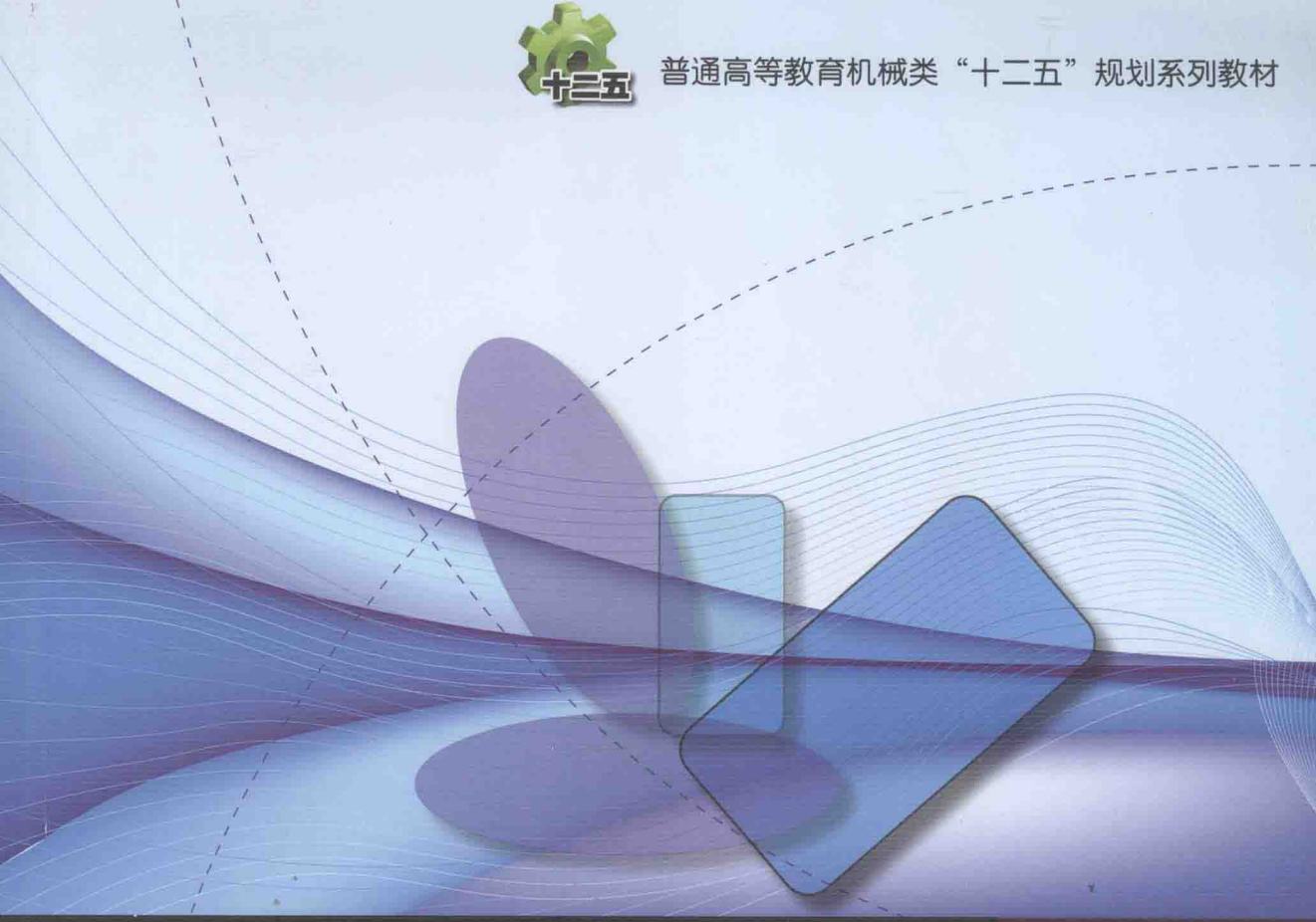




普通高等教育机械类“十二五”规划系列教材



# ANSYS有限元基础教程 (第2版)

王新荣 主编



Basic  
Course



中国工信出版集团



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育机械类“十二五”规划系列教材

# ANSYS 有限元基础教程（第2版）

王新荣 主编

初旭宏 刘国华 副主编

李 珊 刘贺平 参编

王俊发 主审

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书介绍了有限元法的基础原理、ANSYS 软件操作、建模方法、结果分析及工程应用,坚持理论与实践的结合,强调实用性和可操作性。

全书分为三部分,第一部分由第 1~4 章组成,介绍有限元法的基本原理和分析过程;第二部分由第 5~9 章组成,介绍 ANSYS 软件的基本操作;第三部分由第 10~11 章组成,介绍有限元分析的工程应用。本书内容包括有限元法的基本理论、平面问题的有限元法、空间问题和轴对称问题的有限元法、等参数单元、ANSYS 软件的实体建模技术、网格划分技术、施加载荷与求解、结果后处理技术及工程应用实例。为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者,在第 1 章对有限元法中涉及的弹性力学基本知识做了简要介绍。

本书是有限元法的入门教材,简明易学,适合作为机械工程、工程力学、土木建筑、材料冶金、航空航天等专业本科生及研究生的教材,也可作为工程技术人员了解有限元法和 ANSYS 软件的快速入门参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

