



文登教育

Wendeng Education



理工社®

2016

文登教育集团课堂用书

(数学一)

考研数学 复习指南

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 黄先开 主 编

本书使用说明:

- ◆ 提供的所有网络增值服务**全部免费**。
- ◆ 答疑论坛说明及各**免费课件**介绍请扫描封底二维码。
- ◆ 书后附录全套**课后题详解**，答疑论坛**新增**重点习题**视频讲解**。
- ◆ 总结**37个思维定势**，灵活掌握，对提升快速解题能力至关重要！



文登教育

Wendeng Education

2016

文登教育集团课堂用书

(数学一)

考研数学 复习指南

网络增值版

陈文灯 黄先开 主 编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习指南. 数学一 / 陈文灯, 黄先开主编 — 北京: 北京理工大学出版社, 2014. 9
ISBN 978-7-5640-9771-4

I. ①考… II. ①陈… ②黄… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 218371 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京文良精锐印刷有限责任公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 48.75

字 数 / 1187 千字

版 次 / 2014 年 10 月第 1 版 2014 年 10 月第 1 次印刷

定 价 / 59.80 元

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

前 言

本书从 1995 年出版以来,历经二十年的再版和修订,集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会,已成为广大考研读者的良师诤友,同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编,成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中,本书帮助许许多多考研学子圆了梦想,帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题,编者和一些数学同仁专门开设了“复习指南答疑论坛(www.wendengonline.com/bbs)”,以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试,文登名师将一直伴随着您!许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息,我们曾数次认真商讨、仔细揣摩,对本书再次做了修订,希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外,在文登教育平台的基础上,我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课,建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南,效果将事半功倍!

此次再版,我们做了以下修订。

(1)“变繁为简,变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结,使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧,并给出了详细的分析,使同学们了解这些方法的由来,让“玄妙”变得顺理成章。例如,连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明,尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法,经过我们的分析,原题将变得非常“初等”,非常简单,只要仿效,即可自行解答。

(2)例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应考试很有用,根据题型特点,能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”,以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容,修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助,再版力求尽量做到完美。为了精益求精,恳请朋友们拨冗指正。

最后回答考生们的问题:“如何有效地利用您的书提高复习效果?”“考好数学,书要看几遍?”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看,对基础部分要多下点功夫,做到概念、定理能用自己的语言叙述,习题应全部都做。高数的基础:极限、导数与微分、不定积分;线性代数的基础:矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量;概率论与数理统计的基础:事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、贝努里概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征[期望 $E(X)$ 、方差 $D(X)$ 、协方差 $\text{cov}(X,Y)$ 、相关系数 ρ_{XY}]。如果是自学,应先仔仔细细地把本书看一遍,然后再详细看二三遍,对重点知识点着重理解、揣摩;如果是参加强化班,最好应该与上课“同步”进行,课后再看一遍即可。

