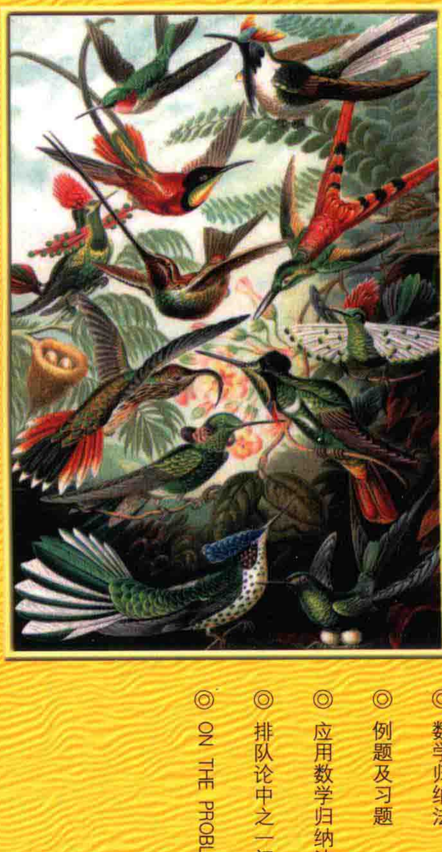
《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

数学归纳法

[苏] 索明斯基 著
越民义 译



◎ 数学归纳法
◎ 例题及习题
◎ 应用数学归纳法证明初等代数的一些定理
◎ 排队论中之一问题
◎ ON THE PROBLEM M/M/n IN THE THEORY OF QUEUES

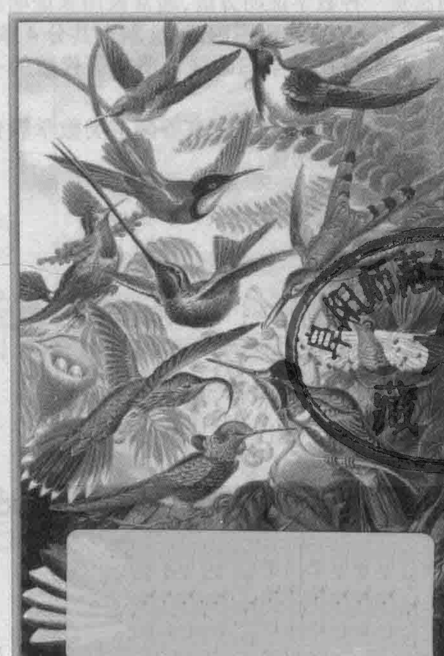
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

数学归纳法

[苏] 索明斯基 著

越民义 译



◎ 数学归纳法

◎ 例题及习题

◎ 应用数学归纳法证明初等代数的一些定理

◎ 排队论中之一问题

◎ ON THE PROBLEM M/M/n IN THE THEORY OF QUEUES

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

数学归纳法是一种数学证明方法,通常被用来证明给定命题在整个(或者局部)自然数范围内成立.本书共分4章:数学归纳法,例题及习题,应用数学归纳法证明初等代数的一些定理,习题解答.

本书适合于初、高中师生,以及高等师范类数学教育专业的学生和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学归纳法/(苏)索明斯基著; 越民义译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2015.3

ISBN 978-7-5603-5232-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①索… ②越… Ⅲ.①数学归纳法 Ⅳ.①O141

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第032682号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张6.5 字数67千字
版 次 2015年3月第1版 2015年3月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5232-9
定 价 18.00元

◎序言

这本小册子是60年前由我的挚友已故孙以丰教授和我从俄文翻译过来的. 编辑部的同志嘱我写篇序言. 为了纪念我与以丰多年的友谊, 这是我义不容辞的事情. 我与以丰自1940年考入浙江大学数学系, 同窗共研十几年. 一直到1956年, 以丰调任东北人民大学(后来的吉林大学)数学系任教, 才劳燕分飞. 其间虽时有书信往来, 但彼此思念之情难以言喻. 以丰在两年前因病去世, 享年88岁.

在我们同班同学中, 以丰是以早慧著称的, 考上大学时, 尚未满16岁, 考分总是名列前茅. 毕业后留校工作两年, 转入中央研究院, 随陈省身先生研究拓扑学. 1949年, 中研院迁台, 以丰推绝随往. 1950年, 中科院数学所成立, 即到所任助理研究员. 这时, 我承陈建功师的推荐, 从贵州大学数学系(教函数论与近世代数)到数学所, 与以丰又成同窗, 岂非人生巧遇.