ANSYS 有限元基础教程 / 王新荣主编. —2 版. —北京: 电子工业出版社, 2015.6  
ISBN 978-7-121-26095-7

I. ①A… II. ①王… III. ①有限元分析—应用程序—教材 IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 103812 号

策划编辑: 赵玉山

责任编辑: 赵玉山

印 刷: 涿州市京南印刷厂

装 订: 涿州市京南印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 18 字数: 460 千字

版 次: 2011 年 4 月第 1 版

2015 年 6 月第 2 版

印 次: 2015 年 6 月第 1 次印刷

印 数: 3000 册 定价: 38.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线: (010) 88258888。

# 前 言

“有限元法”是伴随着电子计算机技术的普及应用而迅速发展起来的一种非常有效的数值计算方法，在当今工程分析中获得了最为广泛的应用。目前有限元法已经成为工程设计和科研领域不可或缺的一项重要技术和分析手段，解决了大量的实际问题，为国民经济建设做出了巨大贡献。

本书全面、系统地介绍了有限元法的基本原理、ANSYS 软件操作、结果分析及工程应用。在兼顾基础知识的同时，强调实用性和可操作性。让读者不仅对有限元原理及方法有较全面的了解，更重要的是学会如何使用有限元法解决实际问题。

读者可以跟随本书所介绍的分析步骤和过程快速入门，在比较短的时间内，既能知其然，又能知其所以然，真正掌握 ANSYS 有限元分析方法，并能灵活地应用于实际问题中。本书坚持理论与实践紧密结合的原则，将有限元理论与 ANSYS 操作揉合在一起，以期有助于促进有限元理论与 ANSYS 软件的学习、应用、推广与普及。

本书分为三部分，第一部分由第 1~4 章组成，介绍有限元法的基本原理及方法；第二部分由第 5~9 章组成，介绍 ANSYS 软件的操作；第三部分由第 10~11 章组成，介绍 ANSYS 有限元分析的工程应用。具体内容为：第 1 章介绍有限元法的基本思想及基本步骤，并通过弹性力学问题来介绍有限元法的基本理论；第 2 章以弹性力学平面问题为对象，详细介绍和讨论有限元法的基本原理和过程；第 3 章介绍空间问题和轴对称问题的有限元法；第 4 章讲述有限元法中的等参数单元；第 5 章主要介绍 ANSYS 软件的基本知识、各种常用菜单与对话框的基本操作方法，该部分内容是熟练使用 ANSYS 软件的基础；第 6 章从实体模型的基本概念讲起，详细介绍 ANSYS 实体建模的思路及方法，包括自底向上建模、自顶向下建模、布尔运算、编辑图元等；第 7 章介绍网格划分与创建有限元模型技术；第 8 章介绍 ANSYS 施载与求解技术，包括求解器的菜单系统、基本求解步骤、载荷施加以及载荷步设置、求解控制等内容；第 9 章介绍后处理技术，包括通用后处理技术和时间历程后处理技术，其中包括读取结果数据、结果输出方式控制、图形显示结果以及抓图、动画显示结果，变量的定义和存储、变量的数学运算、变量数据的显示和变形过程的动画显示等内容；第 10 章介绍静力分析，包括结构静力分析简介及分析实例；第 11 章介绍动力学分析，包括动力分析概念、类型、步骤以及动力学分析实例。

本书第 2、10、11 章由佳木斯大学的王新荣编写；第 7~9 章由佳木斯大学的初旭宏编写；第 3、5 章由黑龙江大学的刘国华编写；第 1、4 章由广东省心血管病研究所的李珊编写；第 6 章由哈尔滨工程大学的刘贺平编写。王俊发教授对全书进行了仔细审阅。

在本书编写过程中，参考了大量的教材、专著和论文等文献资料，在此表示感谢。

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请专家和广大读者批评指正。

编 者

2015 年 1 月

# 目 录

<b>第 1 章 有限元法简介</b> .....	(1)
1.1 有限元法的产生 .....	(1)
1.1.1 有限元法的发展过程 .....	(1)
1.1.2 有限元法的基本思想 .....	(2)
1.1.3 有限元法的分类 .....	(3)
1.2 有限元法的步骤 .....	(3)
1.2.1 有限元法基本步骤 .....	(3)
1.2.2 有限元解的误差及产生原因 .....	(5)
1.2.3 有限元法的特点 .....	(5)
1.3 有限元法的应用 .....	(6)
1.3.1 有限元法的应用领域 .....	(6)
1.3.2 有限元法在工程中的应用 .....	(7)
1.3.3 有限元法在产品开发中的作用 .....	(8)
1.4 弹性力学基本知识 .....	(9)
1.4.1 弹性力学的基本假设 .....	(9)
1.4.2 弹性力学的基本变量 .....	(9)
1.4.3 弹性力学的基本方程 .....	(12)
1.4.4 弹性问题的能量原理 .....	(15)
1.4.5 弹性力学的平面问题 .....	(17)
习题 .....	(21)
<b>第 2 章 平面问题的有限元法</b> .....	(22)
2.1 结构的离散化 .....	(22)
2.2 单元分析 .....	(23)
2.2.1 位移函数 .....	(23)
2.2.2 单元应变 .....	(27)
2.2.3 单元应力 .....	(28)
2.2.4 单元刚度矩阵 .....	(28)
2.3 单元等效节点力 .....	(31)
2.4 整体分析 .....	(33)
2.5 有限元法解题过程与算例 .....	(38)
2.6 边界条件的处理 .....	(45)
2.7 计算结果的整理 .....	(46)
2.8 矩形单元 .....	(47)
2.8.1 位移函数 .....	(48)

