概率和几何事件的概率.

(4) 理解条件概率的概念，理解概率的乘法公式，理解全概率公式和贝叶斯公式，并会应用它们解决简单的实际问题.

(5) 理解事件的独立性概念，能够判定两个或有限个事件是否独立，熟悉 n 重伯努利试验序列概型.

二、内容提要

1. 随机事件及其有关概念

(1) 随机现象. 事先无法准确预知其结果的现象.

(2) 随机试验与样本空间. 对随机现象的观察称为随机试验，简称试验. 试验具有以下属性：①条件不变可重复；②结果可观察且所有结果是明确的；③每次试验将要出现的结果不确定.

(3) 样本点与与样本空间. 随机试验的每个可能的结果称为该试验的一个样本点或基本事件，记作 ω；一个随机试验的所有样本点构成的集合称为该试验的样本空间，记作 Ω.

(4) 随机事件. 样本空间中(具有某种性质)的子集称为随机事件，或试验的一个可观察特征称为该试验的随机事件，简称事件，记作 $A,B,\cdots$. 在试验中，一定发生的事件称为必然事件；一定不发生的事件称为不可能事件.

(5) 随机事件的集合表示. 既然随机事件是由满足相应特征的样本点构成的子集，因此事件可由集合表示. 事件 A 发生当且仅当样本点 $\omega\in A$.

2. 事件的关系与运算

(1) 事件的包含. 如果事件 A 发生必然导致 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$.

(2) 事件的相等. 如果事件 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称两事件 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

(3) 事件的并(和). “A 与 B 中至少有一个事件发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的并(和),记作 $A\cup B$ 或 $A+B$; $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 依次表示“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少一个发生”及“$A_1,A_2.\cdots,A_n,\cdots$ 中至少一个发生”的事件.

(4) 事件的交(积). “A 与 B 两个事件均发生”这一事件称为事件 A 与 B 的交(积),记作 $A\cap B$ 或 AB; $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 依次表示“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均发生”及“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 均发生”的事件.

(5) 事件的差. “事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A-B$.

(6) 互不相容事件. 若 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互不相容.

(7) 对立事件. 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互为对立事件.

(8) 完备事件组. 有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中(或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中),若 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$,且 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\Omega\left(\text{或}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\Omega\right)$,则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$)为一个完备事件组.

3. 事件的运算性质

1) 基本运算

(1) $\varnothing\subset A\subset\Omega$;

(2) $A-B=A\overline{B}=A-AB$;

(3) $\overline{A}=\Omega-A$;

(4) $\overline{\overline{A}}=A$;

(5) $A\cup B=A\cup(B-A)=(A-B)\cup(B-A)\cup(AB)$;

2) 运算律

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $A\cup\left(B\cup C\right)=(A\cup B)\cup C$,

$$A\cap\left(B\cap C\right)=\left(A\cap B\right)\cap C;$$

(3) 分配律 $A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$,

$$A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right);$$

(4) De Morgan 对偶律

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$

4. 事件的频率

在 n 次试验中,事件 A 发生的次数为 $\mu_n(A)$,称 $f_n(A)=\dfrac{\mu_n(A)}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率.

5. 随机事件的概率

(1) 描述性定义. 一个事件发生的可能性大小的度量.

(2) 统计定义. 在 n 次独立重复试验中,事件 A 发生的频率为 $f_n(A)$,当 $n\to\infty$时,$f_n(A)$趋于一个稳定值,这个稳定值就是事件 A 在每次试验中发生的概率.

(3) 公理化定义. 设 Ω 是样本空间,定义在 Ω 的事件类 F(全体事件构成的集合)上的实值函数 $P(\cdot)$,称为 Ω 上的一个概率测度或概率,它满足下列三条公理:

公理 1(非负性)　对任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

公理 2(正则性)　$P(\Omega)=1$;

公理 3(可列可加性)　对任意可数个两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

6. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(3) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容,则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$;

(4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant P(A_i)$;

(5) $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(6) 若 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,$P(A)\geqslant P(B)$;

(7) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

(8) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

$$\begin{aligned}P(A+B+C)=&P(A)+P(B)+P(C)\\&-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).\end{aligned}$$

7. 古典概型

1) 古典概型的假设条件

(1) 随机试验只有有限个可能的结果,即样本点(或基本事件)总数有限;

(2) 每一个样本点出现的可能性相同.

所讨论的问题是否符合等可能的假设,一般不可能根据条件验证,而常常是根据人们长期形成的"对称性"经验作出的,即人们根据对客观事物的长期认识作出的,而不是主观臆定的.