当我来到北京时, 发现已有不少人掀起了学习俄语的风尚. 以丰尤为人先, 他已能阅读俄文数学书籍, 我到北京的第二天, 他便带我到王府井新华书店买了一本

俄英辞典和一本与《数学归纳法》同类的叫作《费波纳奇数》的小册子.这时,他知道北京有一家开明书店出版了《苏联青年科学丛书》中的某些小册子,并知道原贵阳高中(我的母校)的校长刘董宇先生已调来北京主编《中等数学课本》.刘先生还负责开明书店(后改为青年出版社)北京分部的工作,我知道:在抗战开始之前,有几任知名的文化人如封子恺、叶圣陶、顾均正、刘董宇等先生在上海开了一家开明书店,出版了一些颇有影响的中等教育方面的书籍和一份杂志《中学生》,并创办了一所名为“立达学园”的中学,他们的工作对促进我国当时的中等教育起了不小的作用.由于我与刘先生有此师生关系,孙以丰便要我去找刘先生看是否愿意出版像《数学归纳法》这样的科普读物.刘先生让我们翻译几页给他看看,之后便欣然同意.像《数学归纳法》这样五六十页的书,我们将它分成两份,一天功夫便可完工.

我们翻译小册子的工作才进行两三本,以丰便失去兴趣,我则因为收入来得容易,别的出版社时来光顾,还因为我曾经在农村私塾里读过几年古文,喜爱收藏古籍和文房四宝之类,便继续以高彻的名义出了几本.直至1957年大跃进开始则完全放弃.至于以丰过早的失去翻译工作的兴趣,我认为:一方面,他把此类工作视为小道,不愿为之花费时间;另一原因可能是他曾告诉我,他们孙家有一种不事勤劳的因素.有一次,我在旧书肆上买得了一幅孙家鼎(光绪的一位老师)的墨迹.我从建功师处知道以丰与孙家鼎有些血缘关系,便将此墨迹给以丰之父孙老伯看看,孙老伯对该墨迹反应很冷淡.他说孙家在寿州原是商人出身,没有多

大见识. 孙家鼎虽然中了状元,却不是乘机孳孳前进,故成就平平,与翁同和相去远矣! 翁之书法在清末自成一家,岂勤惰亦与基因有关耶! 我只信勤能补拙. 罗庚先生常云:勤奋生出百巧来,观其行,信然.

越民义
2015.2

◎ 前言

命题可以分为一般命题和特殊命题，我们举几个一般命题的例子：

1. 任何一个苏联公民都有受教育的权利.

2. 在任何一个平行四边形中，对角线的交点必定平分对角线.

3. 任何一个个位为零的数必定可被 5 除尽.

下面是几个和上述的一般命题相对应的特殊命题：

1. 彼特罗夫有受教育的权利.

2. 在平行四边形 *ABCD* 中，对角线的交点平分对角线.

3. 140 可被 5 除尽.

由一般命题过渡到特殊命题，称为演绎. 例如：

1. 任何一个苏联公民都有受教育的权利.

2. 彼特罗夫是苏联公民.

3. 彼特罗夫有受教育的权利.

由一般命题 1，借助命题 2，得到特殊命题 3.

由特殊命题过渡到一般命题称为归纳.归纳可以引出正确的结论,也可以引出不正确的结论.举两个例子来阐明这一点:

1. 140 可被 5 除尽.

2. 任何一个个位为零的数必定可被 5 除尽.

由特殊命题 1 得到一般命题 2,这里命题 2 是正确的.

1. 140 可被 5 除尽.

2. 任何一个三位数必定可被 5 除尽.

由特殊命题 1 得到一般命题 2,这里命题 2 是不正确的.

于是就产生了这样的问题,如何在数学中用归纳法,使得所得到的结论全是正确的呢?这本小书就要回答这一个问题.

◎ 目录

第1章 数学归纳法

1. 首先我们研究两个数学里所不允许的归纳的例子.

例1 令

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

我们容易证明

$$S_1=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}$$

$$S_3=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4}$$

$$S_4=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=\frac{4}{5}$$

根据所得的这些结果可断言,对于任何自然数 n

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

例2 我们研究三项式 x^2+x+41. 这个例子是著名数学家彼得堡科学院最早的院士之一Л·欧拉所指出的. 在这个三项式里以0代 x,得到一个质数41. 现

在，再对同一个三项式以 1 代 x，又得一个质数 43. 在这个三项式里，继续以 2，3，4，5，6，7，8，9，10 代 x，每次都得到一个质数，分别为 47，53，61，71，83，97，113，131 及 151. 根据所得的这些结果断言，以任何一个正整数代替这个三项式里的 x，必定得到一个质数.

