高等学校公共基础课规划教材

概率论与数理统计基础教程

伍长春 唐林俊 李德高 谭中权 郑圣超 编著

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校公共基础课规划教材

概率论与数理统计基础教程

伍长春　唐林俊　李德高　谭中权　郑圣超　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是根据高等学校公共专业基础课“概率论与数理统计”的教学基本要求而编写的。力求使学生在有限的教学课时内掌握概率论与数理统计的基本原理和统计方法，并具备运用统计推断方法解决实际问题的能力。本书共分为 10 章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析。

本书给出近 200 个例子，其中很多例子贴近社会、经济、生活和生产管理，具有时代气息。本书可作为高等学校经济类、管理类、人文社科、农林及医学类各本科专业的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计基础教程 / 伍长春等编著. —北京：电子工业出版社，2015.6

ISBN 978-7-121-26384-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①伍… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 137324 号

责任编辑：贺志洪
特约编辑：徐 堃 薛 阳
印　　刷：三河市华成印务有限公司
装　　订：三河市华成印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　　印张：15.25　　字数：390 千字
版　　次：2015 年 6 月第 1 版
印　　次：2015 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册
定　　价：36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前 言

本书是根据高等学校公共专业基础课“概率论与数理统计”的教学基本要求而编写的。

本书着眼于激发学生的学习兴趣，力求使学生在有限的教学课时内掌握概率论与数理统计的基本原理和统计方法，并具备运用统计推断方法解决实际问题的能力。为了使学生较容易地理解概率论与数理统计中的概念、定理及统计推断方法，本书试图直观地进行解说，直观演绎统计推断方法的原理及构造，并通过典型案例说明这门学科的广泛应用。

书中给出了近 200 个例子，其中很多实例贴近社会、经济、生活和生产管理，具有时代气息。每小节有针对性地安排几道简单的练习题用于课堂练习，帮助学生认识和理解相关概念和定理；每章后附有适量的习题，通过训练，使学生掌握相关理论与方法，增强分析和解决问题的能力，并扩展视野。

本书共分 10 章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析。本书可作为高等学校经济类、管理类、人文社科、农林及医学类本科专业的教材或教学参考书。

本书由伍长春、唐林俊、谭中权、李德高、郑圣超编著。伍长春、唐林俊负责书稿的组织和最后的统稿。柴惠文老师审阅了全书，在此表示衷心的感谢。由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大教师和同学提出宝贵意见，我们将不断改进与完善。

编者

2015 年 5 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

在经济社会和日常生活中，人们经常会遇到不确定性问题，于是希望了解这种不确定性的程度，比如：

（1）在新产品上市前，经销商通常会进行市场调查，了解顾客购买该产品的”可能性”有多大?

（2）如果提高产品的价格，销售量下降的“概率”为多少?

（3）一个家庭中的三个小孩全都是女孩的“机会”是多少?

概率论就是研究具有不确定性现象（称为**随机现象**）的数量规律的学科，是数理统计的理论基础。随机事件和概率是概率论中两个最基本的概念。

本章引入事件概率的概念,然后指出在某些简单情形下如何求概率,主要内容包括：样本空间与随机事件、概率的定义及性质、条件概率及其三大公式、事件间的独立性与试验的独立性。这些内容是进一步学习概率论的基础。

1.1　样本空间与随机事件

1.1.1　样本空间

随机试验（简称**试验**）是对随机现象进行的观察和实验。这个试验产生的结果有多种可能性，且试验前不确定哪种结果会出现。随机试验的每一个基本结果称为**样本点**，所有样本点构成的集合称为**样本空间**，通常用大写的希腊字母Ω 表示。

【例 1.1.1】 掷一次硬币，观察正面朝上还是反面朝上，则样本空间Ω={正面，反面}。

【例 1.1.2】 抛掷一枚骰子，观察出现的点数，则样本空间为$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$。

【例 1.1.3】 观察某路段一年内的交通事故数，则样本空间$\Omega=\{0,1,2,\cdots,100,\cdots\}$。

【例 1.1.4】 从一批灯泡中抽取一只灯泡，测试其使用寿命，则 $\Omega=\{t : t\geqslant 0\}$。

需要注意的是：

（1）在建立样本空间的时候，一方面要避免不必要的烦琐，另一方面要清楚地刻画人们感兴趣的事件。

（2）将样本空间中的样本点个数是有限个或可列个的情况归为一类，称其为**离散样本空间**；将样本点个数为不可列无限个的情况归为一类，称其为**连续型样本空间**。