2) 古典概型的概率计算公式

设 Ω 是古典概型的样本空间,A 是事件,则 A 的概率

$$P(A)=\frac{A\text{ 中样本点(基本事件)总数}}{\Omega\text{ 中样本点(基本事件)总数}}.$$

在计算样本空间 Ω 和事件 A 所包含的基本事件个数时,一般要用到加法原理、乘法原理、排列方法、组合方法等计数方法.

3) 计算古典概率的基本知识——排列与组合公式

排列与组合公式的推导都基于如下两条计数原理.

(1) **加法原理**　如果完成某件事有 m 种不同的方式,第 i 种方式有 n_i 种方法,$i=1,2,\cdots,m$,那么完成这件事共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种方法.

(2) **乘法原理**　如果某件事需经 m 个步骤才能完成,其中第 i 步有 n_i 种方法,$i=1,2,\cdots,m$,那么完成这件事共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$ 种方法.

(3) **排列公式**　选排列　从 n 个不同元素中任取 k 个($1\leqslant k\leqslant n$)的不同排列总数记为 A_n^k 或 P_n^k,即

$$\mathrm{P}_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

$k=n$ 时称其为全排列,此时:

$$\mathrm{P}_n^n=\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!\ .$$

重复排列　从 n 个不同元素中每次取出一个,放回后再取下一个,如此连续取 k 次所得的排列称为重复排列,此种重复排列数共有 n^k 个. 注意这里的 k 允许大于 n.

(4) **组合公式**　组合　从 n 个不同元素中任取 k 个($1\leqslant k\leqslant n$)的不同组合总数为

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{\mathrm{P}_n^k}{k!}=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}.$$

C_n^k 有时记作 $\binom{n}{k}$,在此规定 $0!\ =1$ 与 $\mathrm{C}_n^0=1$,且 $\mathrm{P}_n^k=\mathrm{C}_n^k\cdot k!$,$\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}$.

重复组合　从 n 个不同元素中每次取出一个，放回后再取下一个，如此连续取 k 次所得的组合称为重复组合，此种重复组合总数为 C_n^{n+k-1}. 注意这里的 k 也允许大于 n.

在使用古典概率的计算公式时，如果事件的组成与顺序有关，则是排列问题；如果事件的组成与顺序无关，则是组合问题．有时二者都可用，但在计算样本空间 Ω 和事件 A 所包含的基本事件个数时，要么同时用排列，要么同时用组合，绝不能混用，在使用排列、组合公式时要特别注意识别有序与无序、重复与不重复．

8. 几何概型

1) 几何概型的假设条件

(1) 试验的样本空间 Ω 是 $\mathbf{R}$ 中的区间或 $\mathbf{R}^k(k\geqslant 2)$ 中的区域；

(2) 每一个样本点出现的可能性相同．

2) 几何概型的概率计算公式

对事件 $A\subset\Omega$ 有 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$，这里 $m(\cdot)$表示 A 的长度、面积或体积.

9. 条件概率及其性质

1) 条件概率的定义

若 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为事件 A 发生的条件下 B 发生的条件概率.

2) 条件概率的性质

条件概率满足以下三条公理：

(1) $P(\Omega|A)=1$；

(2) $P(B|A)\geqslant 0$；

(3) $A_1, A_2, \cdots$为一列两两不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\,|\,A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\,|\,A).$$

3) 计算条件概率的两种基本方法

(1) 公式法：在样本空间 Ω 中，先求概率 $P(AB)$和 $P(A)$，再按定义计算 $P(B|A)$；

(2) 压缩样本空间法：在压缩的样本空间 A 中求事件 B 的概率，就得到 $P(B|A)$.

10. 乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

1) 乘法公式

(1) 两个事件的情形

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1),\quad P(A_1)>0;$$
$$P(A_1A_2)=P(A_2)P(A_1|A_2),\quad P(A_2)>0.$$

(2) n 个事件的情形　若 $P(A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1,A_2,\cdots,A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

2) 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

3) 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意事件 $B(P(B)>0)$，有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(BA_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

11. 事件的独立性

1) 两两独立的定义

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若其中任何两个事件均相互独立，即 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

2) 相互独立的定义

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对任意的 k 个事件($2\leqslant k\leqslant n$)及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，均有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

3) 相互独立的性质

(1) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件均相互独立，特别地 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，将其中任意一个或若干个事件换成相应的对立事件，则新的事件组相互独立.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=1-P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\Big)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i)).$$

(4) 任意事件与不可能事件相互独立，也与必然事件相互独立.

(5) 任意两个非零概率事件，互不相容与独立不能同时成立.

4) 可数个事件的两两独立与相互独立

(1) 两两独立　$A_1,A_2,\cdots$ 是可数个事件，如果其中任意两个事件均相互独

立,则称 $A_1,A_2,\cdots$ 两两独立.

(2) 相互独立　$A_1,A_2,\cdots$ 是可数个事件,如果其中任意有限个事件均相互独立,则称 $A_1,A_2,\cdots$ 相互独立.