为什么在以上两个例子中所做的推论是数学里所不允许的呢？我们所做的推论，不正确的地方究竟在哪里呢？

问题在这里，就是在以上的推论中，我们只根据这些命题对于某些数值 n（在例 2 中的 x）是正确的，就推出关于任意数值 n（或 x）的一般命题.

归纳在数学里被广泛的应用，不过用时必须小心，粗心地对待归纳会导致不正确的结论.

如果说，我们在例 1 中所作的一般命题幸而是对的，这点将在例 5 中证明，那么我们在例 2 中的一般命题却是错的.

实际上，更深入地考察三项式 x^2+x+41 就会发现，当 $x=0,1,2,\cdots,39$ 时，所得的全是质数，可是当 $x=40$时，三项式的数值为 41^2，就是一个合数.

2. 在例 2 中我们已遇到这样一个命题，对四十个特别的情形都正确，可是对一般的情形是不正确的.

再举两个例子说明有些命题在某些特殊情形下是正确的，而在一般情形下并不正确.

例 3　二项式 x^n-1，是令数学家们很感兴趣的问题，这里 n 是一个自然数. 举出一点就足以说明这个二项式和几何里的把圆周 n 等分的问题有着密切联系. 因此，这个二项式在数学里曾经被深入地钻研过，也就没有什么可以奇怪的了. 数学家们对于把这个二项式

分解为具有整数系数因子的问题，特别感兴趣.

考虑了对于 n 的许多特殊数值的分解以后，数学家们观察到，在所有分解出来的因子中，各个系数的绝对值都不超过1.事实上

$$x-1=x-1$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$\vdots$$

并且人们构造出表来，在表的限度内，各系数都具有上述性质.企图说明这个事实对 n 的任何数值都成立的种种尝试，都没有成功.

1938年，在杂志《数学科学的成就》(第4卷)上，发表了著名苏联数学家、苏联科学院通讯院士 H·Γ·契波塔列夫的一篇短文，在其中他建议我们的数学家弄清楚这个问题.

这个问题被 B·伊凡诺夫所解决①，并证明了当 n 小于105时，二项式 x^n-1 具有上述的性质.不过 $x^{105}-1$ 的因子当中有一个是下面的多项式

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+$$
$$x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+$$
$$x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1$$

已经不再具有上述的性质.

例4 设有 n 个平面经过同一个点，并且其中没

① 《数学科学的成就》，第4卷，313~317页，1941.

有三个平面经过同一直线. 问这 n 个平面把空间分成多少部分?

先看这个问题最简单的几种情形:一个平面把空间分成 2 部分;经过一点的两个平面把空间分成 4 部分;经过一点而不经过同一直线的三个平面把空间分成 8 部分.

乍看起来好像当平面的数目增加一个时,空间被分成的部分数是原来的 2 倍,于是就得到四个平面分空间成 16 部分,五个平面分空间成 32 部分,等等. 一般地说,n 个平面会把空间分成 2^n 部分.

但是事实并不是这样,而是四个平面分空间成 14 部分,五个平面分空间成 22 部分. 一般地说,n 个平面分空间成 $n(n-1)+2$ 部分①.

以上的例子有可能使我们做出一个简单同时又极重要的结论:

命题可以对于一系列特殊情形是正确的,但是对一般情形并不正确.

3. 现在就产生了这样的问题:有些命题在某些特殊情形是正确的,但是不可能把所有的特殊情形都考虑到. 如何去断定在一般情况下这个命题是否正确呢?这个问题有时可借助于一种特别的推理方法来得到完满的解决,这就是所谓的数学归纳法(完全归纳法).

这个方法是根据数学归纳的原理,内容如下:

假若:(1)当 $n=1$ 时命题是正确的;(2)由命题当 n 等于任一自然数 k 时是正确的,推出它对于 n 等于 $k+1$时也是正确的. 那么这个命题对于所有的自然数

① 解答见书第 22 页(例 11).

n 都是正确的.

证　如果不是这样的话，就是说这个命题并非对于所有的自然数 n 都是正确的，那么必然存在一个自然数 m，适合下面两个条件：(1) 命题当 $n=m$ 时并不正确；(2) 对于所有小于 m 的自然数 n，命题都是正确的(换句话说，m 是第一个使命题不正确的自然数).