送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺,
功到高分自然成。

陈文灯

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限和连续 1

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 1

一、函数的基本性质 1

二、分段函数 5

三、反函数 5

四、复合函数 6

五、初等函数 9

六、函数的极限及其连续性 9

七、重要公式和定理 12

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 19

题型一 未定式的定值法 19

题型二 类未定式的计算 23

题型三 数列的极限 24

题型四 极限式中常数的确定(重点) 29

题型五 函数连续或间断点的判定 32

第 3 节 思维定势及综合题解析 34

一、思维定势 34

二、综合题解析 38

习题一 39

第二章 导数与微分 43

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 43

一、导数与微分的定义 43

二、重要定理 45

三、导数与微分的运算法则 45

四、基本公式 45

五、弧微分与曲率 46

六、高阶导数的定义与基本公式 47

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 47

题型一 求复合函数的导数或微分 47

题型二 求参数方程的导数或微分 49

题型三 求隐函数的导数或微分 50

题型四 求幂指函数的导数或微分 50

题型五 求表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分 51

题型六 求分段函数的导数或微分 51

题型七 求高阶导数 52

第 3 节 思维定势及综合题解析 56

一、思维定势 56

二、综合题解析 56

习题二 59

第三章 不定积分 62

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 62

一、不定积分的基本概念 62

二、基本性质	62
三、基本公式	63
四、基本积分法	64
第2节 重要题型的解题方法和技巧	77
题型一 有理函数的不定积分	77
题型二 简单无理函数的不定积分	78
题型三 三角有理式的不定积分	79
题型四 含有反三角函数的不定积分	83
题型五 抽象函数的不定积分	83
题型六 分段函数的不定积分	84
第3节 思维定势及综合题解析	85
一、思维定势	85
二、综合题解析	86
习题三	88
第四章 定积分及反常积分	92
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	92
一、基本性质	92
二、定理和公式	95
三、定积分的计算法	98
四、反常积分的基本概念	102
第2节 重要题型的解题方法和技巧	103
题型一 分段函数的定积分	103
题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分	105
题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分	106
题型四 对称区间上的定积分	108
题型五 被积函数的分母为两项,而分子为其中一项的定积分	109

题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分	110
题型七 已知一定积分,求另一一定积分	111
题型八 定积分等式的证明	112
题型九 定积分不等式的证明	120
题型十 计算反常积分	125
题型十一 反常积分的判敛	126
第3节 思维定势及综合题解析	127
一、思维定势	127
二、综合题解析	128
习题四	129
第五章 微分中值定理	133
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	133
第2节 重要题型的解题方法和技巧	134
题型一 闭区间上连续函数命题的证明	134
题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	137
题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题	138
题型四 命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	139
题型五 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	140
题型六 欲证结论:在 (a, b) ,内至少存在 $\xi, \eta (\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	143

第3节 思维定势及综合题解析	144	题型一 求函数的极值	184
一、思维定势	144	题型二 求函数的最值	185
二、综合题解析	146	题型三 关于方程根的讨论	186
习题五	147	题型四 函数渐近线的求解	191
第六章 常微分方程	150	题型五 函数作图	192
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	150	题型六 求平面图形的面积	193
一、基本概念	150	题型七 求立体的体积	195
二、二阶线性微分方程解的结构	150	题型八 求平面曲线的弧长	196
三、二阶常系数线性微分方程	152	题型九 求旋转体的侧面积	197
四、 n 阶常系数线性微分方程	152	题型十 变力做功、引力、液体的静压力	198
第2节 重要题型的解题方法和技巧	155	第3节 思维定势与综合题解析	201
题型一 一阶微分方程的计算	155	一、思维定势	201
题型二 可降阶的高阶方程的求解	164	二、综合题解析	202
题型三 计算二阶线性微分方程	165	习题七	205
题型四 欧拉方程的计算	168	第八章 无穷级数	208
题型五 微分方程的应用	170	第1节 重要概念、定理和公式的剖析	208
第3节 思维定势及综合题解析	173	一、无穷级数的基本概念和性质	208
一、思维定势	173	二、数项级数判敛法	209
二、综合题解析	173	三、函数项级数的概念	214
习题六	175	四、幂级数的概念和性质	214
第七章 一元微积分的应用	178	五、傅里叶级数的概念及定理	216
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	178	第2节 重要题型的解题方法和技巧	219
一、函数的单调增减性定理	178	题型一 正项级数的判敛	219
二、函数的极值与最值	179	题型二 任意项级数的判敛	220
三、函数凹凸性的判别与函数的拐点	180	题型三 级数的证明或判敛	222
四、微元法及其应用	182	题型四 计算函数项级数收敛域	224
第2节 重要题型的解题方法和技巧	184	题型五 求幂级数的收敛域、收敛半径	226
		题型六 函数在某点的幂级数展开	227