12. 独立重复试验序列概型

(1) 独立试验序列　如果一系列试验,各次试验的结果之间相互独立,则称这一系列试验为一个独立试验序列.

(2) 伯努利试验　只有两个可能结果的试验称为伯努利试验.

(3) 伯努利试验序列　独立重复进行的一系列伯努利试验称为伯努利试验序列.

(4) 伯努利定理　在一次试验中,事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次独立重复试验中"事件 A 恰好发生 k 次"的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},$$

其中 $q=1-p$.

(5) 等待概率　在伯努利试验序列中,设每次试验中事件 A 发生的概率为 p,则"直到第 k 次试验事件 A 才首次发生"的概率为

$$g(k,p)=q^{k-1}p.$$

三、典 型 例 题

1. 有关基本概念、基本运算与基本性质

例 1　观察 1h 中落在地球某一区域的宇宙射线数,则其样本空间可取为(　　).

解　该试验的可能的结果一定是非负整数,且很难指定一个数作为它的上界,故该试验的样本空间可取为 $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

例 2　设 A,B,C,D 是四个事件,试用它们表示下列各事件:

(1) A,B 都发生而 C,D 都不发生;

(2) A,B,C,D 恰好发生 2 个;

(3) A,B,C,D 至少发生 1 个;

(4) A,B,C,D 至多发生 1 个.

解　(1) $AB\bar{C}\bar{D}$;

(2) $AB\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}D+A\bar{B}\bar{C}D$;

(3) $\Omega-\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 或 $A+B+C+D$;

(4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$.

例 3　设 A,B,C 为三个事件,则"A,B,C 中至少有一个不发生"这一事件可

表示为(　　).

(A) $AB+AC+BC$；　(B) $A+B+C$；

(C) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；　(D) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

分析　根据事件并的意义,凡是出现“至少有一个”,均可由“并”来表示,本题中,要表示的事件是“至少有一个不发生”,由于不发生可由对立事件来表示,于是“A,B,C至少有一个不发生”等价于“$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$中至少有一个发生”,故答案(D)正确.

答案　(D).

例 4　设三个元件寿命分别为 T_1,T_2,T_3,并联成一个系统,则只要有一个元件能正常工作,系统便能正常工作,事件“系统的寿命超过 t”可表示为(　　).

(A) $\{T_1+T_2+T_3>t\}$；　(B) $\{T_1T_2T_3>t\}$；

(C) $\{\min\{T_1,T_2,T_3\}>t\}$；　(D) $\{\max\{T_1,T_2,T_3\}>t\}$.

分析　“系统的寿命超过 t”等价于“至少有一个元件的寿命超过 t”,这又等价于“三个元件中最大的寿命超过 t”,即(D)是正确的.

答案　(D).

例 5　A,B 是两个事件,则下列关系正确的是(　　).

(A) $(A-B)+B=A$；　(B) $AB+(A-B)=A$；

(C) $(A+B)-B=A$；　(D) $(AB+A)-B=A$.

分析　这类问题关键在于正确理解事件运算的定义和性质,可借助维恩图来分析选项.(A)的左边的运算结果应该等于 $A+B$ 而不是 A；选项(C)左边运算的含义是 A 发生且 B 不发生,应为 $A-B$；选项(D)左边的括号中运算结果实际上等于 A,从而左边运算结果为 $A-B$；选项(B)左边实际上等于 $AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$,从而选项(B)是正确的.

答案　(B).

2. 用概率的性质计算或估计概率

例 6　已知 $P(A)=0.6,P(AB)=0$,则 $P(\overline{A}\cup B)=$________.

解　
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cup B)&=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=P(\overline{A})+P(B)-(P(B)-P(AB))\\&=P(\overline{A})+P(AB)=1-P(A)=0.4,\end{aligned}$$

所以,$P(\overline{A}\cup B)=0.4$.

例 7　已知 $P(B)=0.4,P(AB)=0.2,P(A\overline{B})=0.6$,则 $P(\overline{A}\overline{B})=$________.

解　
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))\\&=1-0.2-P(A)=0.8-(P(AB)+P(A\overline{B}))=0.8-0.8=0.\end{aligned}$$

所以,$P(\overline{A}\overline{B})=0$.

例 8　设 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$,证明 $0.3\leqslant P(AB)\leqslant 0.6$.

证　因为 $AB\subset A, AB\subset B$，所以 $P(AB)\leqslant P(A), P(AB)\leqslant P(B)$，因此

$$P(AB)\leqslant \min\{P(A), P(B)\}=0.6.$$

又

$$1\geqslant P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

所以，

$$P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1=0.6+0.7-1=0.3.$$

故 $0.3\leqslant P(AB)\leqslant 0.6$.