显然 $m>1$，因为 $n=1$ 时命题是正确的(条件(1)). 因此，$m-1$ 也是自然数. 这样就得出，对于自然数 $m-1$ 命题是正确的，而对于紧接着的自然数 m 命题不正确. 这和条件2矛盾.

注意　在证明数学归纳法的原理时，我们用到了这样一点，就是任意一组自然数当中必定包含一个最小数. 反过来也容易看出，这个性质也可以由数学归纳的原理推导出来. 因此，这两个命题是等价的，其中任意一个可以取作规定自然数的意义的公理，另一个就成了一条定理. 通常，数学归纳的原理是被用作公理的.

4. 根据数学归纳原理的证明，称为用数学归纳法的证明. 这种证明必然包含两个部分，形成两个独立的定理：

定理1　当 $n=1$ 时命题是正确的(第一个有意义的数).

定理2　k 是任意一个自然数，若当 $n=k$ 时命题是正确的，则当 $n=k+1$ 时命题也是正确的(证明了有后继性).

如果这两个定理都证明了，则根据数学归纳的原理，命题对所有的自然数 n 都是正确的(所有允许的).

例5　求下面的和(见例1)

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

我们知道

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5}$$

现在,我们不再重复例1当中所犯的错误,并不一上来就做断言说,对于所有的自然数 n

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

我们要谨慎些,在这里只说由 S_1,S_2,S_3,S_4 的形式,使我们有可能猜想(假设)$S_n=\frac{n}{n+1}$对所有的自然数 n 都成立. 我们已经知道这个假设在 $n=1,2,3,4$ 时都是正确的,为了要验证这个假设,我们用数学归纳法.

(1)当 $n=1$ 时这个假设是正确的,因为 $S_1=\frac{1}{2}$.

(2)假定上面的假设对于 $n=k$ 是正确的,也就是说

$$S_k=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

这里 k 是某一个自然数. 我们要证明当 $n=k+1$ 时这个假设仍然是正确的,也就是说

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$$

实际上

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

由定理中已设的条件,就得到

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

两个定理都证明了. 现在,根据数学归纳法的原理我们可以肯定

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

对于所有的自然数 n 都成立.

注意1　必须着重指出,用数学归纳法的证明,无条件地要求上面的定理1和定理2都加以证明.

我们已经看到,忽视了定理2会引起怎样的结果(例2). 现在我们来指明,忽略了定理1,也是不行的. 看下面的例子.

例6　证明:任何一个自然数等于紧随在它后面的那个自然数.

用数学归纳法来证明. 假设

$$k=k+1 \tag{1}$$

要证明

$$k+1=k+2 \tag{2}$$

实际上,在等式(1)的两边各加上1就得到等式(2). 由此可知,若命题当 $n=k$ 时是正确的,则当 $n=k+1$ 时也正确. 定理就证完了.

因此,所有的自然数都相等.

错误究竟发生在哪里呢? 错误就发生在用数学归纳法证明所不可缺少的定理1,这里并未证明,而只是证明了定理2,其实定理1在这里是不正确的.

定理1和定理2各有其特别的意义. 定理1构成所谓归纳的基础. 定理2给这个基础以正确的无限度的自动推演,从已知的情形正确地推演到下一个情形,从 n 到 $n+1$.

如果没有证明定理1而证明了定理2(见例6),因而缺乏归纳的基础,那么定理2的应用便是无意义的,因为要推演的内容根本就不存在.

如果没有证明定理2而只证明了定理1(见例1及例2),那么虽然有了归纳的基础,可是正确地推演这个基础仍然是不可能的.

注意 2　上面所说的是数学归纳法最简单的情形. 在比较复杂的情形下,定理1和定理2的形式可能有一定的改变.

有时候,在证明的第二部分中不仅说当 $n=k$ 时命题是正确的,而且说当 $n=k$ 及 $n=k+1$ 时命题是正确的,则当 $n=k+2$ 时也正确. 这时,在第一部分证明中就必须对两个连续的自然数 n 来验证命题的正确性(见第15页的例5).

有时候,所要证的命题不仅是关于所有的自然数,而是关于所有大于某一个整数 m 的整数来说的. 在这种情形下,证明的第一部分就是要来验证 $n=m+1$ 时命题的正确性,并且必要时,还要对于紧接着 n 的一些整数来做这个工作(见第18页的例8).

5. 在本章结束时,我们再一次回到例1来阐明数学归纳法的一个要点.

对于各个不同的 n,研究下面的和

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

我们得到

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5},\cdots$$

这些结果指引我们来猜想,对于任意数值的 n

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$