

“构造地质学的理论方法与实践”丛书

国家自然科学基金重点项目 (No.41230206)

国家青年科学基金 (No. 41402173)

高等学校博士学科点专项基金 (No.20120145110002)

华中构造力学研究中心

资助

构造微分几何学

DIFFERENTIAL GEOMETRY IN STRUCTURAL GEOLOGY

李志勇 曾佐勋 罗文强 著



中国地质大学出版社
China University of Geosciences Press

“构造地质学的理论方法与实践”丛书 曾佐勋 主编

国家自然科学基金重点项目 (No. 41230206)

国家青年科学基金 (No. 41402173)

高等学校博士学科点专项基金 (No. 20120145110002)

华中构造力学研究中心

资助

构造微分几何学

Differential Geometry in Structural Geology

李志勇 曾佐勋 罗文强 著



中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

构造微分几何学/李志勇,曾佐勋,罗文强著. —武汉:中国地质大学出版社,2015.3
ISBN 978-7-5625-3613-0

- I. ①构…
II. ①李…②曾…③罗…
III. ①微分几何
IV. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 565280 号



构造微分几何学

李志勇 曾佐勋 罗文强 著

责任编辑:段连秀

策划编辑:段连秀

责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)

邮政编码:430074

电 话:(027)67883511

传真:67883580

E-mail:cbb@cug.edu.cn

经 销:全国新华书店

<http://www.cugp.cug.edu.cn>

开本:787 毫米×1 092 毫米 1/16

字数:150 千字 印张:5.75

版次:2015 年 3 月第 1 版

印次:2015 年 3 月第 1 次印刷

印刷:武汉教文印刷厂

印数:1—800 册

ISBN 978-7-5625-3613-0

定价:48.00 元

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

《构造地质学的理论方法与实践》丛书序言

随着科学技术的发展,构造地质学正在逐步朝着解析构造学和定量化构造研究方向发展。解析构造学要求加强力学的研究,将构造几何学、运动学、流变学和动力学有机结合起来进行综合研究;定量化构造研究则要求运用先进技术,不断改进和完善定量化研究手段和方法,以加深对构造过程和构造形成机制的认识。为了促进这两方面的研究,中国地质大学(武汉)与华中科技大学联合成立了“华中构造力学研究中心”。我校“华中构造力学研究中心”的同志们正按此方向进行不懈的努力,并做出了一些初步成绩。《构造地质学的理论方法与实践》丛书,部分地反映了这方面的一些探索与实践。

《构造地质学的理论方法与实践》丛书目前先奉献给读者四本专著:《陕甘川邻接区复合造山带与成矿》、《香肠构造与流变学》、《构造地质学软件包——StructKit 的设计与开发》、《信阳市燃气混气站断裂活动性和场地稳定性研究》。在这些成果中,既有造山带理论研究,也有构造变形与岩石流变学研究;既有在贵金属成矿预测和石油地质方面的应用研究,也有在工程场地稳定性应用方面的研究;还有计算机在构造地质应用方面的研究。

《陕甘川邻接区复合造山带与成矿》一书,根据作者在该区的实践,将滑脱构造和挤出构造有机结合起来,将造山带二维挤出推广到三维挤出,建立了陕甘川邻接区复合造山带三维滑脱挤出构造新模式,将造山带构造几何学、运动学、流变学、年代学和动力学研究紧密结合起来,并结合地球物理、地球化学、遥感地质、计算力学等多种手段和方法,采用地理信息系统综合分析,建立了该区复合造山带与成矿的关系,探索了成矿规律和成矿条件,进行了成矿远景区预测。提出的新模式、新概念、新理论和新方法对造山带与成矿的理论和实践具有重要意义。

《香肠构造与流变学》一书,重点介绍了作者们在香肠构造和岩石流变学方面的研究进展,特别是作者应用香肠构造定量反演岩石流变参数(包括应力指数和黏度比)方面的成果。利用构造变形反演岩石流变参数的定量方法主要有应变折射流变计、能干层褶皱流变计和香肠构造流变计。《香肠构造与流变学》一书中重

点研究的香肠构造流变计方法是目前国际上常用的三种方法之一,是作者们的开创性成果。作者们在国内首次(国际上第二次)发现了骨节状石香肠构造,并对复合石香肠构造进行了专题研究。在模型流变参数测定、透射电镜的应用以及在香肠构造控矿作用等方面,都有作者们自己的探索。