注　一般地，有 $P(A)=p, P(B)=q$，则 $p+q-1\leqslant P(AB)\leqslant \min\{p,q\}$.

例 9　设 $A_i\subset A, i=1,2,3$. 证明：

$$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

证　$P(A)\geqslant P(A_1A_2A_3)\geqslant P(A_1A_2)+P(A_3)-1$

$$\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1+P(A_3)-1=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

注　上述结果可推广到 n 个事件的情形.

3. 古典概型的概率计算

1) 袋中取球问题

例 10　一袋子中装有 10 个大小相同的球，其中 3 个黑球，7 个白球，求：

(1) 从袋子中任取一球，这个球是黑球的概率；

(2) 从袋子中任取两球，刚好一个白球一个黑球的概率以及两个球全是黑球的概率.

分析　这是古典概型中的一类最基本的问题，它的特点是所考虑的事件中只涉及球的结构，不涉及球的顺序，因而计算样本点数(即基本事件数)时，只需考虑组合数.

解　(1) 记事件 A 为“从袋子中任取一球是黑球”，10 个球中任取一个，共有 $C_{10}^1=10$ 种取法，10 个球中有 3 个黑球，取到黑球的取法有 $C_3^1=3$ 种，从而根据古典概率计算，得

$$P(A)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{10}.$$

(2) 记事件 B 为“从袋子中任取两球，刚好取到一个白球一个黑球”，事件 C 为“从袋子中任取两球，两球均为黑球”，则 10 个球中任取两球的取法有 C_{10}^2 种，其中刚好一个白球一个黑球的取法有 $C_3^1\cdot C_7^1$ 种，两个球均是黑球的取法有 C_3^2 种，于是所求概率分别为

$$P(B)=\frac{C_3^1\cdot C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15},$$

$$P(C)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}.$$

例 11　一袋中有 $m+n$ 个球，其中 m 个黑球，n 个白球，现随机地从袋中取出 k 个球($k\leqslant m+n$)，求其中恰好有 $l(l\leqslant n)$ 个白球的概率.

分析　本题只涉及球的结构，不涉及球的顺序，所以只考虑组合数即可．许多问题常常归结为此类问题(如超几何分布).

解　记事件 A 表示"k 个球中恰好有 l 个白球". 首先，从 $m+n$ 个球中任取 k 个球，取法共有 C_{m+n}^k 种，即基本事件总数为 C_{m+n}^k. 其次，这些取法中恰好有 l 个白球的取法共有 $C_n^lC_m^{k-l}$，即 A 所含基本事件总数为 $C_n^lC_m^{k-l}$. 所以 $P(A)=\dfrac{C_n^lC_m^{k-l}}{C_{m+n}^k}$.

例 12　一袋中装有 $m+n$ 个球，其中 m 个黑球，n 个白球，现随机地从中每次取一个球，求下列事件的概率：

(1) 取后不放回地取，A="第 i 次取到的是白球"；

(2) 取后有放回地取，B="第 i 次取到的是白球".

分析　本题(1)中取球是按顺序取的，涉及取球的顺序，所以在计算样本点数(即基本事件数)时，要用排列数．本题(2)中是有放回的取球，计算取法要用重复排列数，比如，$m+n$ 个球，每次取一个球，有 $m+n$ 种取法.

解　(1) $m+n$ 个球按顺序依次取完共有 $(m+n)!$ 种取法，其中第 i 次取出的是白球的取法，按乘法原理共有 $C_n^1(m+n-1)!$ 种，于是事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_n^1(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{n}{m+n}.$$

(2) 第 i 次取球的取法共有 $(m+n)^i$ 种，"第 i 次取到的是白球"的取法，根据乘法原理，共有 $C_n^1(m+n)^{i-1}$ 种．于是事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{C_n^1(m+n)^{i-1}}{(m+n)^i}=\frac{n}{m+n}.$$

注　尽管两事件的概率相等，但含义不同，算法不同．还应注意两种不同试验样本空间样本点的计算．此外，(1) 即为抽签问题.

例 13　一袋中装有 $m+n$ 个球，其中 m 个黑球，n 个白球，现随机地从中每次取一个球，求下列事件的概率：

(1) 取后不放回地取，C="第 i 次才取到白球"；

(2) 取后有放回地取，D="第 i 次才取到白球".

分析　对于(1)而言，同前例(1)，样本空间基本事件总数为 $(m+n)!$，而 C="第 i 次才取到白球"等价于"前 $i-1$ 次取到的全是黑球，而且第 i 次取到的是白球"，这里与顺序有关. 同前例(2)，本题(2)的样本空间基本事件总数为 $(m+n)^i$. 而 D="第 i 次才取到白球"等价于"前 $i-1$ 次取到的都是黑球(共有 m^{i-1} 种取法)