1.1.2 随机事件

样本空间的子集，即部分样本点组成的集合，称为随机事件（简称事件）。常用大写字母 A、B、C 以及 A_1，A_2，…，A_n，等表示事件。在试验中，如果出现事件 A 中的样本点，则称事件 A 发生。这里有两种极端的情况，一种是试验中一定会出现的结果，称为必然事件；另一种是试验中不可能出现的结果，称为不可能事件。从样本点集合角度来看，必然事件是由试验的全部样本点组成的，故也记为Ω；而不可能事件不含有任何样本点，故记为ϕ。

【例 1.1.5】 已知一批产品共 100 个，其中有 95 个合格品和 5 个次品。检查产品质量时，从这批产品中任意抽取 10 个，记 A=“恰有一个次品”，B=“至少有一个次品”，C=“没有次品”，D=“有 2 个或 3 个次品”，则 A、B、C、D 都是随机事件；而 E=“次品数不多于 5 个”是必然事件，F=“次品数多于 5 个”是不可能事件。

【例 1.1.6】 在例 1.1.2 中，研究下列事件：

A=“出现的点数是不大于 3 的奇数”

B=“出现偶数点”

C=“出现的点数是不小于 4 的偶数”

这些用文字表述的事件也可以表示为样本点的集合，即 $A=\{1,\ 3\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$，$C=\{4,\ 6\}$。若在试验中出现的结果是 3，则事件 A 发生，而 B、C 都不发生；若出现的结果是 4 或 6，则 B、C 都发生，而 A 不发生。

【例 1.1.7】 袋中装有 2 只白球和 1 只黑球。从袋中依次任意地摸出 2 只球。设球是编号的：白球为 1 号、2 号，黑球为 3 号。考虑下列随机事件：

A={第一次摸得黑球}

B= {第二次摸得白球}

C={两次都摸得白球}

D={第一次摸得黑球，第二次摸得白球}

这些用文字表述的事件也可表示为样本点集合，$A=\{(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)\}$，$B=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)\}$，$C=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$，$D=\{(3,\ 1),\ (3,\ 2)\}$。

在概率论中，常用一个长方形表示样本空间Ω，用其中的一个圆或其他几何图形表示事件 A，这类图形称为维恩（Venn）图，如图 1.1.1 所示。

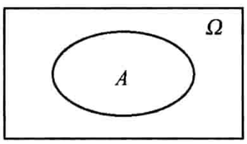

图 1.1.1

1.1.3 随机事件的关系及运算

下面的讨论总是假定在同一样本空间Ω（即同一随机现象）中进行。随机事件的关系及运算与集合间的关系及运算一样，主要有下述几种形式。

1. 包含关系（子事件）

若事件A发生，必然导致事件B发生，称事件B包含事件A，或称A是B的子事件，记为$A\subset B$（如图 1.1.2 所示）。比如在例 1.1.6 中，事件C=“出现的点数是不小于 4 的偶数”的发生，必然导致事件B=“出现偶数点”发生，故$C\subset B$。又如在例 1.1.4 中，灯泡的使用寿命T超过 2 000h（记为事件$A=\{T>2\ 000\}$）和T超过 5 000 h（记为事件$B=\{T>5\ 000\}$），则$B\subset A$。如果事件A与B互相包含，即属于A的样本点必属于B，且属于B的样本点必属于A，则称事件A与B相等，记为$A=B$。

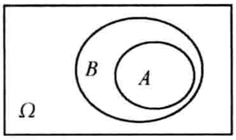

图 1.1.2

2. 和事件

事件A与B的和（并）事件记为$A\cup B$，表示“事件A与B至少有一个发生”这一新事件。从集合的角度，$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$（如图 1.1.3 所示）。在例 1.1.7 中，$B=C\cup D$。

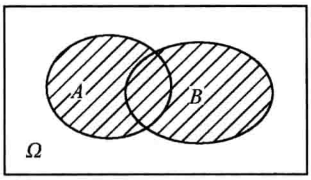

图 1.1.3

n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和（并）事件记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，表示“事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生”这一新事件。一列事件$A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$的和（并）事件记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，表示“事件$A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$中至少有一个发生”这一事件。