《构造地质学软件包——StrucKit 的设计与开发》一书,介绍了作者们编制的包含地质构造数据投图、有限应变测量、断裂和岩层几何参数测定、岩石流变参数测量等方面的 12 项功能的构造地质学软件包 StrucKit 以及构造面曲率分析软件 SurCurv 和液压模拟实验仪数据自动采集系统。这些软件反映了作者们在应用计算机进行构造地质学定量研究方面的一些成果和探索,对于构造地质学的量化教学和有关科研和教学人员使用,是非常有益的。

《信阳市燃气混气站断裂活动性和场地稳定性研究》一书中,作者们以地球系统科学理论为指导,应用构造地质学、岩石学、地层学、新构造学、地貌学及第四纪地质学、计算力学、年代学、地球物理学、地震地质学、工程测量学、遥感地质学、工程地质学等多学科的理论与方法,对信阳市燃气混气站断裂活动性和场地稳定性进行了综合研究和评价,在多学科知识、方法的整合和技术的有效应用方面有显著的进展,为工程场地稳定性评价积累了有益的经验。

对“华中构造力学研究中心”的目标而言,这些成果虽然还是初步的,但反映了作者们朝着解析构造学和定量构造学方面做出的探索和实践。今后我们将沿着这两方面不断努力,期望有更多的新成果奉献给读者。

华中构造力学研究中心副主任(现荣誉主任)



2002 年 10 月

序

华中构造力学研究中心荣誉主任杨巍然教授在《构造地质学的理论方法与实践》丛书序言中指出:随着科学技术的发展,构造地质学正在逐步朝着解析构造学和定量化构造研究方向发展。解析构造学要求加强力学的研究,将构造几何学、运动学、流变学和动力学有机结合起来进行综合研究;定量化构造研究则要求运用先进技术,不断改进和完善定量化研究手段和方法,以加深对构造过程和构造形成机制的认识。

这些年来,华中构造力学研究中心的师生们正是朝着这样的目标在不断前进。主要表现在以下几个方面:

1. 积极探索利用天然构造变形恢复岩石古流变参数的方法,即构造流变计,正在逐步形成天然岩石流变学研究的新方向,与高温高压实验岩石流变学形成互补。

2. 积极探索构造微分几何学方法,并应用于褶皱分析和油气田的裂缝预测。

3. 探索和应用岩石有限应变测量和涡度计算在小构造成因机制方面的应用研究,特别是在不同石香肠构造形成机制的研究方面取得系列成果。

4. 将 MAPGIS 技术和影像云纹法应用于缝合线的分析,取得三维缝合线研究的新进展。

5. 将有限元数值模拟技术应用于不同尺度构造研究;应用于成矿预测、工程场地稳定性和区域稳定性分析;应用于油气田断层封堵性、裂缝预测和油气成藏有利部位预测;应用于行星构造研究和地震研究等。

6. 探索构造物理模拟实验技术方法并应用于理论构造学和应用构造学研究。

7. 积极配合国家“985”创新平台建设,综合利用次声波、卫星热红外技术、宽

频地震仪、地应力测量、地球排气、地倾斜等监测资料进行地震前兆信息分析,探索地震成因机制,服务于地震监测与预测。

8. 开展月球、火星、金星和水星构造研究,探索月球和类地行星的构造变形和运动规律。

《构造微分几何学》一书,主要是第2方面研究的代表性成果,另附加有第3方面研究的成果。研究和出版得到国家自然科学基金重点项目(No. 41230206)、国家青年科学基金(No. 41402173)、高等学校博士学科点专项基金(No. 20120145110002)资助。它是由华中构造力学研究中心组织出版的《构造地质学的理论方法与实践》丛书的又一力作。

众所周知,构造与力学的结合不是一件轻而易举的事情,然而这又是大势所趋。华中构造力学研究中心正在朝着自己的目标不懈努力,相信将会有更多的新成果奉献给读者。

华中构造力学研究中心主任
《构造地质学的理论方法与实践》丛书主编

曾佐勋

2015年1月

前 言

自然科学起源于对我们所处自然现象的观察。地质构造是岩石变形的结果,其本身是三维的。本书研究的第一步是对其三维空间形态和几何特征进行精确的观察和描述。对变形过程的解析需要对地质体变形前后的几何形态进行精确观测和对比分析,包括构造层面的三维几何形态、面状和线状构造的空间几何关系等,进而对其动力学进行解析和求解。