2.8.2	单元应变	(49)
2.8.3	单元应力	(49)
2.8.4	单元刚度矩阵	(50)
2.8.5	单元等效节点力	(50)
2.8.6	整体平衡方程	(50)
2.8.7	矩形单元与三角形单元比较	(51)
2.8.8	解答的收敛性	(51)
	习题	(51)
<b>第 3 章 空间问题和轴对称问题有限元法</b>		(54)
3.1	空间问题的特点	(54)
3.2	采用四面体单元解一般空间问题	(54)
3.2.1	结构离散化	(54)
3.2.2	单元位移函数	(55)
3.2.3	单元的应变与应力	(56)
3.2.4	单元刚度矩阵	(57)
3.2.5	单元等效节点力	(58)
3.3	轴对称问题的有限元法	(59)
3.3.1	轴对称问题定义	(59)
3.3.2	基本变量和基本方程	(59)
3.3.3	轴对称问题的网格划分	(60)
3.3.4	轴对称问题的单元分析	(61)
	习题	(66)
<b>第 4 章 等参数单元与数值积分</b>		(68)
4.1	等参数单元的基本概念	(68)
4.2	平面 8 节点四边形等参数单元	(70)
4.2.1	单元位移函数	(71)
4.2.2	单元应变	(73)
4.2.3	单元应力	(74)
4.2.4	单元刚度矩阵	(75)
4.3	空间 20 节点六面体等参数单元	(76)
4.3.1	单元位移函数	(76)
4.3.2	单元应变	(77)
4.3.3	单元应力	(79)
4.3.4	单元刚度矩阵	(80)
4.3.5	单元等效节点力	(81)
4.4	高斯求积法	(82)
	习题	(85)
<b>第 5 章 ANSYS 软件简介</b>		(87)
5.1	ANSYS 概述	(87)

5.1.1	ANSYS 简介	(87)
5.1.2	ANSYS 启动、退出与 GUI 环境	(87)
5.2	ANSYS 常用菜单与对话框操作	(89)
5.2.1	主菜单	(89)
5.2.2	工具菜单	(90)
5.2.3	输入窗口	(94)
5.2.4	快捷功能图标按钮	(94)
5.2.5	工具条按钮	(94)
5.2.6	可见/隐藏按钮	(95)
5.2.7	对话框执行按钮	(95)
5.2.8	图形变换对话框	(95)
5.2.9	图形拾取	(97)
5.3	ANSYS 的坐标系	(98)
5.3.1	总体坐标系	(99)
5.3.2	局部坐标系	(99)
5.3.3	工作平面	(101)
5.3.4	激活坐标系(当前坐标系)	(104)
5.4	ANSYS 有限元分析过程及实例入门	(105)
5.4.1	ANSYS 有限元分析的基本步骤	(105)
5.4.2	ANSYS 分析实例入门	(106)
	习题	(116)
<b>第 6 章 实体建模技术</b>		(117)
6.1	实体建模概述	(117)
6.1.1	ANSYS 实体建模的方法	(117)
6.1.2	ANSYS 实体建模菜单系统	(118)
6.2	创建基本几何对象	(118)
6.2.1	关键点的创建	(118)
6.2.2	线的创建	(120)
6.2.3	面的创建	(123)
6.2.4	体的创建	(127)
6.3	布尔运算	(132)
6.4	拖拉	(135)
6.5	编辑功能	(135)
6.5.1	缩放	(136)
6.5.2	移动	(137)
6.5.3	复制	(137)
6.5.4	镜像	(138)
6.5.5	编辑操作综合训练	(139)
6.6	合并重合几何对象	(141)
6.7	删除几何对象	(142)

6.8 轴承座实体建模实例	(142)
习题	(149)
<b>第7章 网格划分与创建有限元模型技术</b>	(151)
7.1 创建有限元模型概述	(151)
7.1.1 ANSYS 创建有限元模型的方法	(151)
7.1.2 创建有限元模型的基本过程	(151)
7.2 定义单元属性	(152)
7.2.1 定义单元类型	(152)
7.2.2 定义实常数	(154)
7.2.3 定义材料属性	(156)
7.3 直接法创建有限元模型实例	(159)
7.4 网格划分控制	(162)
7.4.1 网格划分工具	(163)
7.4.2 设置单元属性	(163)
7.4.3 网格密度控制	(164)
7.4.4 单元尺寸控制	(165)
7.4.5 单元形状控制	(167)
7.4.6 网格划分器选择	(168)
7.4.7 网格加密操作	(168)
7.5 清除实体模型上的网格	(169)
习题	(170)
<b>第8章 施加载荷与求解</b>	(171)
8.1 求解概述	(171)
8.2 单载荷步求解过程	(171)
8.2.1 选择分析类型	(171)
8.2.2 设置分析类型选项	(172)
8.2.3 载荷及其分类	(173)
8.2.4 载荷步与载荷子步	(173)
8.2.5 设置载荷步选项	(173)
8.2.6 求解控制对话框	(174)
8.3 多载荷步求解	(175)
8.4 定义载荷	(176)
8.4.1 施加载荷的途径	(176)
8.4.2 定义载荷菜单系统	(176)
8.4.3 载荷显示	(176)
8.5 施加结构载荷	(177)
8.5.1 施加位移约束	(177)
8.5.2 施加集中力载荷	(180)
8.5.3 施加压力载荷	(182)