3. 积事件

事件A与B的积事件记为$A\cap B$或AB，表示“事件A与B同时发生”这一新事件。从集合的角度，$A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$（如图 1.1.4 所示）。在例 1.1.7 中，$D=A\cap B$。

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$表示“事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生”这一事件，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示“事件列$A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$同时发生”这一事件。

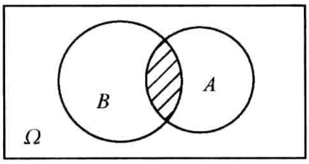

图 1.1.4

4. 互不相容事件

若事件 A 与 B 不可能同时发生，称 A 与 B 为互不相容或是互斥事件，记为 $AB=\Phi$ 。若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个互不相容，则称这 n 个事件 A_1，A_2,…，A_n 互不相容（如图 1.1.5 所示）。

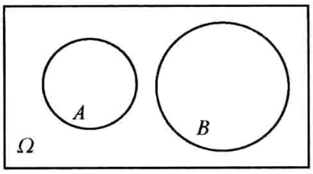

图 1.1.5

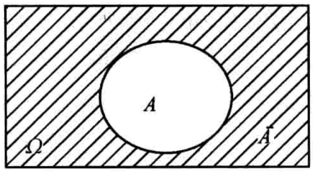

图 1.1.6

5. 对立事件（逆事件）

A 的对立事件记为 $\overline{A}$，表示"A 不发生"这一事件（如图 1.1.6 所示）。在例 1.1.6 中，$\overline{B}=C$ 。有 $A\cap\overline{A}=\Phi$， $A\cup\overline{A}=\Omega$ 。

6. 差事件

事件 A 对 B 的差事件记为 $A-B$，表示"事件 A 发生而 B 不发生"这一事件。从集合的角度，$A-B=\{\omega\,|\,\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$，有 $A-B=A\overline{B}$， $\Omega-A=\overline{A}$ 。

7. 随机事件（集合）运算律

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$ 。

（2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ 。

（3）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

（4）对偶律（德·摩根律）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 。

对偶律可推广到多个事件及可列个事件的情况，则

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\,,\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

8. 样本空间的分割

若一组事件 A_1，A_2，…，A_n 满足以下条件：

（1）A_1，A_2，…，A_n 互不相容。

（2）$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$。

则称 A_1，A_2，…，A_n 为样本空间 Ω 的一个分割或一个完备事件组。

样本空间的一个分割在概率论与数理统计研究中使用，因为它可以简化被研究的问题（具体参见 1.4 节中的全概率公式）。

【例 1.1.8】 设 A、B、C 为某随机试验中的三个事件，则

（1）"A 发生，B 与 C 不发生"表示为 $A\overline{B}\overline{C}$。

（2）"A 与 B 都发生，而 C 不发生"表示为 $AB\overline{C}$。

（3）"A、B、C 中至少有一个发生"表示 $A \cup B \cup C$。

（4）"A、B、C 都发生"表示为 ABC。

（5）"A、B、C 都不发生"表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$。

（6）"A、B、C 中不多于两个发生"表示为 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$。

（7）"A、B、C 中至少有两个发生"表示为 $AB \cup BC \cup AC$。

练习 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间。

（1）生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数。

（2）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品"。若连续查出 2 个次品，停止检查；或检查 4 个产品，就停止检查。记录检查的结果。

（3）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标。

（4）同时掷三颗骰子，记录这三颗骰子点数之和。

（5）在某十字路口，记录一小时内通过的机动车辆数。

（6）记录某城市一天内的用电量。

2. 一名射手连续向一个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次击中目标（i=1，2，3）。试用 A_i 表示下列事件：