微分几何学为地质构造的精确描述和定量研究提供了重要的数学基础和工具,并让我们可以借助大规模高度非线性并行计算技术的发展,使构造变形过程的数学解析、数值计算模拟与定量分析成为现实。构造地质学的研究由传统定性描述向定量解析和计算机数值模拟方向发展。

最近 20 年来,自动测量系统、地球物理、卫星遥感、Lidar 等新技术的发展,为地质体的观测提供了新的方法和手段,大量精确的测量数据为地质体的精确定量描述和数学建模提供了数据基础。借助数值分析和计算机非线性并行计算技术,可以进行野外地质图像处理、数据快速识别和精确获取,地质构造的三维几何重建和可视化,构造变形过程的定量解析、仿真模拟和分析。如日本地球模拟器项目(Earth Simulator Project 1997—2002),采用超大规模的计算机阵列并行计算,计算性能达到了世界最高水平 MPP-40 T. Flops,用于对地球大气环境、板块漂移、火山喷发、地震和海啸等自然现象的数值模拟和分析。

本书主要介绍经典微分几何学中有关空间曲线和曲面的基本原理、数值计算方法,以及在构造地质学中的初步应用。微分几何学作为数学工具,必定会在地球科学领域得到广泛和深入的应用,也有待地质学家进一步发展。书中所述的相关数值计算方法和计算机软件程序为作者依托中国地质大学(武汉)构造模拟实验室完成。读者可通过以下网站获得相关自主开发软件、程序代码、测试数据等相关资料:<http://www.tectonics.cn>。

李志勇

2014 年 12 月

目 录

第一章 微分几何学的发展和应用..... (1)

 § 1.1 微分几何学的产生和研究内容 (1)

 § 1.2 微分几何学的应用 (2)

第二章 微分几何学基本原理和数值方法..... (4)

 § 2.1 曲率基本概念和原理 (4)

 2.1.1 平面曲线的曲率 (4)

 2.1.2 空间曲线的曲率和挠率 (6)

 2.1.3 曲面的曲率及几何意义 (8)

 § 2.2 曲率分析数值方法..... (14)

 2.2.1 数据插值..... (15)

 2.2.2 数据失真处理..... (15)

 2.2.3 微分表达式的差分计算..... (15)

 2.2.4 趋势面拟合计算..... (17)

 2.2.5 二次趋势面的特征值和特征向量..... (17)

第三章 面理和线理的几何向量与运算 (19)

 § 3.1 线理的几何向量..... (19)

 3.1.1 线理在笛卡尔坐标系中的方向余弦..... (19)

 3.1.2 线理在地质图上的方向余弦..... (20)

 § 3.2 面理的几何向量..... (21)

 3.2.1 面理的法向量..... (21)

 3.2.2 面理的产状..... (21)

 § 3.3 面理和线理的向量几何运算..... (21)

 3.2.1 线理或面理的夹角..... (21)

3.2.2 相交线理所在的面理	(22)
3.2.3 相交线理的角平分线和相交面理的角平分面	(22)
§ 3.4 交面线理或枢纽	(23)
§ 3.5 褶皱的轴面	(23)
§ 3.6 共轭节理的主应力分析	(23)
第四章 褶皱构造的几何学描述和分类	(25)
§ 4.1 褶皱定量描述和分类的意义	(25)
§ 4.2 二维褶皱剖面形态的几何学描述	(26)
4.2.1 基于 Bezier 曲线的参数化描述	(26)
4.2.2 基于曲线方程的几何形态描述	(32)
§ 4.3 三维褶皱形态的几何描述和分类	(34)
4.3.1 曲面形态与曲率莫尔圆	(34)
4.3.2 褶皱三维形态的曲率特征	(34)
4.3.3 褶皱三维形态的曲率分类	(36)
4.3.4 构造层面变形程度的定量描述	(40)
§ 4.4 某背斜构造形态分析	(41)
第五章 构造裂缝的曲率分析	(43)
§ 5.1 微分几何学在裂缝型油气研究中的意义	(43)
§ 5.2 构造裂缝形成机理	(43)
§ 5.3 构造面曲率对裂缝发育的控制作用	(44)
§ 5.4 基于薄板小扰度弯曲理论的裂缝油气藏分析	(46)
§ 5.5 微分计算公式在裂缝油气分析中的一般适用性	(46)
§ 5.6 裂缝孔隙度和渗透率估算	(47)
§ 5.7 构造裂缝发育程度和方位分析	(48)
§ 5.8 某油田区块构造裂缝分析	(51)
第六章 岩石应变分析的惯量椭球理论	(54)
§ 6.1 应变分析的计算机应用	(54)
§ 6.2 惯量投影椭球的定义和计算	(54)
6.2.1 惯量投影椭球的定义	(54)
6.2.2 惯量投影椭球的计算	(56)
§ 6.3 惯量投影椭球对变形的描述意义	(56)