8.5.4	施加体载荷	(185)
8.5.5	施加惯性载荷	(186)
8.5.6	施加特殊载荷	(187)
8.6	进行求解	(187)
8.6.1	模型检查	(188)
8.6.2	选择合适的求解器	(188)
8.6.3	求解的实施	(189)
8.6.4	中断和重新启动	(190)
	习题	(190)

## 第9章 后处理技术 (192)

9.1	后处理概述	(192)
9.1.1	后处理器	(192)
9.1.2	结果文件	(192)
9.1.3	结果数据	(192)
9.2	通用后处理技术	(193)
9.2.1	通用后处理的一般步骤	(193)
9.2.2	选择结果文件与结果数据	(193)
9.2.3	查看结果文件包含的结果序列	(194)
9.2.4	读入用于后处理的结果序列	(194)
9.2.5	结果输出方式控制	(194)
9.2.6	图形显示结果	(195)
9.2.7	列表显示结果信息	(198)
9.2.8	查询节点及单元结果	(200)
9.2.9	抓取结果显示图片	(200)
9.2.10	动画显示结果	(201)
9.3	时间历程后处理技术	(201)
9.3.1	定义和存储变量	(202)
9.3.2	变量的操作	(205)
9.3.3	查看变量	(208)
9.3.4	动画技术	(211)
	习题	(213)

## 第10章 静力分析 (214)

10.1	结构静力分析简介	(214)
10.2	钢支架的平面问题分析	(214)
10.3	联轴器的三维结构分析	(220)
10.4	转轮的轴对称结构分析	(228)
10.5	轮子的周期对称结构分析	(238)
10.6	悬臂梁的几何非线性分析	(242)
	习题	(247)

<b>第 11 章 动力学分析</b> .....	(248)
11.1 ANSYS 动力分析简介 .....	(248)
11.1.1 动力分析的概念 .....	(248)
11.1.2 动力分析的类型 .....	(248)
11.1.3 动力分析的基本步骤 .....	(249)
11.2 飞机机翼的模态分析 .....	(254)
11.3 弹簧质量系统的谐响应分析 .....	(260)
11.4 钢梁的瞬态动力学分析 .....	(266)
习题 .....	(276)
<b>参考文献</b> .....	(278)

# 第 1 章

## 有限元法简介

### 1.1 有限元法的产生

随着现代工业技术的发展,不断要求设计高质量、高水平的大型、复杂和精密的机械及工程结构。为此人们必须预先通过有效的计算手段,确切地预测即将诞生的机械和工程结构在未来工作时所发生的应力、应变和位移状况。但是传统的一些方法往往难以完成对工程实际问题的有效分析,弹性力学的经典理论由于求解偏微分方程边值问题的困难,只能解决结构形状和承受载荷较简单的问题,对于几何形状复杂、不规则边界、有裂缝或厚度突变,以及几何非线性、材料非线性等问题,试图按经典的弹性力学方法获得解析解是十分困难的,甚至是不可能的。因此,需要寻求一种简单而又精确的数值计算方法,有限元法正是为适应这种要求产生和发展起来的一种十分有效的数值计算方法。

有限元法自问世以来,在其理论和应用研究方面都得到了快速、持续不断的发展。目前,有限元法已经成为工程设计和科研领域的一项重要分析技术和手段。

#### 1.1.1 有限元法的发展过程

有限元法离散化的思想可以追溯到 20 世纪 40 年代。1943 年 R. Courant 在求解扭转问题时为了表征翘曲函数,首次将截面分成若干三角形区域,在各个三角形区域设定一个线性的翘曲函数,求得扭转问题的近似解,其实质就是有限元法分片近似、整体逼近的基本思想。与此同时,一些应用数学家和工程师由于各种原因也涉及过有限元的概念,但由于受到当时计算能力的限制,这些工作并没有引起人们的注意,被认为没有多大应用价值,直到电子计算机出现并得到应用之后,这一思想才引起关注。

有限元法第一次成功的尝试是 1956 年波音公司的 Turner、Clough 等人在分析飞机结构时,将分片近似、整体逼近的思想和结构力学的矩阵位移法应用于弹性力学的平面问题,采用直接刚度法,按照弹性力学的基本原理建立了分片小区域(即三角形单元)上的特性方程,首次采用计算机求解,给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。1960 年 Clough 在题为“平面应力分析的有限单元法”的论文中首次使用有限单元法一词。此后这一名称得到了广泛承认,这一方法也被大量工程师开始用于处理结构分析、流体和热传导等复杂问题。