（1）第一次击中而第二次未击中目标。

（2）三次都击中目标。

（3）前两次击中目标，第三次未击中目标。

（4）三次射击中至少有一次击中目标。

（5）三次射击中恰有两次击中目标。

（6）三次射击中至少两次击中目标。

（7）三次射击中至多有一次击中目标。

（8）前两次射击至少有一次未击中目标。

1.2 概率及其性质

1.2.1 概率

虽然随机事件的发生是带有随机性的，但随机事件发生的可能性有大小之分。例如，口袋中有 10 个相同大小的球，其中 8 个黑球，2 个白球。从口袋中任取 1 球。对于这个试验，人们的共识是：取得黑球的可能性比取得白球的可能性大。为此，本节引进概率的概念。直观上，它测量了任何结果或任何结果的集合（称之为事件）发生的可能性大小。更精确的定义如下所述。

定义 1.2.1 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间。对于 E 的每一个事件 A 赋予实数 $P(A)$，若集合函数 $P(\cdot)$ 满足如下三条**概率公理**：

（1）（非负性）对一切事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$。

（2）（归一性）必然事件的概率为 1，即 $P(\Omega)=1$。

（3）（可列可加性）若 A_1，A_2，…，A_n，… 是一个互不相容的事件列，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为**事件 A 的概率**。

为了将概率形象化，把样本空间中的样本点看成质点，每个质点有一个质量。$P(A)$ 就是事件 A 这个质点集合的总质量，而样本空间的总质量为 1。这样，可加性公理变得很直观，不相交的事件列的总质量等于各个事件的质量之和。

1.2.2 概率的性质

根据概率公理，容易得到概率满足如下性质。利用概率的这些性质，通过简单事件的概率，可以得到更复杂事件的概率。

性质 1.2.1 不可能事件的概率为 0，即 $P(\varPhi)=0$。

性质 1.2.2 （有限可加性） 若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证明 因为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varPhi\cup\varPhi\cup\cdots$$

由可列可加性及 $P(\varPhi)=0$，可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \Phi \cup \Phi \cup \cdots)$$
$$= P(A_1) + \cdots + P(A_n) + P(\Phi) + P(\Phi) + \cdots$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

性质 1.2.3 设 A、B 是两个事件。若 $A \subset B$，则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geqslant P(A)$$

证明 因为 $A \subset B$，所以

$$B = A \cup (B - A)$$

而 A 与 $B-A$ 互不相容，故由有限可加性，得

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

即

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

由非负性公理，得

$$P(B) \geqslant P(A)$$

性质 1.2.4 对任何事件 A，有 $P(A) \leqslant 1$。

性质 1.2.5 对任何事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$。

性质 1.2.6 设 A、B 是任意两个事件，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$。

证明 因为 $A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$，且 $A \cap B \subset B$，A 与 $B - A \cap B$ 互不相容，所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

性质 1.2.6 可推广到多个事件的情形。设 A、B、C 为任意三个事件，则

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

更一般地，对任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

性质 1.2.7 设 A、B 是任意两个事件，则 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$。

证明 因为 $B - A = B - AB$，且 $AB \subset B$，所以

$$P(B - A) = P(B) - P(AB)$$

【例 1.2.1】 已知 $AB = \phi$，$P(A) = 0.6$，$P(A \cup B)=0.8$。求 B 的对立事件的概率。

解 由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)-P(AB) = P(A)+P(B)$，得

$$P(B) = P(A \cup B)-P(A) = 0.8-0.6 = 0.2$$

所以

$$P(\overline{B}) = 1-0.2 = 0.8$$

【例 1.2.2】　设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A-B)$。

解　因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以先求 $P(AB)$。由加法公式得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.3-0.6=0.1$$

所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$$

【例 1.2.3】　设 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=1/12$。求 A、B、C 都不出现的概率。

解　A、B、C 都不出现的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)\\&=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-0=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

练习 1.2

1. 设 A、B、C 为三件事，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$，则 A、B、C 至少有一个发生的概率为__________。

2. 设事件 A、B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，则 A、B 至少有一个不发生的概率为__________。

1.3　概率的确定方法

1.3.1　确定概率的频率方法

为了介绍确定概率的频率方法，首先引入频率的概念。

定义 1.3.1　在相同的条件下重复 n 次试验。在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

事件 A 的频率反映了事件 A 发生的频繁程度。频率越大，事件 A 发生越频繁，意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性越大。在长期的实践中，人们逐步发现，当试验次数 n 逐渐增大时，事件 A 发生的频率总会在某个确定的数值附近摆动。事件频率的这一特性称为频率的稳定性，这个确定的数值称为频率的稳定值。