6.3.1	纯剪切变形矩形的惯量投影椭圆性质	(56)
6.3.2	简单剪切变形矩形的惯量投影椭圆	(57)
6.3.3	均匀变形中任意形状多边形的惯量投影椭圆	(58)
6.3.4	任意多边形递进变形中的惯量投影椭圆	(61)
§ 6.4	惯量投影椭圆在有限应变分析中的意义	(61)
§ 6.5	基于惯量投影椭圆的应变分析	(63)
§ 6.6	数值计算方法	(65)
§ 6.7	应变分析应用	(66)
第七章	相关分析软件与程序实现	(67)
§ 7.1	曲率分析与三维可视化软件实现	(67)
§ 7.2	裂缝计算与可视化的 Matlab 程序实现	(71)
§ 7.3	基于岩石薄片图像的应变分析程序实现	(73)
§ 7.4	褶皱二维形态定量分析软件实现	(74)
参考文献		(76)

第一章 微分几何学的发展和应用

§ 1.1 微分几何学的产生和研究内容

1. 微分几何的产生

微分几何包括古典微分几何和现代微分几何。古典微分几何是以微积分为工具研究欧氏空间中的曲线和曲面的几何。现代微分几何是以微分流形为基础,研究 n 维非欧空间的几何。整体微分几何,是通过空间各处局部的测量得到关于空间整体的拓扑性质(梅向明和黄敬之, 1981; 多卡模, 1988; 苏步青等, 1998)。

微分几何学的产生和发展是和数学分析密切相连的。第一个做出贡献的是瑞士数学家欧拉, 他于 1736 年首先引进了平面曲线的内在坐标概念, 即以曲线弧长作为曲线上点的坐标, 从而开始了曲线的内在几何学研究(袁小明, 1991)。

高斯于 1827 年出版了《关于曲面的一般研究》的著作, 奠定了现代形式曲面论的基础。随后, 由于黎曼几何学的发展和爱因斯坦广义相对论的建立, 微分几何在黎曼几何学和广义相对论中得到了广泛的应用, 逐渐在数学中成为独具特色、应用广泛的独立学科。

2. 微分几何的研究内容和特点

微分几何学是运用数学分析理论来研究曲线或曲面在它一点邻域的性质。换句话说, 微分几何学是研究一般的曲线和曲面在“小范围”上的性质的数学分支学科。微分几何学以光滑曲线(曲面)作为研究对象, 整个微分几何学是由曲线的弧线长、曲线上一点的切线等概念展开的。

在曲面上有两个重要概念, 就是表面上的距离和角。比如, 在曲面上由一点到另一点的路径是无数的, 但这两点间最短的路径只有一条, 叫做从一点到另一点的测地线。另外, 讨论曲面在每一点的曲率也是微分几何的重要内容。在微分几何中, 由于运用数学分析的理论, 就可以在无限小的范围内略去高阶无穷小, 一些复杂的依赖关系可以变成线性的, 不均匀的过程也可以变成均匀的, 这些都是微分几何特有的研究方法。

古典微分几何研究的是曲线曲面的局部性质和几何不变性。平面曲线在一点的曲率, 空间的曲线在一点的曲率, 以及空间曲面在一点的曲率等, 是微分几何中重要的讨论内容。计算曲线或曲面上每一点的曲率要用到微分的方法。近代由于对高维空间的微分几何和对曲线、曲面整体性质的研究, 使微分几何学同黎曼几何学、拓扑学、变分学、李群代数等有了密切的关系。这些数学分支和微分几何互相渗透, 已成为现代数学的中心问题之一。