20 世纪 60~70 年代,是有限元迅速发展的时期,除力学界外,大量数学家也参与了这一工作。1967 年, O. C. Zienkiewicz 和 Y. K. Cheung (张佑启) 出版了第一本有关有限元分析的专著《连续体和结构的有限元法》,此书是有限元法的名著,后更名为《有限单元法》。1972 年, J. T. Oden 出版了第一本处理非线性连续介质问题的专著《非线性连续体的有限元法》。从此,

有限元法就以坚实的理论基础和完美的计算格式屹立于数值计算方法之林,被认为是一种完美无缺和无所不能的方法。

近几十年来,有限元法得到迅速发展,已出现多种新型单元和求解方法。自动网格划分和自适应分析技术的采用,也大大加强了有限元法的解题能力。由于有限元法的通用性及其在科学研究和工程分析中的作用和重要地位,众多著名公司更是投入巨资来研发有限元分析软件,推动了有限元分析软件的巨大发展,使有限元法的工程应用得到迅速普及。目前在市场上得到认可的国际知名有限元分析通用软件有 ANSYS、NASTRAN、MARC、ADINA、ABAQUS、ALGOR、COSMOS 等,还有一些适用特殊行业的专用软件,如 DEFORM、AUTOFORM、LS-DYNA 等。

我国的力学工作者为有限元方法的初期发展也做出了许多贡献。近几十年来,我国在有限元应用及软件开发方面也做了大量的工作,取得了一定的成绩,只是和国外的成熟产品相比还存在较大的差距。

经过半个世纪的发展,有限元法已经相当成熟,作为一种通用的数值计算方法,已经渗透到许多科研和工程应用领域。基于其良好的理论基础、通用性和实用性,可以预计,随着现代力学、计算数学、计算机技术、CAD 技术等的发展,有限元法必将得到进一步的发展和完善,并在国民经济建设和科学技术领域发挥更大的作用。

### 1.1.2 有限元法的基本思想

有限元法是一种基于变分法而发展起来的求解微分方程的数值计算方法,该方法以计算机为手段,采用分片近似,进而逼近整体的研究思想求解物理问题。

有限元法的基本思想概括为“化整为零、集零为整”。首先,将物体(或求解域)离散为有限个互不重叠仅通过节点相互连接的子域(即单元),原始边界条件也被转化为节点上的边界条件,此过程常称为离散化。其次,在每个单元内,选择一种简单近似函数来分片逼近未知单元内的位移分布规律,即分片近似,并按弹性理论中的能量原理(或用变分原理)建立单元节点力和节点位移之间的关系。最后,把所有单元的这种关系式集合起来,就得到一组以节点位移为未知量的代数方程组,解这些方程组就可以求出物体上有限个节点的位移。这就是有限元法的创意和精华所在。

图 1-1 是用有限元法对直齿圆柱齿轮的轮齿进行的变形和应力分析,其中图 1-1(a)为有限元模型,

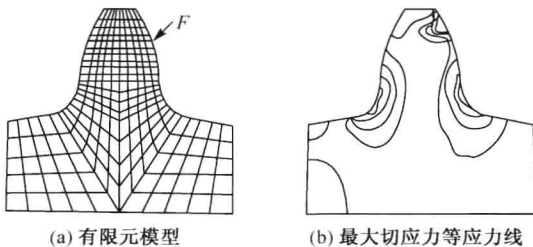


图 1-1 对直齿圆柱齿轮的轮齿进行的变形和应力分析

图 1-1(b)是最大切应力等应力线图。在图 1-1(a)中采用八节点四边形等参数单元把轮齿划分成网格,这些网格称为单元。网格间相互联接的点称为节点。网格与网格的交界线称为边界。显然,图中的节点数是有限的,单元数目也是有限的,这就是“有限单元”一词的由来。

在整个有限元分析过程中,离散化是分析的基础。有限元法的离散对单元形状和大小没有规则划分的限制,单元可以为不同形状,且不同单元可以相互连接组合。所以,有限元法可以模型化任何复杂几何形状的对象或求解区域,离散精度高。

分片近似是有限元法的核心。有限元法是应用局部的近似解来建立整个求解域的解的一种方法。针对一个单元来选择近似函数,积分计算也是在单元内完成,由于单元形状简单,一般采用低阶多项式函数就能较好地逼近真实函数在该单元上的解,此过程可认为是里兹法的一种局部化应

用。而整个求解域内的解可以看作是所有单元近似解的组合。对于整个求解域，只要单元上的近似函数满足收敛性要求，随着单元尺寸的不断缩小，有限元法提供的近似解将收敛于问题的精确解。

矩阵表示和计算机求解是有限元法的关键。因为有限元方程是以节点值和其导数值为未知变量的，节点数目多，形成的线性方程组维数很高，一般工程问题都有成千上万，复杂问题可达百万或更多。所以，有限元方程必须借助矩阵进行表示，只有利用计算机才能求解。