题型七 幂级数求和	229
题型八 数项级数求和	233
题型九 周期与非周期函数的傅里叶级数	236
第3节 思维定势及综合题解析	239
一、思维定势	239
二、综合题解析	239
习题八	241
第九章 矢量代数与空间解析几何* ...	245
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	245
一、矢量的概念及其性质	245
二、平面与直线	250
三、投影方程	251
四、曲面方程	253
第2节 重要题型的解题方法和技巧	257
题型一 求平面方程	257
题型二 求空间直线方程	259
第3节 思维定势及综合题解析	261
一、思维定势	261
二、综合题解析	261
习题九	262
第十章 多元函数微分学	265
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	265
一、二元函数的定义	265
二、二元函数的极限及连续性	266
三、偏导数、全导数及全微分	267
四、基本定理	268
五、多元函数的极值	270
六、条件极值与无条件极值	271
第2节 重要题型的解题方法和技巧	

题型一 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的微分法	271
题型二 复合函数微分法	272
题型三 隐函数微分法	275
题型四 空间曲线在某点处的切线和法平面方程*	278
题型五 空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程*	279
题型六 求无条件极值	281
题型七 求条件极值	282
题型八 求最值	283
第3节 思维定势及综合题解析	285
一、思维定势	285
二、综合题解析	286
习题十	287
第十一章 重积分	290
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	290
一、基本概念	290
二、性质	290
三、公式	293
四、二重积分的解题技巧	294
五、三重积分的解题技巧*	296
第2节 重要题型的解题方法和技巧	298
题型一 更换二重积分的积分次序	298
题型二 选择二重积分的积分次序	300
题型三 二重积分坐标系的选择	302
题型四 分段函数的二重积分的计算	303

题型五 二重积分等式的证明	306
题型六 二重积分不等式的证明	308
题型七 更换三重积分的积分次序*	310
题型八 三重积分的计算*	310
第3节 思维定势及综合题解析	312
一、思维定势	312*
二、综合题解析	313
习题十一	314
第十二章 曲线、曲面积分及场论初步*	319
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	319
一、曲线积分的概念和性质	319
二、曲线积分的基本定理	320
三、曲面积分的概念和性质	321
四、曲面积分的基本定理	322
五、场论初步	322
第2节 重要题型的解题方法和技巧	327
题型一 对弧长的曲线积分的计算	327
题型二 对坐标的曲线积分的计算	328
题型三 对面积的曲面积分的计算	333
题型四 对坐标的曲面积分的计算	334
题型五 曲面面积的计算	339
第3节 思维定势及综合题解析	340
一、思维定势	340
二、综合题解析	341
习题十二	342

第十三章 函数方程与不等式证明 344

第1节 函数方程 344

一、利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求解方程 344

二、利用极限求解函数方程 345

三、利用导数的定义求解方程 346

四、利用变上限积分的可导性求解方程 346

五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解 347

六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$ 348

第2节 不等式的证明 351

一、引入参数法 351

二、利用微分中值定理 352

三、利用函数的单调增减性(重点) ... 354

四、利用函数的极值与最值 356

五、利用函数图形的凹凸性 358

六、利用泰勒展开式 358

七、杂例 360

习题十三 361

第二篇 线性代数

第一章 行列式 364

第1节 重要概念、定理和公式的剖析 364

一、排列与逆序 364

二、 n 阶行列式的定义 365

三、行列式的基本性质 366

四、行列式按行(列)展开定理 369

五、重要公式与结论 370

第2节 重要题型的解题方法和技巧 371

题型一 抽象行列式的计算 371

题型二 低阶行列式的计算	372
题型三 n 阶行列式的计算	373
第 3 节 思维定势与综合题解析	379
一、思维定势	379
二、综合题解析	379
习题一	381
第二章 矩阵	384
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	384
一、矩阵的概念	384
二、矩阵的运算	384
三、逆矩阵的概念	387
四、利用伴随矩阵求逆矩阵	387
五、矩阵的初等变换与求逆	388
六、分块矩阵及其求逆	389
七、矩阵的秩及其求法	390
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	390
题型一 求逆矩阵	390
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	392
题型三 有关初等矩阵的命题	394
题型四 解矩阵方程	395
题型五 求矩阵的秩	397
题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证明	398
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	398
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的命题的证明	399
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	400
第 3 节 思维定势与综合题解析	402
一、思维定势	402
二、综合题解析	404