§ 1.2 微分几何学的应用

1. 微分几何学的应用领域

微分几何在各个学科的发展中得到了广泛的应用。在力学、机械、建筑、人工智能、医学、服装等学科和应用领域具有广泛的应用,成为有力的数学工具。如:热力学概念的表达式和恒等式的证明(王志德,1992),理论粒子物理研究(吴宇列,2001),弹性薄壳结构,机械齿轮啮合理论应用,发电机系统(包能胜和姜桐,1999),机械进行全局精确线性化控制和非线性控制器的设计,图像矫正、运动目标的计算机自动识别与跟踪(马颂德和张正友,1997),指纹鉴定和识别,医学中的股骨测量(薛文东和戴克戎,1999),甚至服装设计等都广泛用到了微分几何学。

2. 微分几何学在构造地质学中的应用

Gauss 为了描述空间三维曲面与位置无关的内在性质,提出了主曲率和高斯曲率的概念。Murray 于 1968 年首次应用曲率进行裂缝的定量分析研究,并建立了破裂作用与油层厚度和构造曲率有关的孔隙度和渗透率之间的关系。随后,利用构造面曲率分析研究构造面破裂的方法得到了进一步发展。国外学者通过构造面的曲率分析来描述地质层面的几何性质(Bevis,1986;Lisle,1992;Lisle 和 Robinson,1995),定量描述构造层面的变形程度以及应变的大小(Ekman,1988;Lisle,1994;Nothard 等,1996;Samson 和 Mallet,1997;Johnson,2000;Roberts,2001),预测褶皱岩层的破裂方向和密度(Thomas 等,1974;Ewy,1984;Lisle,1994;Fischer 和 Wilkeerson,2000;Hennings 等,2000)。

其中,Lisle(1988,1992,1996)根据褶曲表面各点所具有的曲率,建立了一个预测断裂的模型。其应用各点的高斯曲率变化来分析构造面的异常变形带,并成功应用于怀俄明州卡斯帕附近的 Goose Egg 穹隆构造研究,分析了高斯曲率和构造面形态的对应关系(Lisle,1993,1995)。这种新方法适合于地震解译图件的构造表面形态分析,可预测与变形有关的亚地震构造密度和裂缝密度。Samson(1997)进行了构造地质学中三角网格面的高斯曲率分析,给出了最大曲率的褶皱和断层解释,并通过给定高斯曲率阈值,判断构造面的塑性和可展区域。Samson(1997)计算曲率的方法建立在 Bezier 曲面三维网格之上,计算较为复杂,而且通过 Bezier 曲面重构,丢失了原始构造面的细节特征,计算结果不能精确地反映曲面的局部变形特征,因而用于构造面的裂缝预测分析具有一定的局限性。国内学者(曾锦光等,1981;梅廉夫等,1995;郭科等,1998)也将构造面主曲率应用于裂缝性油气藏问题,建立主曲率与构造面裂缝发育的关系。曾锦光等(1982)由薄板小挠度弯曲理论得到了主曲率的计算公式,并应用于裂缝性油气藏问题。其计算公式省略了一阶微分,不适用于变形复杂的构造面,尤其是在裂缝油气预测研究中有一定的局限性。Lisle 和 Robinson(1995)利用 Mohr 圆确定主曲率的方向,并用于褶皱的描述。Mark 和 Wilkerson(2000)假设了沉积岩层为弹性平面的情况下,节理趋向于平行弹性变形岩层的最小曲率方向,通过三维建模和曲率分析,由褶皱的形状预测了节理的发育方向,其进行曲率分析时的曲率计算公式也由弹性薄板弯曲理论得到。Ozkaya(2002)通过构造面网格数据来计算构造面主曲率大小和方向,得到破裂面走向,并通过拟合二次趋势面,计算褶皱的主曲率,其方法建立在分析对象视为简单背斜或简单向斜的基础之上。

曲率分析作为微分几何学的重要内容,在构造地质定量研究中具有重要的意义。目前国内外的研究还缺乏完整系统的应用。如曲率计算公式均建立在简单弹性板状结构的假设基础之上,忽略了一阶微分,使得在分析时许多重要的细节特征被忽略(Ozkaya,2002)。此外,可展性分析和褶皱形态分类、地质构造的定量描述和表达等,都还缺乏较深入的研究探索和应用。