### 1.1.3 有限元法的分类

有限元法从选择基本未知量的角度来看，可分为三类：位移法、力法和混合法。

(1) 位移法：以节点位移为基本未知量的求解方法。

(2) 力法：以节点力为基本未知量的求解方法。

(3) 混合法：一部分以节点位移，另一部分以节点力作为基本未知量的求解方法。

由于位移法通用性较强，计算机程序处理简单、方便，因此得到广泛的应用。本书只讨论最为普遍的位移法。

## 1.2 有限元法的步骤

### 1.2.1 有限元法基本步骤

将有限元分析的基本步骤归纳为三大步骤：结构离散化、单元分析和整体分析。分别介绍如下。

#### 1. 结构离散化

结构离散是有限元法分析的基础，是进行有限元分析的第一步。所谓结构离散，就是用假想的线或面将连续物体分割成由有限个单元组成的集合体，且单元之间仅在节点处连接，单元之间的作用仅由节点传递。如图 1-2 所示为平面连续体被离散为三角形单元的集合。

单元和节点是有限元法中两个重要的概念。从理论上讲，单元形状是任意的，没有形状的限制，但在实际计算中，常用的单元形状都是一些简单的形状，如一维的线单元，二维的三角形单元、矩形单元、四边形单元，三维的四面体单元、五面体单元、六面体单元等。可见，不管单元取什么样的形状，一般情况下，单元的离散边界总不可能与求解区域的真实边界完全吻合，这就带来了有限元法的一个基本近似性——几何近似。在一个具体的机械结构中，确定单元的类型和数目，以及哪些部位的单元可以取得大一些，哪些部位单元应该取得小一些，需要由经验做出判断。单元划分越细，则描述变形情况越精确，即越接近实际变形，但计算量越大。

所以有限元法中分析的结构已不是原有的物体或结构，而是同样材料的众多单元以一定方式连结成的离散物体。这样，用有限元分析计算所获得的结果只是近似的。如果划分单元数目足够多而又合理，则所获得的计算结果就越逼近实际情况。

#### 2. 单元分析

单元分析包括三方面内容。

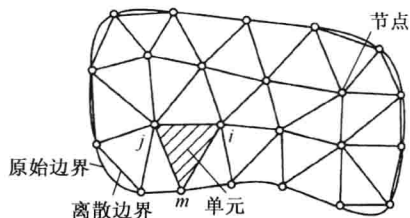


图 1-2 连续体的离散

### (1) 选择位移函数

连续体被离散成单元后, 每个单元上的物理量(如位移、应变等)的变化规律, 可以用较简单的函数来近似表达。这种用于描述单元内位移的简单函数称为位移函数, 又称位移模式。通常的方法是以节点位移为未知量, 通过插值来表示单元内任意一点的位移。根据数学理论, 定义某一闭区域内的函数总可用一个多项式来逼近, 且多项式的数学运算比较容易, 所以, 位移函数常常取为多项式。多项式的项数越多, 则逼近真实位移的精度越高, 项数的多少由单元的自由度数决定。

由于所采用的函数是一种近似的试函数, 一般不能精确地反映单元中真实的位移分布, 这就带来了有限元法的另一种基本近似性。

采用位移法时, 物体或结构离散化之后, 就可把单元中的一些物理量如位移、应变和应力等由节点位移来表示。

### (2) 建立单元平衡方程

在选择了单元类型和相应的位移函数后, 即可按弹性力学的几何方程、物理方程导出单元应变与应力的表达式, 最后利用虚位移原理或最小势能原理建立单元的平衡方程, 即单元节点力与节点位移间的关系。此方程也称为刚度方程, 其系数矩阵称为单元刚度矩阵。

$$\mathbf{k}^e \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{F}^e \quad (1-1)$$

式中, 上标  $e$  为单元编号;  $\boldsymbol{\delta}^e$  为单元的节点位移向量;  $\mathbf{F}^e$  为单元的节点力向量;  $\mathbf{k}^e$  为单元刚度矩阵。

根据单元的材料性质、形状、尺寸、节点数目、位置等, 找出单元节点力和节点位移的关系式, 这是单元分析中的关键一步。

### (3) 计算等效节点力

物体离散化后, 假定力是通过节点从一个单元传递到另一个单元。但是, 对于实际的连续体, 力是从单元的公共边界传递到另一个单元中去的。因此, 这种作用在单元边界的表面力、体积力或集中力都需要等效地移到节点上去, 也就是用等效节点力来代替所有作用在单元上的力。

## 3. 整体分析

整体分析的基本任务包括建立整体平衡方程, 形成整体刚度矩阵和节点载荷向量, 完成整体方程求解。

### (1) 建立整体平衡方程

有限元法的分析过程是先分后合, 即先进行单元分析, 在建立了单元平衡方程以后, 再进行整体分析。也就是把各个单元的平衡方程集成起来, 形成求解区域的平衡方程, 此方程为有限元位移法的基本方程。集成所遵循的原则是各相邻单元在共同节点处具有相同的位移。

形成整体平衡方程为

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{F} \quad (1-2)$$

式中,  $\mathbf{K}$  为整体结构的刚度矩阵;  $\boldsymbol{\delta}$  为整体节点位移向量;  $\mathbf{F}$  为整体载荷向量。