习题二	404
第三章 向量	410
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	410
一、向量的概念与运算	410
二、向量间的线性关系	410
三、向量组的秩和矩阵的秩	411
四、向量空间	412
五、重要定理与公式	414
六、小结	414
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	415
题型一 讨论向量组的线性相关性	415
题型二 有关向量组线性相关性命题的证明	418
题型三 判定一个向量是否可由一组向量线性表示	424
题型四 有关向量组线性表示命题的证明	426
题型五 求向量组的极大线性无关组	427
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算与证明	429
题型七 与向量空间有关的命题	432
第 3 节 思维定势与综合题解析	434
一、思维定势	434
二、综合题解析	435
习题三	436
第四章 线性方程组	440
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	440
一、克莱姆法则	440

二、线性方程组的基本概念	440		468
三、线性方程组解的判定	441	题型三 特征值与特征向量的逆问题	469
四、非齐次线性方程组与其导出组的解的关系	442	题型四 相似的判定及其逆问题	470
五、线性方程组解的性质	442	题型五 判断矩阵 A 是否可对角化	472
六、线性方程组解的结构	442	题型六 有关特征值与特征向量的证明题	475
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	443	第 3 节 思维定势与综合题解析	477
题型一 基本概念题(解的判定、性质、结构)	443	一、思维定势	477
题型二 含有参数的线性方程组解的讨论	447	二、综合题解析	477
题型三 讨论两个方程组的公共解	451	习题五	483
题型四 有关基础解系的证明	453	第六章 二次型	486
第 3 节 思维定势与综合题解析	454	第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	486
一、思维定势	454	一、二次型及其矩阵表示	486
二、综合题解析	455	二、化二次型为标准型	486
习题四	460	三、配方法和正交变换法	487
第五章 特征值和特征向量	464	四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	488
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	464	第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	491
一、矩阵的特征值和特征向量的概念	464	题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	491
二、相似矩阵及其性质	464	题型二 化二次型为标准形	492
三、矩阵可相似对角化的充要条件	465	题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数	496
四、实对称矩阵及其性质	465	题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明	497
五、重要公式与结论	465	第 3 节 思维定势与综合题解析	499
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	466	一、思维定势	499
题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量	466	二、综合题解析	500
题型二 求抽象矩阵的特征值与特征向量	466	习题六	501