第二章 微分几何学基本原理和数值方法

§ 2.1 曲率基本概念和原理

2.1.1 平面曲线的曲率

1. 平面曲线的参数方程

曲线是微分几何研究的主要对象之一。

在平面上引入笛卡儿直角坐标 (x, y) , 则平面曲线的一般参数表示方程为:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (2-1)$$

或 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

如果选取自然参数 s , 即:

$$s = \int_a^t |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (2-2)$$

则平面曲线的自然参数表示方程为:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

或 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$

2. 平面曲线的曲率

设 C^2 类的平面曲线 C :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

曲线 C 上一点 P 的自然参数为 s , 另一点 Q 的自然参数为 $s + \Delta s$ (假定 $\Delta s > 0$)。在 P, Q 两点各作曲线 C 的单位切向量, 两个向量间的夹角是 $\Delta\varphi$, 则 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 叫做曲线弧 $\widehat{PQ}$ 关于弧长 s 的平均曲率(图 2-1)。

当点 Q 沿着曲线趋近于点 P 时, 若平均曲率 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 有极限, 则此极限为平面曲线在点 P 的曲率, 即:

$$k_r = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad (2-3)$$

它刻画了曲线在一点处的弯曲程度, 这个弯曲程度是用平面曲线的切向量关于弧长的旋

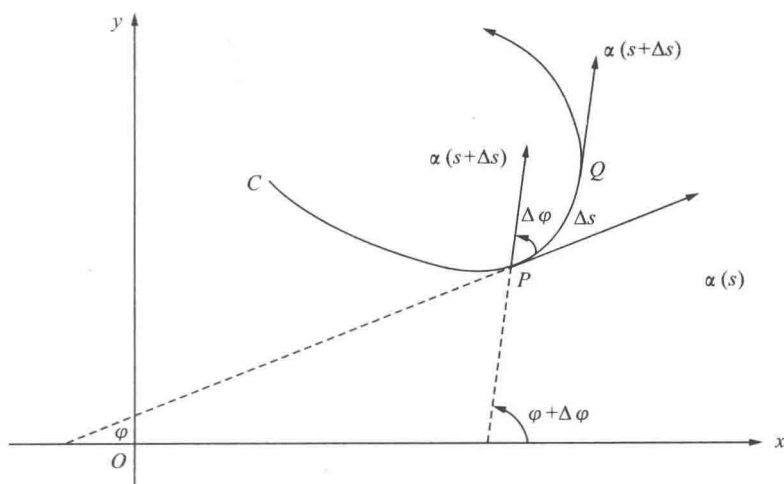


图 2-1 平面曲线的曲率

转速度来刻画的。当曲线在一点处的弯曲程度越大,切向量的旋转速度就越大。对于平面曲线的曲率 k_r ,在曲线向左转的地方有向角 $\Delta\varphi > 0$,有 $k_r > 0$;在曲线向右转的地方有向角 $\Delta\varphi < 0$,有 $k_r < 0$ 。

如果平面曲线上一点 P 的曲率 $k_r = 0$,则该点称为逗留点。

由一般参数方程给出的平面曲线的曲率公式:

$$k_r = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (2-4)$$

如果曲线由方程 $y = f(x)$ 给出,令 $t = x$,则曲率公式为:

$$k_r = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2-5)$$

对用自然参数 s 给出的平面曲线的曲率公式为:

$$k_r = \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} \quad (2-6)$$

其中: $\dot{x} = \frac{dx}{ds}$, $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{ds^2}$, $\dot{y} = \frac{dy}{ds}$, $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{ds^2}$

3. 平面曲线的曲率半径、曲率中心及曲率圆

我们把平面曲线 C 上所考虑的 P 点邻近用圆来代替,这个圆与曲线在 P 点有相同的曲率,并且在 P 点与曲线 C 相切,且朝同一侧弯曲。这种圆称为曲线 C 在 P 点的曲率圆,它的中心称为曲率中心,曲率圆的半径称为曲率半径。曲率半径为曲线在该点曲率的绝对值的倒数,即:

$$R = \frac{1}{|k_r|} \quad (2-7)$$