### (2) 方程求解

在引入边界条件之前, 整体平衡方程是奇异的, 这意味着整体方程是不可解的。从物理上讲, 当物体的几何位置没有被约束, 受力处于平衡状态的物体也会产生刚体位移, 因而, 不可能有唯一的位移解。只有在整体平衡方程中引入必要的边界约束条件, 整体平衡方程才能求解。方程求解包括边界条件引入和数值计算, 一旦利用适当的数值方法求出未知的节点位移以后, 则可按弹性力学的应力、应变公式计算出各个单元的应变、应力等物理量。

### 1.2.2 有限元解的误差及产生原因

有限元法是一种数值计算方法，得到的解只是问题的一个近似解，不能像弹性力学那样获得其精确解，因此，存在误差是不可避免的。理论上讲，产生误差的原因主要来自两个方面，即模型误差和计算误差。所谓模型误差是指将实际物理问题抽象为适合计算机求解的有限元模型时所产生的误差，即有限元模型与实际问题之间的差异。它包括物理问题的抽象表示误差（即数学描述的正确性），有限元法离散处理和简化造成的误差。如模型边界离散过程中的以直代曲会导致离散模型与实际模型有差异，如图 1-2 所示；单元位移函数的近似构造导致与实际位移场存在差异；边界条件的简化近似处理导致与实际情况存在差异；单元形状的不规则或尺寸相差太大会导致局部应力严重失真，产生很大的误差。不过，这类误差理论上都是可以消除的，只要有限元单元尺寸趋于无穷小，或单元数目足够多，则离散误差、位移函数误差以及边界条件误差都将趋于零。所以，这类误差是可控的，可以按工程要求进行控制。所谓计算误差是指由于计算机的数值字长的限制导致计算过程中存在的舍入误差和计算方法所产生的截断误差。就目前计算机的数字表示和计算方法而言，计算误差理论上讲是不可避免的，只能通过提高计算机性能、选择合适的运算次数和计算方法等来降低计算误差。有限元分析结果误差的分类情况如图 1-3 所示。

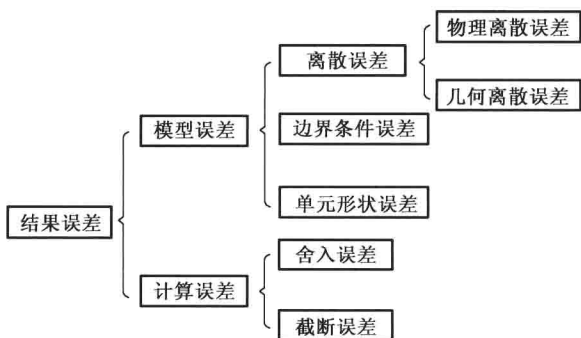


图 1-3 有限元计算结果误差分类

### 1.2.3 有限元法的特点

有限元法经过几十年的发展，已成为一种通用的数值计算方法。它具有鲜明的特点，具体表现在以下方面。

#### 1. 基本思想简单朴素，概念清晰易理解

有限元法的基本思想就是几何离散和分片插值，概念清晰容易理解。用离散单元的组合物体来逼近原始结构，体现了几何上的近似；而用近似函数逼近未知变量在单元内的真实解，体现了数学上的近似；利用与原问题等效的变分原理（如最小势能原理）建立有限元基本方程（刚度方程）又体现了其明确的物理背景。

#### 2. 理论基础厚实，数值计算稳定、高效

有限元法计算格式的建立既可基于物理概念推得，如直接刚度法、虚功原理，也可基于纯数学原理推得，如泛函变分原理、加权残值法。通常，直接刚度法、虚功原理用于杆系结构或结构问题的方程的建立；而变分原理涉及泛函极值，既适用于简单的结构问题，也适用于更复

杂的工程问题(如温度场问题)。当给定的问题存在经典变分叙述时,则利用变分原理很容易建立这类问题的有限元方程。当给定问题的经典变分不存在时,可采用更一般的方法来建立有限元方程,如加权残值法。加权残值法由问题的基本微分方程出发而不依赖于泛函,可用于处理一般问题的有限元方程的建立,如流固耦合问题。所以,有限元法不仅具有明确的物理背景,更具有坚实的数学基础,且数值计算的收敛性、稳定性均可从理论上得到证明。

### 3. 边界适应性强,精度可控

和早期的其他数值计算方法(如差分法)相比,有限元法具有更好的边界适应性。由于有限元法的单元不限于均匀规则单元,单元形状有一定的任意性,单元大小可以不同,且单元边界可以是曲线或曲面,不同形状的单元可进行组合,所以,有限元法可以处理任意复杂边界的结构。同时,由于有限元法的单元可以通过增加插值函数的阶次来提高有限元解的精度,避免了里兹法在整个计算区域构造逼近函数,难以满足局部区域的计算精度的问题。因此,理论上讲,有限元法可通过选择单元插值函数的阶次和单元数目来控制计算精度。

### 4. 计算格式规范,易于程序化

有限元法计算格式规范,用矩阵表达,方便处理,易于计算机程序化。

### 5. 计算方法通用,应用范围广

有限元法是一种通用的数值计算方法,应用范围广,不仅能分析具有复杂边界条件、线性和非线性、非均质材料、动力学等结构问题,还可推广到解答数学方程中的其他边值问题,如热传导、电磁场、流体力学等问题。理论上讲,只要是用微分方程表示的物理问题,都可用有限元法进行求解。