第三篇 概率论与数理统计*

第一章 随机事件和概率 503

第1节 重要概念、定理和公式的剖析 503

一、随机试验和随机事件 503

二、事件的关系及其运算 504

三、事件的概率及其性质 506

四、条件概率与事件的独立性 507

五、重要概型 508

六、重要公式 508

第2节 重要题型的解题方法和技巧 509

题型一 古典概型与几何概型 509

题型二 事件的关系和概率性质的命题 513

题型三 条件概率与积事件概率的计算 515

题型四 全概率公式与 Bayes 公式的命题 516

题型五 有关 Bernoulli 概型的命题 518

第3节 思维定势与综合题解析 520

一、思维定势 520

二、综合题解析 521

习题一 522

第二章 随机变量及其分布 526

第1节 重要概念、定理和公式的剖析 526

一、概念与公式一览表 526

二、重要的一维分布 530

三、重要的二维分布 532

第2节 重要题型的解题方法和技巧 533

题型一 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题 533

题型二 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数 536

题型三 求一维随机变量函数的分布 540

题型四 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查 542

题型五 求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论 544

题型六 求两个随机变量的简单函数的分布 551

第3节 思维定势与综合题解析 556

一、思维定势 556

二、综合题解析 558

习题二 559

第三章 随机变量的数字特征 567

第1节 重要概念、定理和公式的剖析 567

一、一维随机变量的数字特征 567

二、二维随机变量的数字特征 569

三、几种重要的数学期望与方差 570

四、重要公式与结论 571

第2节 重要题型的解题方法和技巧 571

题型一 求一维随机变量的数字特征 571

题型二 求一维随机变量函数的数学期望 576

题型三 求二维随机变量及其函数的数字特征 578

题型四 有关数字特征的证明题 585

题型五 数字特征在经济中的应用 586

第3节 思维定势与综合题解析	589
一、思维定势	589
二、综合题解析	589
习题三	592
第四章 大数定律和中心极限定理	597
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	597
一、切比雪夫不等式	597
二、中心极限定理	597
三、重要公式与结论	598
四、注意	598
第2节 重要题型的解题方法和技巧	598
题型一 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	598
题型二 有关中心极限定理的命题	600
习题四	603
第五章 数理统计的基本概念	604
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	604
一、几个基本概念	604
二、三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	605
三、正态总体下常用统计量的性质	605
四、重要公式与结论	606
五、经验分布函数	606
第2节 重要题型的解题方法和技巧	607
题型一 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量	607
题型二 求统计量的分布	608
第3节 思维定势	610

习题五	611
第六章 参数估计	613
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	613
一、矩估计与最大似然估计	613
二、估计量的评选标准	614
三、区间估计	615
四、重要公式与结论	617
第2节 重要题型的解题方法和技巧	617
题型一 求矩估计和最大似然估计	617
题型二 评价估计的优劣	621
题型三 区间估计或置信区间的命题	622
习题六	625
第七章 假设检验	628
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	628
一、显著性检验的基本思想	628
二、假设检验的基本步骤	628
三、两类错误	628
四、正态总体未知参数的假设检验	629
五、假设检验与区间估计的联系	630
第2节 重要题型的解题方法和技巧	630
题型一 正态总体的均值和方差的假设检验	630
题型二 有关两类错误的命题	631
习题七	632

注:标有“*”的章节内容数学二不要求。

附录 课后习题答案详解

第一篇 高等数学	634
第一章 函数、极限和连续	634
第二章 导数与微分	638
第三章 不定积分	642
第四章 定积分及反常积分	649
第五章 微分中值定理	652
第六章 常微分方程	655
第七章 一元微积分的应用	661
第八章 无穷级数*	666
第九章 矢量代数与空间解析几何*	672
第十章 多元函数微分学	675
第十一章 重积分	679
第十二章 曲线、曲面积分及场论初步*	688

第十三章 函数方程与不等式证明

.....	690
第二篇 线性代数	694
第一章 行列式	694
第二章 矩阵	696
第三章 向量	704
第四章 线性方程组	709
第五章 特征值和特征向量	717
第六章 二次型	725
第三篇* 概率论与数理统计	729
第一章 随机事件和概率	729
第二章 随机变量及其分布	732
第三章 随机变量的数字特征	743
第四章 大数定律和中心极限定理	749
第五章 数理统计的基本概念	750
第六章 参数估计	753
第七章 假设检验	757

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限和连续

第1节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- (1) 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数;
- (2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数; 奇数个奇函数的积为奇函数;
- (3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|, \cos x, x^{2n} (n \text{ 为正整数}), e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$.

常见的奇函数: $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$.

提示 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数就不是奇函数或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) y = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数}.$$

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-du) \\ &= -\int_0^x f(-t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数}) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

故 $y = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数, 又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$;

(2) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数;

(3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, (T_1 \neq T_2)$ 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数, 主要是根据周期函数的定义, 有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x , 有 $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{【解】} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \frac{1}{4} - f(x) - f^2(x) - \sqrt{f(x) - f^2(x)}} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x) \quad (\text{由题设知 } f(x) \geq \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

即 $f(1+x) = f(x)$, 故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数,