总之,有限元法已被公认为应力分析的有效工具,受到普遍的重视和广泛应用。

## 1.3 有限元法的应用

### 1.3.1 有限元法的应用领域

有限元法虽起源于结构的平面问题分析,但经过众多学者的不断努力,加之计算机技术的突飞猛进,有限元法的应用领域得到迅速扩展。现在已由二维问题扩展到三维问题、板壳问题,由静力学问题扩展到动力问题、稳定问题和波动问题。分析的对象也从弹性材料扩展到塑性、粘性、粘弹性、粘塑性和复合材料等。从固体力学扩展到流体力学、电磁学、传热学等学科,由线性问题扩展到多重非线性的耦合问题。应用领域也逐步扩展,从航空技术领域扩展到航天、土木建筑、机械制造、水利工程、造船、电子技术及原子能等领域,由单一物理场的求解扩展到多物理场的耦合,由单一构件问题扩展到多个物体的结构问题,其应用的深度和广度都得到了极大的拓展。有限元法的工程应用如表 1-1 所示。

表 1-1 有限元法的工程应用

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
结构力学和宇航工程	梁、板、壳结构的分析;复杂或混杂结构的分析;二维与三维应力分析	结构的稳定性;结构的固有频率和振型;线性粘弹性阻尼	应力波的传播;结构对于非周期载荷的动态响应;耦合热弹性力学与热粘弹性力学



(续表)

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
土力学, 基础工程学	二维与三维应力分析; 填筑和开挖问题; 边坡稳定性问题; 土壤与结构的相互作用; 坝、隧洞、钻孔、涵洞、船闸等的分析; 流体在土壤和岩石中的稳态渗流	土壤与结构组合物的固有频率和振型	土壤与岩石中的非正常渗流; 在可变形多孔介质中的流动-固结 应力波在土壤和岩石中的传播; 土壤与结构的动态相互作用
热传导	固体和流体中的稳态温度分布		固体和流体中的瞬态热流
流体动力学, 水利工程学和水源学	流体的势流; 流体的粘性流动; 蓄水池和多孔介质中的定常渗流; 水工结构和大坝的分析	湖泊和港湾的波动(固有频率和振型); 刚性或柔性容器中流体的晃动	河口的盐度和污染研究(扩展问题); 沉积物的推移; 流体的非正常流动; 波的传播; 多孔介质和蓄水池中非定常渗流
核子工程学	反应堆安全壳结构的分析; 反应堆和反应堆安全壳结构的稳态温度分布		反应堆安全壳结构的动态分析; 反应堆结构的热粘弹性分析; 反应堆和反应堆安全壳结构中的非稳态温度分布
电磁学	二维和三维静态电磁场分析		二维和三维时变、高频电磁场分析
生物力学工程问题	人体的脊柱、头骨、骨关节、牙移植等应力分析		响应分析

### 1.3.2 有限元法在工程中的应用

基于功能完善的有限元分析软件和高性能的计算机硬件, 可以对设计的结构进行详细的力学分析, 以获得尽可能真实的结构受力信息, 这样就可以在设计阶段对可能出现的各种问题进行安全评判和设计参数的修改。据有关资料显示, 一个新产品的问题有 60% 以上可以在设计阶段消除, 甚至有的结构在施工过程也需要进行精细的设计, 要做到这一点就需要有限元分析这样的分析手段。

#### 1. 有限元法在汽车产品开发中的应用

有限元在汽车工业得到了广泛应用。有限元法在汽车零部件结构强度、刚度分析中最显著的应用是车架、车身的设计。车架和车身有限元分析的目的在于提高其承载能力和抗变形能力、减轻其自身重量并节省材料。有限元法在汽车安全性评价方面更是发挥了重要作用。早期的汽车安全性评价主要通过汽车碰撞实验, 存在的主要问题周期长、费用高和容易造成人身伤害。此外, 此类实验的性质属于发现实验, 主要通过实验发现的现象对汽车的设计进行修改和优化。现在将有限元方法用于汽车安全性评价, 可以通过虚拟仿真发现问题, 大量的实验通过虚拟仿真完成, 实验性质也从发现实验转变为验证实验, 与传统的实验方法相比, 具有周期短、费用低和能够减少人员伤害的优点。

#### 2. 有限元法在鸟巢建设中的应用

北京奥运场馆鸟巢由纵横交错的钢铁枝蔓组成, 是世界上跨度最大的钢结构建筑, 它是鸟巢设计中最精彩的部分, 也是鸟巢建设中最艰难的部分, 如图 1-4 所示。看似轻灵的枝蔓总重达 42 000 吨, 其中顶盖以及周边悬空部位重量为 14 000 吨, 产生的重力难以想象。在鸟巢建设过程中, 采用了 78 根临时搭建的支撑塔架支撑着 14 000 吨钢铁的枝蔓, 也就是产生了 78 个受力区域。在钢结构焊接完成后, 需要将其缓慢而又平稳地卸去, 让鸟巢由被外力支撑的状态变成完全靠自身结构支撑。支撑塔架的卸载, 对整个钢结构本身来说其实是加载, 如何卸载,